МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
„ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчально – методичний посібник

Красноармійськ, 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
„ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчально – методичний посібник

Розглянуто на засіданні кафедри
„Природничих наук ”
протокол № 3 від 02. 12. 2009 р.

Затверджено
навчально-видавничою Радою Дон НТУ
протокол № 2 від 22. 04. 2010 р.

Красноармійськ, 2010

УДК – 517

Навчально-методичний посібник має за мету організувати самостійну та індивідуальну роботи студентів при вивченні розділу «Ряди» курсу вищої математики (для студентів усіх спеціальностей технічних вузів).

Автори: В.Д.Мальцева, С.В.Волков. –Красноармійськ: КІІ ДВНЗ ДонНТУ, 2009р. – 60с.

Надано: короткі теоретичні відомості (означення, теореми, формули) та вказівки, необхідні для свідомого і успішного розв'язання індивідуальних завдань; достатня кількість прикладів розв'язання типових завдань; завдання для самостійного опрацювання матеріалу, а також індивідуальні завдання (30 варіантів) з указаного розділу; довідковий матеріал; завдання підвищеної складності; вимоги до виконання та оформлення індивідуальних завдань; орієнтовні питання до семестрового контролю; перелік рекомендованої та використаної літератури.

Автори:

Мальцева В.Д. старший викладач кафедри ПН КІІ ДонНТУ

Волков С.В. старший викладач кафедри ПН КІІ ДонНТУ

Рецензенти:

Триллер Е.А. к.т.н. доцент, зав. кафедри ЕМА КІІ ДонНТУ

Сергієнко Л.Г. к.п.н. доцент, декан ФТОВ КІІ ДонНТУ

ЗМІСТ

Вступ 6
1. Загальні вказівки 7
2. Орієнтовні питання до модульного контролю 8
3. Числові ряди 10
3.1. Загальні поняття та основні означення 10
3.2. Властивості рядів 12
3.3. Необхідна ознака збіжності знакододатніх числових рядів 14
3.4. Достатні ознаки збіжності знакододатніх числових рядів 14
3.4.1. Ознака Даламбера 14
3.4.2. Інтегральна ознака Коші 15
3.4.3. Радикальна ознака Коші 16
3.4.4. Ознаки порівняння 17
3.5. Знакопереміжні ряди та ознака їх збіжності 18
4. Функціональні ряди 20
4.1. Основні поняття, означення та властивості 20
4.2. Степеневі ряди, їх радіус та область збіжності 21
4.3. Ряди Тейлора і Маклорена 25
4.3.1. Означення рядів Тейлора і Маклорена 25
4.3.2. Розвинення функцій у ряди Тейлора та Маклорена з використанням відомих розвинень 25
4.4. Застосування рядів 30
4.4.1. Знаходження та обчислення інтегралів 30
4.4.2. Розв’язання диференціальних рівнянь 31
4.4.3. Наближені обчислення значень функцій 33
4.5. Тригонометричні ряди Фур’є 37
5. Знаходження формули загального члена числової послідовності 44
6. Завдання для самостійного опрацювання 48
7. Завдання підвищеної складності 59
8. Перелік рекомендованої та використаної літератури 61
Додаток А 62
Додаток Б 63
Додаток В 65
Додаток Г 66

ВСТУП

Викладання розділу математики «Числові і функціональні ряди» має за мету ознайомити студентів з методами представлення складних об'єктів сумою простих. Такі методи необхідні для розв'язання прикладних задач при вивченні електротехніки та теорії автоматизації і управління, та удосконалення навичок складання і аналізу математичних моделей задач прикладного характеру, пов'язаних з майбутньою діяльністю інженера.

У відповідності до вимог підготовки бакалаврів, визначених у кваліфікаційній характеристиці напряму, у результаті вивчення даного розділу курсу студент повинен:

знати:

– класи задач, які можна звести до таких задач, що розв'язуються з використанням рядів;

– способи розв'язання задач, пов'язаних зі спеціальністю, використовуючи розклади функцій у ряд;

вміти:

– самостійно розбиратися у математичному апараті, який знаходиться у спеціальній літературі;

– обирати методи дослідження і доводити розв'язки задач до практичного результату;

– робити перевірку одержаних результатів;

– використовувати комп'ютерні технології, таблиці та довідкові матеріали.

З метою забезпечення указаних знань, умінь та навичок створено даний посібник, який призначений студентам втузів усіх форм навчання. У ньому підібрані задачі і приклади, які достатньо повно ілюструють різні положення теорії рядів і методи розв'язання задач з їх використанням.

Змістовний матеріал представлений таким чином: з кожного питання приводиться теоретичний матеріал (означення, теореми, формули, алгоритми) необхідний для свідомого розв'язання задач індивідуальних завдань; потім детально розбираються типові приклади та задачі, надаються відповіді до них; після цього пропонуються вправи для самостійного розв'язання.

1. ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Уважно прочитайте теоретичну частину вказівок та вдоскональте свої знання вивченням відповідного матеріалу дисципліни за підручниками, що вказані у переліку. Уважно проаналізуйте теореми та розв'язки задач, що наводяться у кожному розділі.

Визначте завдання для самостійного опрацювання, що відповідають номеру Вашого варіанта. В завданнях для самостійного опрацювання параметр k – це номер Вашого варіанта. Завдання необхідно виконати в окремому зошиті, титульну сторінку якого оформити за зразком:

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ Красноармійський індустріальний інститут Контрольна робота з дисципліни „ ” розділ „Ряди” студента групи ____________________ вказати назву групи ____________________________________ Прізвище Ім’я По-батькові ВАРІАНТ № ___ номер залікової книжки власний підпис дата здачі роботи

Роботу необхідно починати з запису умови завдання в повному об’ємі, вказавши відповідний номер завдання, і супроводжувати розв’язання досить детальними поясненнями, текст яких не повинен містити скорочених записів, окрім загально прийнятих. Усі розрахунки повинні виконуватися повністю, без втрати логічної послідовності дій. У випадку можливості давати геометричну інтерпретацію умови і розв’язання задачі. Результати, які одержані під час виконання завдань, слід перевірити та обґрунтувати, і тільки після підтвердження записати повну відповідь. Оформлену роботу у встановлений термін здати на перевірку. У десятиденний термін, після здачі, обов’язково з’ясувати результати перевірки роботи викладачем. У разі необхідності допрацювати розв’язання у тому ж зошиті в кінці роботи з вказівкою „Доробка”, зберігаючи номер відповідного завдання.

Якщо у процесі вивчення матеріалу чи при розв’язанні задач у студента виникають питання, то необхідно звернутися до викладача за консультацією.

2. ОРІЄНТОВНІ ПИТАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

1. Що називається числовим рядом? Який числовий ряд називається збіжним, розбіжним?
2. Що називається сумою числового ряду?
3. Яка необхідна умова збіжності числового ряду? Сформулювати та довести її.
4. Сформулюйте та доведіть необхідну і достатню умову розбіжності ряду.
5. Який ряд називають геометричним? Дослідіть його збіжність при $|q| < 1, |q| > 1, |q| = 1$.
6. Сформулюйте та доведіть властивості числових рядів.
7. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – ознаку Даламбера.
8. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – радикальну ознаку Коши.
9. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – інтегральну ознаку.
10. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів –теореми порівняння.
11. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом? Дослідіть його збіжність.
12. Який ряд називається знакопереміжним? Сформулюйте та доведіть теорему Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів.
13. Доведіть, що при заміні суми ряду типу Лейбніца сумою його перших членів допустима абсолютна похибка не перевищує модуля першого відкинутого члена ряду.
14. Який знакопереміжний ряд називається абсолютно збіжним рядом? Доведіть, що із абсолютної збіжності ряду слідує його збіжність.
15. Який знакопереміжний ряд називається умовно збіжним рядом? Наведіть приклади абсолютно і умовно збіжних рядів.
16. Який ряд називається функціональним? Що називається областю його збіжності та як знайти область збіжності?
17. Який ряд називається степеневим? Сформулюйте та доведіть його властивості.
18. Як знайти область збіжності степеневого ряду? Виведіть формулу для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.
19. Який ряд називається рядом Тейлора (Маклорена)? Яка умова розвинення функції у ряд Тейлора?
20. Одержіть розвинення функцій у степеневий ряд (Додаток А) та визначте області збіжності одержаних рядів.
21. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного обчислення значень функцій.

22. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для знаходження невизначених інтегралів
23. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного обчислення визначених інтегралів
24. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.
25. Який функціональний ряд називають рядом Фур'є? Запишіть коефіцієнти Фур'є.
26. Яка достатня та необхідна умова розвинення функції у ряд Фур'є (теорема Діріхле)?
27. Одержати розвинення у ряд Фур'є функції з періодом $T = 2\pi$.
28. Одержати розвинення у ряд Фур'є функції з періодом $T = 2l$.
29. Одержати розвинення у ряд Фур'є парних та непарних функцій на заданому відрізку.

3. ЧИСЛОВІ РЯДИ

3.1. Загальні поняття та основні означення

Нехай задана нескінчена послідовність чисел:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

де $u_n = f(n) -$ відома функція натурального аргументу.

Наприклад, послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ являється заданою, тому що відомий закон (функція), по якому можна обчислити її довільний член за даним номером, тобто $u_n = \frac{1}{n}$.

O_1. *Числовим рядом* називається сума чисел нескінченої числової послідовності $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, тобто вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (1)$$

При цьому числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ називаються членами ряду, а u_n називається також його *загальним* членом.

Очевидно, щоб одержати довільний член ряду, необхідно в його загальний член підставити номер члена, який знаходимо.

Завдання 1. Записати перші п'ять членів ряду:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 1};\ b)\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{5^n},\ c)\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n!}{\ln(n+1)}.$$

Приклад 1. Записати у найбільш простій формі формулу загального члена ряду:

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \ldots$$

Розв'язання: Неважко помітити, що чисельники даних членів являються квадратами їх номерів, а знаменники на одиницю більше номера члена. Тому найпростіша формула загального члена ряду має вигляд $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Відповідь: $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Завдання 2. Записати можливу (найпростішу) формулу загального члена для наступних рядів:

$$a)\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots;\ b)\ \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{4}{25} \ldots;$$

$$c)\frac{\sin\left(\pi/2\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\left(\pi/4\right)}{\sqrt{4}}+\frac{\sin\left(\pi/6\right)}{\sqrt{6}}-\frac{\sin\left(\pi/8\right)}{\sqrt{8}}+...;$$

$$d)\ \frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}...;\ e)\ \frac{1}{2\ \ln 2}+\frac{1}{3\ \ln 3}+\frac{1}{4\ \ln 4}+....$$

O_2. Сума n перших членів ряду (1), називається n-ою *частковою сумою ряду,* позначається S_n, тобто $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

O_3. *Сумою* ряду (1) називається границя S_n при $n \to \infty$, якщо вона існує і скінчена, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ де S сума ряду.

O_4. *Збіжним* називається ряд який має скінчену суму. Р*озбіжним* називається ряд сума якого не існує або рівна ∞.

O_5. Ряд $u_{m+1}+u_{m+2}+...+u_{m+n}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{m+n}$, одержаний із ряду (1) відкиданням перших його m членів, називається *залишком* ряду (1), позначається R_m. Очевидно, $S_m + R_m = S$.

Приклад 2. Записати суму перших n членів ряду $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...$ та знайти формулу S_n

Розв'язання: $S_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...+\frac{1}{5^n}$. Очевидно, маємо суму перших n членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = \frac{1}{5}$ і знаменником $q = \frac{1}{5}$. За формулою суми n перших членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \text{ знаходимо } S_n = \frac{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

Відповідь: $S_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$.

3.2. Властивості рядів

1. Відкидання від заданого числового ряду або приєднання до нього довільного скінченого числа членів не змінює його збіжності чи розбіжності.

2. Якщо ряд (1) збігається, то границя його m-го залишку при $m \to \infty$ дорівнює 0, тобто $\lim\limits_{m \to \infty} R_m = 0.$

3. Якщо члени збіжного ряду, що має суму S, помножити на число λ, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n)$ буде також збігатися і матиме суму λS .

4. Сума (різниця) двох збіжних рядів – є збіжний ряд, сума якого дорівнює сумі (різниці) сум даних рядів.

<u>*Приклад 3.*</u> Чи являється збіжним ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$?

<u>*Розв'язання:*</u> Складемо $n-$у часткову суму S_n: $S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}$. Очевидно, члени ряду являються членами геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{1}{3}$. Застосовуємо відому з шкільного курсу математики формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ і знаходимо $n-y$ часткову суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}.$$

<u>*Відповідь*</u>: сума існує і скінченна, даний ряд збігається і має суму $S = 1,5.$

<u>*Приклад 4.*</u> Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

<u>*Розв'язання:*</u> даний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

не є збіжним, так як $S_n = 0$, коли $n = 2k$ і $S_n = 1$, коли $n = 2k - 1$. У даному випадку не можна говорити, що ряд має суму.

<u>*Відповідь:*</u> даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1}$ розбігається.

<u>*Завдання 3.*</u> Для даних рядів записати $n -$ у часткову суму S_n та дослідити їх на збіжність за означенням збіжності ряду (O_4):

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)};$ $\qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n};$

$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n};$ $\qquad d)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1};$

$e)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n};$ $\qquad f)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n};$

$g)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$ $\qquad h)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n};$

$i)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)};$ $\qquad j)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n + (-5)^{n+1}}{9^n};$

$k)\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{2n^2};$ $\qquad l)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(4n^2 - 1\right)^2}.$

Одна із важливіших задач теорії числових рядів – розробка методів обчислення їхніх сум. Точне обчислення суми, якщо це можливо, майже завжди громіздке за розрахунками. Тому частіше всього обмежуються наближеним обчисленням суми ряду, приймаючи $S \approx S_m$, допускають при цьому похибку,що дорівнює R_m. Але перш ніж приступити до обчислення суми ряду, необхідно вияснити, збігається чи розбігається даний ряд.При цьому особливого значення набуває задача про дослідження ряду на збіжність.

Як бачимо, збіжність чи розбіжність ряду можна з’ясувати за означенням O_4, але не завжди можна одержати формулу S_n, а отже, і застосувати O_4. Тоді застосовують необхідну і достатні умови збіжності числового ряду. Розглянемо знакододатні числові ряди, тобто ряди, усі члени яких додатні.

3.3. Необхідна ознака збіжності знакододатніх числових рядів

<u>*Теорема 1.*</u> (необхідна ознака збіжності ряду).

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя його загального члена дорівнює нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд *може збігатися*, а якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ – *достатня ознака розбіжності* ряду.

<u>*Завдання 4.*</u> Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів: $a)\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; $b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ $c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{5n^2+7}$.

3.4. Достатні ознаки збіжності знакододатніх числових рядів

3.4.1. Ознака Даламбера

<u>*Теорема 2.*</u> (ознака Даламбера).

Нехай для заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ знайдена скінчена границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p,$ тоді при $p<1-$ ряд збігається; при $p>1-$ розбігається, а при $p=1$ питання про збіжність залишається відкритим, необхідно застосувати інші ознаки.

<u>*Приклад 5.*</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$

<u>*Розв'язання:*</u> Наявність факторіала у загальному члені зумовлює доцільність використання ознаки Даламбера: за умовою $u_n = \frac{3^n}{n!},\ u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$ Тоді знайдемо $p = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} \Rightarrow$

$p = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 \Rightarrow p = 0 < 1$ <u>*Відповідь:*</u> ряд збігається.

<u>*Завдання 5.*</u> Дослідити на збіжність ряди:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\ ; \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty} (n!)\left(\frac{e}{n}\right)^n; \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

3.4.2. Інтегральна ознака Коші

Теорема 3. (інтегральна ознака Коші).

Нехай для заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ знайдена $f(x)=u_n$ при $n=x$. Тоді, якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *збігається*, то і даний ряд *збігається*; коли ж інтеграл *розбігається*, то і ряд *розбігається.*

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Розв'язання: Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} = 0 \Rightarrow$ умова виконана і даний ряд *може* збігатися. З`ясуємо, чи збігається інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \ln^{-2}(x+1)\frac{dx}{x+1} = -\lim_{b\to\infty}\ln^{-1}(x+1)\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$. Як бачимо, інтеграл збігається.

Відповідь: даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ збігається.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Розв'язання: Необхідна ознака $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ виконується, оскільки $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, що свідчить про можливу збіжність ряду. Застосуємо достатню ознаку – інтегральну ознаку Коші:

$$u_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^b =$$

$$= -0,5\lim_{b\to\infty}\left(b^{-2}-1\right) = 0,5 -$$ інтеграл збігається, а значить і ряд збігається.

Відповідь: даний ряд збігається.

O_6. *Узагальненим гармонічним* рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots \tag{2}$$

Завдання 6. За допомогою інтегральної ознаки встановіть значення p у випадку збіжності та розбіжності узагальненого гармонічного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ називається гармонічним. [1)]

Завдання 7. Дослідити на збіжність ряди: $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2-5};\ b)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5}$.

3.4.3. Радикальна ознака Коші

Теорема 4. (радикальна ознака Коші).

Нехай для заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ знайдена границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p.$ Тоді при $p<1-$ даний ряд збігається; при $p>1-$ розбігається, а при $p=1$ питання про збіжність залишається відкритим, необхідно застосувати інші достатні ознаки.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{3^4}{2^4}+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4^9}{3^9}+\cdots+\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}+\cdots\ .$$

Розв'язання: За умовою $u_n=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$. Маємо

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Тоді $p=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1\Rightarrow$ даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Завдання 8. Дослідити на збіжність ряди: $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}n!\,;\ b)\sum_{n=1}^{\infty}n^n(2n+1)^{-n}$.

---

[1] Назва пов'язана з тим, що струна при поділу її на 2,3, 4,... рівні частини дає звуки, гармонуючі з основним тоном. Крім того, назву ряду визначає характеристична властивість її членів: кожен член, починаючи з другого, являється середнім гармонічним рівновіддалених від нього членів.

3.4.4. Ознаки порівняння

Нехай необхідно дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1). Візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), про збіжність чи розбіжність якого ми знаємо, та такий, щоб можно було порівняти u_n з v_n. Тоді справедливими будуть слідуючі теореми:

Теорема 5. Якщо ряд (2) збігається, а $u_n \le v_n \ \forall n \in N$, то і ряд (1) збігається.

Теорема 6. Якщо ряд (2) розбігається, а $u_n \ge v_n \ \forall n \in N$, то і ряд (1) розбігається.

Теорема 7. Якщо існує скінчена і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то обидва ряди одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Якщо, зокрема, загальні члени рядів, що порівнюються, еквівалентні при $n \to \infty \left(u_n \sim v_n\right)$, то обидва ряди у сенсі збіжності ведуть себе однаково.

Для порівняння, як правило, беруть геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$, яка збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \ge 1$, або узагальнений гармонічний ряд.

Приклад 9. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$?

Розв'язання: Перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n5^n} = 0 \Rightarrow$ умова виконана. Застосуємо ознаки порівняння: візьмемо для порівняння збіжний геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ з $q = \frac{1}{5} < 1$ і загальним членом $v_n = \frac{1}{5^n}$. Очевидно, що загальний член даного ряду $u_n = \frac{1}{n5^n} \le v_n = \frac{1}{5^n} \Rightarrow$ згідно _теореми 5_ даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 10. З`ясувати, чи збігається ряд $\sum_{1}^{\infty} tg\frac{1}{n}$.

Розв`язання: Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\leftarrow\infty} tg\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ ознака виконується, можлива збіжність ряду. Далі застосуємо достатню ознаку – ознаку порівняння. Візьмемо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Відомо, що він розбігається як гармонійний при $p=1$. Крім того, відомо, що $tg\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$. Отже, згідно *теореми 6* даний ряд розбігається. *Відповідь:* ряд розбігається.

Завдання 9. За допомогою порівняння дослідити на збіжність ряди:

$$a)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n};\ b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+7};\ c)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3(n+1)};\ d)\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1};\ e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}};$$

3.5. Знакопереміжні ряди та ознака їх збіжності

O_7. *Знакопереміжним* рядом називається ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\ , \qquad (3)$$

де $u_n > 0\ \forall\ n \in N$.

Питання збіжності такого ряду розв`язується за допомогою теореми Лейбніца.

Теорема 8 (ознака Лейбніца)

Якщо: $1)\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; $2) u_n > u_{n+1}, \forall n \in N,$ то ряд (3) збігається, а його сума не перевищує його першого члена, тобто $0 < S < u_1$.

O_8. Ряд (3) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n u_n\right|$, тобто ряд складений із абсолютних величин членів даного ряду.

O_9. Ряд (3) називається *умовно збіжним*, якщо згідно теореми Лейбніца він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n u_n\right|$ розбігається.

Неважко переконатися, що умови теореми Лейбніца виконуються, якщо ряд абсолютно збіжний. Тому *дослідження збіжності знакопереміжних рядів слід починати з дослідження його абсолютної збіжності*.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Розв`язання: Складемо ряд із модулів членів даного ряду, він збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $p=2>1$. Отже, збігається і даний ряд, причому абсолютно.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Приклад 12. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Розв`язання: перевіримо першу умову теореми 7: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Так як $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$, то умова виконана; друга умова теореми 7: $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n+1}>\ldots$ також виконана, то за ознакою Лейбніца даний ряд збігається. Щоб дослідити, як збігається ряд, умовно чи абсолютно, дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші – з'ясуємо, чи збігається інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}$:

$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to\infty}\ln\left(2x-1\right)\Big|_1^b=\infty\Rightarrow$ інтеграл розбігається, що свідчить про розбіжність ряду.

Відповідь: ряд умовно збігається.

Завдання 10. Як збігається кожен ряд (умовно чи абсолютно)?

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln n};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)};\quad f)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+7}\right)^n;\quad g)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\frac{1}{5n}.$$

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

4.1. Основні поняття, означення та властивості.

O_{10}. *Функціональним* називається ряд членами якого являються функції

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{4}$$

Так наприклад, ряд $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots + \sin^n x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$ являється функціональним, оскільки загальний член ряду $u_n = \sin^n x$ є функція від x.

Зрозуміло, що при $x = x_0$ із функціонального ряду ми одержимо числовий ряд (збіжний або розбіжний).

O_{11}. Точка $x = x_0$ називається *точкою збіжності* ряду (4), якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається .

O_{12}. *Областю збіжності* ряду (4) називається множина всіх точок збіжності.

Для знаходження області збіжності можна використовувати ознаку Даламбера, тобто ряд (4) збігається при всіх x, що задовольняють умові:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \tag{5}$$

<u>*Приклад 13.*</u> Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

<u>*Розв`язання:*</u> за умовою $u_n = \ln^n x$, $u_{n+1} = \ln^{n+1} x = \ln x \cdot \ln^n x$ . Тоді розв`яжемо нерівність (5), тобто $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln x \cdot \cancel{\ln^n x}}{\cancel{\ln^n x}} \right| = |\ln x| < 1$.

Отже, $-1 < \ln x < 1 \Rightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln e \Rightarrow x \in \left(e^{-1}; e\right) -$ інтервал збіжності даного ряду. Числа $x = e^{-1}$ і $x = e$ задовольняють умові $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$.

Дослідимо збіжність даного функціонального ряду при $x = e^{-1}$. За цієї умови із даного ряду одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln e^{-1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ – розбіжний (див. приклад 4). Дослідимо точку $x = e$, за цієї умови із даного ряду одержимо $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n e = \sum_{n=1}^{\infty}1^n = \infty$.

<u>*Відповідь:*</u> $x \in \left(e^{-1}; e\right)$ – область збіжності даного ряду.

<u>*Завдання 11:*</u> Знайти область збіжності рядів:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3x-4)^n}{3^n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n\ln n};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

4.2. Степеневі ряди, їх радіус та область збіжності.

O_{13}. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + ... + a_n\left(x-x_0\right)^n + \dots, \quad (6)$$

де $u_n(x) = a_n\left(x-x_0\right)^n$ – загальний член, a_n – його коефіцієнт.

Як відомо, ряд (6) збігається на інтервалі $\left(x_0 - R; x_0 + R\right)$, де R – радіус збіжності, x_0 – центр збіжності.

Алгоритм знаходження області збіжності:

1) знаходимо радіус збіжності за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ або } R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}, \quad (7)$$

2) записуємо інтервал збіжності,
3) перевіряємо на збіжність кінці інтервалу $x = x_0 - R$ і $x = x_0 + R$,
4) записуємо область збіжності.

<u>*Приклад 14:*</u> Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{5^n}$.

<u>*Розв'язання:*</u> За умовою $a_n = \frac{1}{5^n}; a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$. Тоді згідно (7) знайдемо радіус збіжності R та інтервал збіжності ряду:

$$R=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n}=5\Rightarrow(1-5;1+5)=(-4;6)-$$ інтервал збіжності.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x=-4$ та $x=6$ степеневий ряд приймає вигляд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4-1)^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(6-1)^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5)^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$.

Обидва ряди розбігаються, так як не задовольняють необхідній ознаці збіжності.

<u>Відповідь:</u> Отже, $(-4;6)-$ область збіжності даного ряду.

<u>Приклад 15:</u> Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$.

<u>Розв'язання:</u> За умовою $a_n=n!$, $a^n=(n+1)!$. Тоді радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$

<u>Відповідь:</u> ряд збігається тільки в одній точці $x=0$.

<u>Приклад 16:</u> Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$.

<u>Розв'язання:</u> За умовою $a_n=\frac{1}{n(n+2)}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}\Rightarrow$

$R=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}=1\Rightarrow(-1;1)-$ інтервал збіжності. Дослідимо збіжність даного ряду при $x=1$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. Порівнюючи його зі збіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, робимо висновок, що він збігається, і $x=1$ належить області збіжності даного ряду. При $x=-1$ даний ряд перетворюється в знакопереміжний $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$, який збігається також, причому абсолютно, так як збігається ряд, складений із абсолютних величин, що установлено вище.

<u>Відповідь:</u> $[-1;1]-$ область збіжності даного ряду.

Приклад 17: Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}$

Розв'язання: За умовою $a_n=\frac{1}{(2n-1)!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$, тоді згідно (7)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!2n(2n+1)}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}2n(2n+1)=\infty.$$

Оскільки $R=\infty$, то шукана область збіжності $(-\infty;\infty)$.

Відповідь: даний ряд збігається на всій числовій осі.

Зауважимо, що для знаходження області збіжності степеневих рядів можливе безпосереднє застосування умови (5), прямим наслідком якої є алгоритм по знаходженню області збіжності степеневого ряду (6).

Приклад 18: Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+2)^n}{n}$.

Розв`язання: за умовою $u_n(x)=\frac{3^n(x+2)^n}{n}$, $u_{n+1}(x)=\frac{3^{n+1}(x+2)^{n+1}}{n+1}$.

Тоді розв`язуємо нерівність $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(x+2)^{n+1}n}{(n+1)3^n(x+2)^n}\right|<1$,

тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{3^n}\,3\,\cancel{(x+2)^n}\,(x+2)n}{(n+1)\cancel{3^n}\,\cancel{(x+2)^n}}\right|=3|x+2|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}<1\Rightarrow 3\ \ |x+2|<1$.

Отже, $|x+2|<\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{1}{3}<x+2<\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{7}{3}<x<-\frac{5}{3}$, звідки робимо висновок, що $\left(-\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)-$інтервал збіжності даного ряду. Числа $x=-\frac{7}{3}$ і $x=-\frac{5}{3}$ задовольняють умові $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$. Дослідимо збіжність даного ряду при $x=-\frac{7}{3}$. За цієї умови із даного ряду одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(-\frac{7}{3}+2\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який є знакопереміжним.

Застосуємо теорему Лейбніца: $1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ 2)\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\,\forall n\in N$. Як бачимо, обидві умови теореми Лейбніца виконуються, що свідчить про збіжність даного ряду при $x=-\frac{7}{3}$. Дослідимо точку $x=-\frac{5}{3}$: із даного ряду одержимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(-\frac{5}{3}+2)^n=\sum\frac{1}{n}$ який є гармонічним, $p=1\Rightarrow$ ряд розбігається.

Відповідь: $\left[-\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$ – область збіжності даного ряду.

Приклад 19: Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n-1)!}$

Розв'язання: За умовою $a_n=\frac{1}{(n-1)!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{n!}$, тоді згідно (7)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\Rightarrow$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n-1)!}\cdot n}{\cancel{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Оскільки $R=\infty$, то шукана область збіжності $(-5-\infty;-5+\infty)\Rightarrow x\in(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: даний ряд збігається на всій числовій осі.

Завдання 12: Знайти області збіжності рядів:

$a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}$; $\qquad b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$c)\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$; $\qquad d)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}$;

$e)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$; $\qquad f)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2-x)^n}{n^2+4}$.

4.3. Ряди Тейлора і Маклорена.
4.3.1. Означення рядів Тейлора і Маклорена.

O_{14}. *Рядом Тейлора* функції $f(x)$ називається ряд виду

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+.. \quad (8)$$

Теорема 8. Якщо функція $y=f(x)$ в точці $x=a$ і в її околі нескінчено диференційована, то у кожній точці цього околу її можна представити рядом Тейлора (розвинути у ряд Тейлора)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+.. \quad (9)$$

Якщо у ряді Тейлора $a=0$, то він перетворюється у ряд Маклорена, який має вигляд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (10)$$

4.3.2. Розвинення функцій у ряди Тейлора та Маклорена.

Алгоритм безпосереднього розвинення функцій у ряд за означенням:

1) знаходять першу, другу, третю і т.д. похідні даної функції і обчислюють їх у точці $x=a$, підставляють одержані значення у ряд Тейлора, коли $a\neq 0$ і у ряд Маклорена, якщо $a=0$;
2) знаходять область збіжності одержаного ряду.

Приклад 20: Розвинути функцію $y=\sin x$ у ряд Маклорена

Розв'язання :

1) знайдемо і обчислимо декілька перших порядків похідних:

$$\begin{aligned}
y&=\sin x, & y(0)&=\sin 0=0,\\
y'&=\cos x, & y'(0)&=\cos 0=1,\\
y''&=-\sin x, & y''(0)&=-\sin 0=0,\\
y'''&=-\cos x, & y'''(0)&=-\cos 0=-1,\\
y^{IV}&=\sin x, & y^{IV}(0)&=\sin 0=0,\\
y^{V}&=\cos x, & y^{V}(0)&=\cos 0=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Як бачимо, після $-\cos x$ йде періодичний повтор першої четвірки різних функцій і відповідно четвірки їх значень. Отже,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!} + \ldots$$

$2)$ знайдемо область збіжності, розв'язуючи нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|u_{n+1}\right|}{\left|u_n\right|} < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right|}{\left|\left(-1\right)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}\right|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n\left(2n+1\right)} < 1 \Rightarrow$$

$x^2 < \lim\limits_{n\to\infty} 2n(2n+1) \Rightarrow x^2 < \infty \Rightarrow \left|x\right| < \infty -$ область збіжності.

<u>*Відповідь:*</u> $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}, \quad \forall x \in \left(-\infty; \infty\right).$

Аналогічно можна одержати розвинення у ряд Маклорена функцій $\cos x$, e^x, $\frac{1}{1-x}$, $\left(1+x\right)^m$, $\ln\left(1+x\right)$ і т.д., знайти їх області збіжності (див. додаток А).

Можна досить просто знаходити розвинення багатьох інших функцій, використовуючи ці розвинення , читаючи і розуміючи їх не буквально, а змістовно. Наприклад, ряд 1 (додаток А) читаємо так: показникова функція (з основою e) дорівнює 1 плюс показник, плюс показник в квадраті, поділений на $2!$, плюс показник у кубі, поділений на $3!$ і т.д. Згідно сказаного одержимо розвинення:

$$e^{-x} = 1 + \left(-x\right) + \frac{\left(-x\right)^2}{2!} + \frac{\left(-x\right)^3}{3!} + \frac{\left(-x\right)^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n x^n}{n!}$$

<u>*Приклад 21.*</u> Розвинути функцію $y = \ln\left(1-x\right)$ у ряд Маклорена

<u>*Розв'язання.*</u> Використовуючи ряд 8 (додаток А), запишемо:

$$\ln\left(1-x\right) = \ln\left(1+\left(-x\right)\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

<u>*Відповідь:*</u> $\ln\left(1-x\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Приклад 22. Розвинути у ряд Маклорена функцію $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання: логарифм частки дорівнює різниці логарифмів, тобто $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Застосуємо ряд 8 (додаток А) і розклад з попереднього прикладу. Знайшовши різницю між ними, одержимо:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Відповідь: $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $(|x|<1)$.

Приклад 23. Розвинути функцію $\frac{1}{1+x^2}$ у ряд за степенями x .

Розв'язання: Використаємо ряд 5 (додаток А):

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(|x|<1)$$

Відповідь: $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(|x|<1)$

Приклад 24. Розвинути у ряд Маклорена функцію $y=arctg\ x$.

Розв'язання: Відомо, що $(arctg\ x)'=\frac{1}{1+x^2}$. Тоді

$$arctg\ x=\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\left(1-x^2+x^4-x^6+\ldots\right)dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\Rightarrow$$

$$arctg\ x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Відповідь: $arctg\ x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots\Rightarrow.$

$$arctg\ x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad (|x|\le 1)$$

Аналогічно можна одержати розвинення у ряд Маклорена функцій $y=\arcsin x, y=\arccos x$, $y=arcctgx$ (див. додаток А).

Приклад 25. Розвинути у ряд за степенями x функцію

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Розв'язання: Відомо, що $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(1+x+x^2+...+x^n+...\right)'\Rightarrow$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

Так як при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення має місце при $-1<x<1$.

Відповідь: $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\ \left(|x|<1\right).$

Завдання 13. Розвинути у ряд Маклорена наступні функції:

$a)\ f(x)=\cos 4x;$ $\qquad b)\ f(x)=e^{2x};$

$c)\ f(x)=x^3 arctg(x);$ $\qquad d)\ f(x)=\sin x^2;$

$e)\ f(x)=2^x;$ $\qquad f)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}};$

$g)\ f(x)=e^{\cos x};$ $\qquad h)\ f(x)=(1+x)^x;$

$i)\ f(x)=\ln\left(1+e^x\right);$ $\qquad j)\ f(x)=\cos^n x;$

і знайти області збіжності одержаних рядів.

Завдання 14. Розвинути функцію у ряд Тейлора, використовуючи означення:

$a)\ f(x)=\sqrt[3]{x}$ в околі точки $x=-1$;

$b)\ f(x)=\sqrt{x^3}$ в околі точки $x=1$;

$c)\ f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в околі точки $x=2$;

$d)\ f(x)=\frac{1}{x}$ в околі точки $x=3$.

$e)\ f(x)=-\ln\cos x$ в околі точки $x=0$.

і знайти області збіжності одержаних рядів.

Завдання 15. Розкладіть функцію у ряд Маклорена:

$a)\ f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ і знайдіть суму ряду $1+\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{4}+....+\dfrac{n^2}{2^{n-1}}+...$;

$b)\ f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ і знайдіть $f^{(7)}(0)$;

$c)\ f(x)=x^6e^x$ і знайдіть $f^{(10)}(0)$;

$d)\ f(x)=x^2\sqrt[4]{1+x}$ і знайдіть $f^{(5)}(0)$.

$e)\ f(x)=x^2\sin x$ і знайдіть $f^{(6)}(0)$.

$f)\ f(x)=x^2\cos x$ і знайдіть $f^{(6)}(0)$.

Приклад 26. Розвинути у ряд за степенями $x+2$ функцію $f(x)=\dfrac{1}{4+3x}$.

Розв'язання: Оскільки $\dfrac{1}{4+3x}=\dfrac{1}{-2+3(x+2)}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{3(x+2)}{2}}\ \Rightarrow$

$\dfrac{1}{4+3x}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-y}$, де $y=3\dfrac{x+2}{2}$. Тоді за розкладом 5 (додаток А):

$$\frac{1}{4+3x}=-\frac{1}{2}\left(1+y+\cdots+y^n+\cdots\right)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3(x+2)}{2}+\left(\frac{3(x+2)}{2}\right)^2+\cdots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n\Rightarrow\frac{1}{4+3x}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n.$$

Одержане розвинення вірно для всіх значень $y:|y|<1\Rightarrow$ для знаходження області збіжності знайденого ряду до даної функції необхідно розв'язати нерівність $-1<\dfrac{3(x+2)}{2}<1$. У результаті розв'язання одержимо $x\in\left(-\dfrac{8}{3};-\dfrac{4}{3}\right)-$ область збіжності.

Відповідь: $\dfrac{1}{4+3x}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n(x+2)^n$, $\forall x\in\left(-\dfrac{8}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

4.4. Застосування рядів

4.4.1. Знаходження та обчислення інтегралів.

<u>*Приклад 27.*</u> Знайти інтеграл $\int \frac{\sin 2x}{x}dx.$

<u>*Розв'язання.*</u> Згідно 2 (додаток А) $\sin 2x$ представимо рядом, тоді

$$\int \frac{\sin 2x}{x}dx = \int \frac{1}{x}(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots)dx =$$

$$= \int\left(2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \frac{2^7x^6}{7!} + \cdots\right)dx = 2x - \frac{2^3x^3}{3!\cdot 3} + \frac{2^5x^5}{5!\cdot 5} - \frac{2^7x^7}{7!\cdot 7} + \ldots \Rightarrow$$

<u>*Відповідь:*</u> $\int \frac{\sin 2x}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$

Для наближеного обчислення визначеного інтеграла його представляють у вигляді числового ряду і беруть таке число початкових членів, щоб досягти заданої точності.

<u>*Приклад 28.*</u> Обчислити $\int_0^1 arctg\left(x^2\right)dx$ з точністю $\delta = 10^{-2}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Згідно 10 (додаток А) маємо

$$\int_0^1 arctg\, x^2 dx = \int_0^1\left(x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \cdots\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5\cdot 11} - \right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 11} - \frac{1}{7\cdot 15} + \cdots \approx 0,333 - 0,048 + 0,018 - 0,009 \approx 0,30$$

Взяли перші три члени. Починаючи з четвертого відкинули, тому що сума всіх відкинутих являється знакопереміжним рядом, сума якого, тобто остаточний член R_3, згідно теореми Лейбніца, не перевищує його першого члена. Отже, похибка не перевищує числа 0,009$\Rightarrow$ задана точність витримана.

<u>*Відповідь:*</u> $\int_0^1 arctg\left(x^2\right)dx \approx 0,30$ з точністю $\delta \le 10^{-2}$.

<u>*Завдання 16.*</u> Використовуючи відомі розвинення , знайти:

$$a)\int\sqrt{1+x^5}dx;\ b)\int\frac{\ln(1+x)}{x}dx;\ c)\int\sin\frac{1}{x}dx;\ d)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}};\ e)\int\frac{arctgx}{\sqrt{x}}dx.$$

Завдання 17. Обчислити інтеграли з точністю $\delta = 10^{-3}$:

$$a)\int_0^{0,5} e^{x^2}dx;\quad b)\int_5^{10}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx;$$

$$c)\int_2^3 arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx;\quad d)\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}dx;$$

$$e)\int_1^2\frac{e^x}{x}dx;\quad f)\int_0^{0,25}\sin x^2dx.$$

Завдання 18. Обчислити:

$a)$ площу фігури, обмеженої лінією $y^2 - x^3 = 1,$ віссю ординат та прямою $x = 0,5$ з точністю до 0,001.

$b)$ довжину однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x$ з точністю до 0,001.

Завдання 19. Фігура, обмежена лінією

$$a)\ y = arctgx;$$

$$b)\ y = \ln x;$$

віссю абсцис та прямою $x = 0,5$, обертається навколо осі Ox. Обчислити об’єм тіла обертання з точністю до 0,001.

Завдання 20. Знайти похідну 9-го порядку при $x = 0$ від функції $f(x) = x^4 \sin 2x$ з точністю до 0,001

Завдання 21. Знайти суму ряду

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \quad .$$

4.4.2. Розв’язання диференціальних рівнянь.

Якщо необхідно проінтегрувати диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11}$$

а його розв’язок не виражається через елементарні функції або звичайні способи розв’язання надто громіздкі, то в окремих випадках його розв’язок (частинний чи загальний) можливо знайти у вигляді деякого степеневого ряду. Розглянемо спосіб *послідовного диференціювання,* який застосовується для знаходження частинного розв’язку $y = f(x, C_{10}, C_{20}, \ldots C_{n0})$ рівняння (11), що задовольняє початковим умовам:

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ y\left(x_0\right) = y_0', y''\left(x_0\right) = y_0'',\ \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Якщо в околі своїх початкових умов рівняння (11) задовольняє умовам теореми існування єдиного розв'язку задачі Коши, то можна шукати його частинний розв'язок у вигляді ряду Тейлора.

<u>*Приклад 30.*</u> Знайти частинний розв'язок рівняння $y' + e^y = x^3$, якщо $y(0) = 0$.

<u>*Розв'язання:*</u> Розв'язуємо дане рівняння відносно y', знаходимо $y'', y''', \ldots$ та обчислюємо їх значення у точці $x = 0$:

$$y' = x^3 - e^y, \qquad y'(0) = 0^3 - e^0 = -1,$$

$$y'' = 3x^2 - e^y \cdot y', \qquad y''(0) = 3 \cdot 0^2 - e^0 \cdot (-1) = 1,$$

$$y''' = 6x - (e^y y' \cdot y' + e^y \cdot y'') = 6x - e^y(\ y'^2 + y''\ ); \qquad y'''(0) = 6 \cdot 0 - e^0((-1)^2 + 1) = -2;$$

....

Представляємо шуканий частинний розв'язок даного рівняння рядом Маклорена, так як початкове значення аргумента $x = 0$, тобто рядом

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 \ldots.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = -x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \ldots$.

<u>*Відповідь:*</u> $y = -x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \ldots$.

<u>*Приклад 30.*</u> Застосовуючи спосіб послідовних диференціювань, знайти три члени розвинення у ряд розв'язку рівняння $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

<u>*Розв'язання.*</u> Початкова умова $x = 1$ дозволяє представити функцію - розв'язок рядом Тейлора в околі точки $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 \ldots.$$

Диференціюємо та обчислюємо значення похідних:

$$y'' = y'y^{-1} - x^{-1} \Rightarrow y''(1) = y'(1)\,y^{-1}(1) - 1^{-1} = 0 \cdot 1 - 1^{-1} = -1,$$

$$y''' = y''y^{-1} - y'^2 y^{-2} + x^{-2} \Rightarrow y'''(1) = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 + 1 = 0,$$

$$y^{IV}=y'''y^{-1}-3y'y''y^{-2}+2y'^3y^{-3}-2x^{-3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{IV}=0\cdot1-3\cdot0\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot1-2\cdot1=-2.$$

<u>*Відповідь:*</u> частинний розв'язок $y=1-\dfrac{(x-1)^2}{2!}-\dfrac{2(x-1)^4}{4!}+\ldots$.

Зауважимо, що спосіб послідовного диференціювання у загальному випадку не дає можливості дослідити одержаний ряд на збіжність до розв'язку, тому що у багатьох випадках неможливо знайти аналітичний вираз для загального члена шуканого ряду. Однак, цей спосіб застосовується, коли відомо,що розв'язок рівняння у вигляді ряду існує. Особливо часто застосовується цей спосіб в інженерній практиці ,у дослідницьких роботах, де розв'язок може бути перевірений експериментально.

<u>*Завдання 22.*</u> Застосовуючи спосіб послідовних диференціювань, знайти вказане число членів розвинення у ряд розв'язків слідуючих диференціальних рівнянь за заданих початкових умов:

$a)\, y'=2x+\cos y;\ y(0)=0$ (шість членів);

$b)\ \ y'=xy+\ln(y+x);\ y(1)=0$ (п'ять членів);

$c)\ \ y'=\dfrac{1-x^2}{y}+1,\ y(0)=1$ (п'ять членів);

$d)\, y'=x+\dfrac{1}{y};\ y(0)=1$ (п'ять членів);

$e)\ \ y'+y\cos x-3e^x y^2-\sin x=0;\ y(0)=1$ (чотири члени);

$f)\ \ y''=y\cos y'+x;\ y(0)=1,\ y'(0)=\pi/3$ (п'ять членів);

$g)\, y''=x^2+y^2;\ \ y(-1)=2,\ y'(-1)=0,5$ (сім членів);

$h)\ \ y''=e^y\sin y';\ y(\pi)=1,\ y'(\pi)=\pi/2$ (п'ять членів).

4.4.3. Наближені обчислення значень функцій.

При наближеному обчисленні значень функції у точці x_0 записують розвинення функції у ряд Маклорена, якщо $x_0=0$ і в ряд Тейлора, якщо $x_0\neq0$. В одержаному розвиненні замість x підставляємо x_0. Потім для обчислення $f(x_0)$ з необхідною точністю беремо необхідне число його початкових членів. Зауважимо:

1. При обчисленні довільних степенів e користуються наближеною формулою

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

допускаючи при цьому похибку R_n, яка при $|x| < n+1$ оцінюється нерівністю $|R_n| < \dfrac{|x|^{n+1}}{n!\left(n+1-|x|\right)}$.

При $x \le 0$ можна користуватися більш простою оцінкою $|R_n| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. При обчисленні значень синуса та косинуса користуються наближеними формулами

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!},$$

похибка $\left|R_{2n-1}(x)\right| = \left|R_{2n}(x)\right| \le \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

похибка $\left|R_{2n}(x)\right| = \left|R_{2n+1}(x)\right| \le \dfrac{|x|^{2n+21}}{(2n+2)!}$.

3. Для обчислення логарифмів чисел можна користуватися рядом

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right),\ \left(|x| < 1\right)\ ,$$

похибка $|R_n| < \left|\dfrac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|$.

4. При обчисленні коренів $k-$го степеня із числа $A > 0$ число A записують так:

$A = a^k + y$ (a^k-число близьке до A, із нього добувається точний корінь $k-$го степеня і таке, що $\left|\dfrac{y}{a^k}\right| < 1$), тоді

$$\sqrt[k]{A} = a\ \sqrt[k]{1 + y / a^k} = a(1 + y / a^k)^{1/k}. \tag{12}$$

Одержану функцію представляють біноміальним рядом 4 (додаток А) і беруть необхідне число початкових членів.

<u>*Приклад 31.*</u> Обчислити $\sqrt[5]{e}$ з точністю до $0,0001$.

<u>*Розв'язання:*</u> Так як $\sqrt[5]{e} = e^{1/5}$, то в розвиненні функції e^x беремо

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow e^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2 \cdot 2!} + \frac{1}{5^3 \cdot 3!} + \frac{1}{5^4 \cdot 4!} + \ldots$$

Якщо взяти чотири члени цього ряду $(n = 3)$, то похибка обчислень не буде перевищувати 0,0001. Дійсно

$$R_3 < \frac{x^{3+1}}{3!\ \left(3 + 1 - |x|\right)} = \frac{1}{5^4 \cdot\ 3!\ \left(4 - \frac{1}{5}\right)} \approx 0,00007 < 0,0001.$$

<u>*Відповідь:*</u> $e^{1/5} \approx 1,2213$ з точністю до $0,0001$.

<u>*Приклад 32.*</u> Обчислити $\sin 18^\circ$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Застосуємо розвинення 2 (Додаток А), перейшовши до радіанної міри кута $\left(18^\circ = \dfrac{\pi}{10}\right)$, знайдемо

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \cdots \Rightarrow$$

$$\sin 18^\circ \approx 0{,}31416 - 0{,}00517 + 0{,}00003 - \ldots \approx 0{,}3090.$$

Оскільки синус представлений знакопереміжним рядом, то похибка не більше першого із відкинутих членів ряду (згідно теореми Лейбніца), третій член ряду можна відкинути і похибка при цьому не перевищить $0,00003$ а значить задана точність буде витримана.

<u>*Відповідь:*</u> $\sin 18^\circ \approx 0{,}3090$ з точністю $\delta < 10^{-4}$.

<u>*Приклад 33.*</u> Обчислити $\sqrt[10]{1040}$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Застосуємо розвинення 4 (Додаток А) і формулу (12):

$$\sqrt[10]{1040} = \sqrt[10]{1024 + 16} = \sqrt[10]{1024\ \left(1\ +\ \frac{16}{1024}\right)} = 2\ \left(1 + \frac{1}{2^6}\right)^{\frac{1}{10}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^6} - \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2^{12}} + \cdots\right) = 2 + \frac{1}{320} - \frac{9}{10^2 \cdot 2^{11}} + \cdots \approx 2 + \frac{1}{320}$$

Щоб досягти задану точність, ми відкидаємо третій і усі послідуючі члени, так як згідно теореми Лейбніца остаточний член ряду, тобто похибка, не перевищує першого із відкинутих членів ряду. Ми ж бачимо, $\frac{9}{10^2 \cdot 2^{11}} < 10^{-4}$.

<u>*Відповідь:*</u> $\sqrt[10]{1040} \approx 2\frac{1}{320}$ з точністю $\delta < 10^{-4}$.

<u>*Приклад 33.*</u> Обчислити наближено $\ln 2$ з точністю $\delta < 10^{-3}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Застосуємо розвинення 9 (Додаток А) ,тобто

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

У нашому випадку $\frac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow 1 + x = 2 - 2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Тоді

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \frac{1}{3^7 \cdot 7} + \cdots\right)$$

Задану похибку забезпечують чотири члени, так як для оцінки похибки маємо нерівність $|R_n| < \left|\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|$, із якої при $n = 4$ і $x = \frac{1}{3}$ одержуємо $|R_4| < \frac{2 \cdot 9}{3^9 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{3^9 \cdot 4} < 10^{-4}$. Таким чином, з точністю $\delta < 10^{-3}$ можна стверджувати $\ln 2 \approx \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{405} + \frac{1}{5103}) \approx 0{,}6931$.

<u>*Відповідь:*</u> $\ln 2 \approx 0{,}6931$ з точністю до $\delta < 10^{-3}$.

<u>*Завдання 23.*</u> Обчислити наближено із точністю $\delta = 10^{-3}$:

$$a)\sqrt{e};\ b)\frac{1}{e};\ c)\frac{1}{\sqrt{e}};\ d)\sqrt[5]{e};\ e)e^2;\ f)\frac{1}{\sqrt[3]{e}};\ g)e;\ h)\sin 1;\ i)\cos 1^\circ;$$

$$j)\sin\frac{\pi}{3};\ k)\arcsin(0{,}5);\ l)arctg\frac{\pi}{10};\ m)\cos\frac{\pi}{10};\ n)\sqrt{16{,}64};\ o)\frac{1}{\sqrt[6]{738}};$$

$$p)\sqrt[3]{27{,}81};\ q)\sqrt[-7]{136}; r)\ln 3;\ s)\lg 7;\ t)\ln 10.$$

<u>*Завдання 22.*</u> Указати похибки наближених формул:

$$a)\sin x \approx x;\ b)e^x \approx 1 + x;\ c)\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

4.5. Тригонометричні ряди Фур’є.

Якщо 2π періодичну функцію $f\left(x\right)$ можна розвинути у тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{13}$$

то коефіцієнти цього ряду знаходяться за формулами

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx. \tag{14}$$

O_{15}. *Рядом Фур’є* 2π періодичної функції $f(x)$ називається функціональний ряд (13), незалежно від того збігається він до $f\left(x\right)$ чи ні, коефіцієнти якого знаходяться за формулами (14).

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

O_{16}. *Коефіцієнтами Фур’є* 2π періодичної функції $f(x)$ називаються коефіцієнти a_n, b_n які визначаються формулами (14).

Формально для всякої функції, що інтегрується на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$, можна скласти ряд Фур’є. Але не завжди між функцією і цим рядом можна поставити знак рівності. Слідуюча теорема дає достатню умову для розвинення функції в ряд Фур’є.

Теорема 10. (теорема Діріхле) Якщо періодична функція $f(x)$ має період $T=2\pi$ і на кожному скінченому інтервалі вона і її похідна мають скінчене число точок розриву, і притому тільки першого роду, або являється кусочно-монотонною, то в кожній точці неперервності функція $f\left(x\right)$ допускає розвинення у ряд Фур’є, причому цей ряд збігається у кожній точці x_n розриву функції $f\left(x\right)$ до середнього арифметичного правої і лівої границь функції $f(x)$ у точці x_n, тобто до числа $\dfrac{f\left(x_n-0\right)+f\left(x_n+0\right)}{2}$.

Розглянемо окремі випадки розвинення функції у ряд Фур’є.

1. Якщо $f\left(x\right)-$ парна функція: $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, то функція $f\left(x\right)\cos nx$ буде також парною, а функція $f\left(x\right)\sin nx-$ непарною. Тоді маємо:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \qquad (15)$$

Розвинення функції у ряд Фур'є при цьому матиме вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (16)$$

2. Якщо $f(x) -$ непарна функція: $f(-x) = -f(x)$, то функція $f(x)\cos nx$ буде також непарною, а функція $f(x)\sin nx -$ парною. Значить,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (17)$$

тому розвинення матиме вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (18)$$

Якщо функція $f(x)$ періодична і має своїм періодом число $T = 2l$ та задовольняє умовам теореми Діріхле , то в кожній точці неперервності її можна розвинути у ряд Фур'є на відрізку $[-l; l]$. Це розвинення матиме вигляд :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (19)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx \; ;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx \; . \qquad (20)$$

Якщо $f(x) -$ парна функція, то $b_n = 0$, а $a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx$ і

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (21)$$

Якщо $f\left(x\right)-$ непарна функція, то $a_n = 0$, а $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ і

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (22)$$

Приклад 35. Розвинути у ряд Фур'є на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi + x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Розв'язання: Неважко переконатися у тому, що дана функція задовольняє усім умовам теореми Діріхле. Отже, її можна розвинути у ряд Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\pi dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\pi + x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x dx = \frac{5\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{\left(-1\right)^n - 1}{\pi n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}.$$

Підставимо коефіцієнти у розклад $f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$,

одержимо необхідне розвинення.

Відповідь: $f\left(x\right) = \frac{5\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{\left(-1\right)^n}{n}\sin nx\right).$

Завдання 24. Розвинути у ряд Фур'є:

$a)$ функцію $f\left(x\right) = x$ на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$.

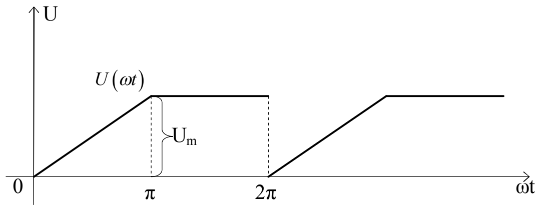
$b)$ функцію $f\left(x\right) = x^2$ на інтервалі $\left(0;\pi\right)$ по синусам.

Завдання 25. Користуючись розвиненням функції $f(x)=x^2$ у ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$. Знайти суми рядів:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Функцію задану на інтервалі $(0;l)$ можна продовжити на інтервал $(-l;0)$ парним чином, і розвинути її у ряд Фур'є за косинусами; також можна продовжити задану функцію на інтервал $(-l;0)$ непарним чином і розвинути її у ряд Фур'є за синусами.

Приклад 36. Для кривої напруги випрямлення $U(\omega t)$



знайти діючу напругу шляхом безпосереднього інтегрування. Порівняти знайдений результат з розрахунком за гармоніками Фур'є, враховуючи:

$a)$ перший член ряду; $b)$ перші чотири члени ряду.

Розв'язання:

Бачимо, що криву напруги випрямлення можна в аналітичному виді записати так: $U(\omega t)=\begin{cases}\dfrac{U_m}{\pi}\omega t, & 0\le\omega t<\pi;\\ U_m, & \pi\le\omega t<2\pi.\end{cases}$

Відомо, що при аналізі електричних кіл з несинусоїдальними напругами мають справу з діючими значеннями $U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+...+U_n^2}$, де U_k – діюче значення k – ої гармоніки і $U_k=\dfrac{U_{km}}{\sqrt{2}}$, $k=1,2,\ldots$

Розклад у ряд Фур'є дозволяє замінити (на основі принципу суперпозиції) реальне джерело несинусоїдальної напруги сукупністю послідовно включених джерел.

Знайдемо розклад у ряд Фур'є, тобто

$$U(\omega t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right),\ a_n,b_n-?$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(v)\,dv = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{U_m}{\pi}v\,dv + \int_{\pi}^{2\pi} U_m\,dv\right) = \frac{U_m}{\pi}\left(\left.\frac{v^2}{2\pi}\right|_0^{\pi} + \left.v\right|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \frac{3}{2}U_m \Rightarrow a_0 = \frac{3}{2}U_m.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(v)\cos nv\,dv = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{U_m}{\pi}v\cos nv\,dv + \int_{\pi}^{2\pi} U_m\cos nv\,dv\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} \int u\,dp = up - \int p\,du & \\ u = v & dp = \cos nv\,dv \\ du = dv & p = \dfrac{\sin nv}{n}\end{matrix}\right| = \frac{U_m}{\pi}\left(\left.\frac{v\sin nv}{\pi n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nv}{\pi n}dv + \left.\frac{\sin nv}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left(0 + \left.\frac{\cos nv}{\pi n^2}\right|_0^{\pi} + 0\right) = \frac{U_m}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi n - \cos 0}{n^2}\right) = \frac{U_m}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{U_m}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(v)\sin nv\,dv = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{U_m}{\pi}v\sin nv\,dv + \int_{\pi}^{2\pi} U_m\sin nv\,dv\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} \int u\,dp = up - \int p\,du & \\ u = v & dp = \sin nv\,dv \\ du = dv & p = \dfrac{-\cos nv}{n}\end{matrix}\right| = \frac{U_m}{\pi}\left(\left.\frac{-v\cos nv}{\pi n}\right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nv}{\pi n}dv - \left.\frac{\cos nv}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{n} + 0 + \left.\frac{\sin nv}{n^2}\right|_0^{\pi} - \frac{\cos 2\pi n}{n} + \frac{\cos\pi n}{n}\right) =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left(\cancel{\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}} - \frac{1}{n} + \cancel{\frac{\pi(-1)^n}{n}}\right) = -\frac{U_m}{\pi n} \Rightarrow$$

$$b_n = -\frac{U_m}{\pi n}.$$

Отже, розклад у ряд Фур'є даної кривої напруги випрямлення $U(\omega t)$

$$U(\omega t) = U_m\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos n\omega t - \frac{\sin n\omega t}{n}\right)\right) \Rightarrow .$$

$$U(\omega t) = U_m\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\omega t - \frac{1}{\pi}\sin\omega t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\omega t - ...\right)$$

Знайдемо діючу і середню напругу безпосереднім інтегруванням:

$$U_д = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^2(\omega t)\,d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{U_m}{\pi}v\right)^2 dv + \int_{\pi}^{2\pi}(U_m)^2\,dv\right)} =$$

$$= U_m\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\frac{v^3}{3}\Big|_0^{\pi} + v\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)} = U_m\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = U_m\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$U_{ср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega t)\,d\omega t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{U_m}{\pi}v\,dv + \int_{\pi}^{2\pi} U_m\,dv\right) =$$

$$= U_m\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{v^2}{2}\Big|_0^{\pi} + v\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = U_m\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = U_m\frac{3}{4}.$$

Враховуючи тільки перший член розвинення у ряд Фур'є, оцінимо похибку

$$U_д \approx U_1 = U_m\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = U_m\frac{3}{4}$$

$$\delta_1 = \frac{U_д - U_1}{U_д}\cdot 100\% = \frac{U_m\sqrt{\frac{2}{3}} - U_m\frac{3}{4}}{U_m\sqrt{\frac{2}{3}}}\cdot 100\% \approx \frac{0,816 - 0,75}{0,816}\cdot 100\% \approx 8,09\%$$

Враховуючи чотири перших член розвинення у ряд Фур'є, оцінимо похибку

$$U_д \approx U_4 = U_m\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{\pi^2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\right)^2} \approx U_m 0,804$$

$$\delta_4 = \frac{U_д - U_4}{U_д}\cdot 100\% = \frac{U_m 0,816 - U_m 0,804}{U_m 0,816}\cdot 100\% \approx 1,47\% .$$

Отримана відносна похибка δ_4 є допустимою при інженерних розрахунках. Таким чином, наступні члени розкладу у ряд Фур'є можна не враховувати.

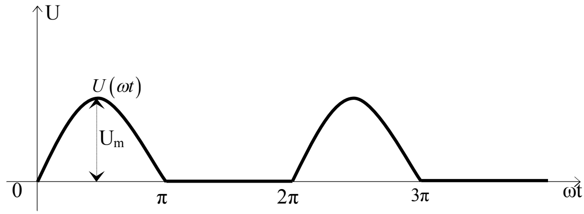
Відповідь:

$$U(\omega t) \approx U_m\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\omega t - \frac{1}{\pi}\sin\omega t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\omega t\right)$$

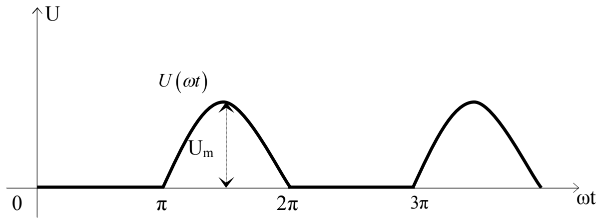
$$U_д = U_m\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\; U_д \approx U_1 = U_m\frac{3}{4},\; \delta_1 \approx 8{,}09\%\,;$$

$$U_д \approx U_m 0{,}804\,,\; \delta_4 \approx 1{,}47\%\,.$$

Завдання 26. Для кривої напруги однопівперіодного випрямлення $a)$ $U(\omega t) = U_m \sin\omega t$



$b)$ $U(\omega t) = -U_m \sin\omega t$



знайти діючу напругу шляхом безпосереднього інтегрування. Порівняти знайдений результат з розрахунком за гармоніками Фур'є, враховуючи:

$a)$ перший член ряду;

$b)$ перші чотири члени ряду.

5. ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛИ ЗАГАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

При знаходженні найпростішої формули загального члена ряду або формули S_n доводиться знаходити загальний член числової послідовності.

1. Якщо члени послідовності є членами арифметичної чи геометричної прогресій, то використовуємо відомі формули із розділу "Прогресії" шкільного курсу алгебри.

<u>*Приклад 37.*</u> Знайти загальний член і *n-у* суму ряду.

<u>*Розв'язання:*</u> Члени ряду утворюють числову послідовність 1,3,5,7,9,..., що є арифметичною прогресією, так як кожен її член, починаючи з другого, більше попереднього на одне і те ж число. Перший член прогресії $a_1 = 1, \textit{різниця } d = 2 \Rightarrow \quad a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1)$, а часткову суму $S_n = 1+3+5+7+\cdots+a_n$ знаходимо за формулою: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$ Маємо: $S_n = \dfrac{1+1+2(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{2+2n-2}{2} \cdot n = n^2$.

<u>*Відповідь:*</u> $a_n = 1 + 2(n-1),\ S_n = n^2.$

<u>*Приклад 38*</u>. Знайти суму ряду $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{147} + \dfrac{1}{1029} + \cdots$.

<u>*Розв'язання:*</u> Члени ряду утворюють послідовність, що являється геометричною прогресією, так як кожен її член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те ж число. Перший член прогресії $b_1 = \dfrac{1}{3}$, знаменник $q = \dfrac{1}{7}$. Знайдемо *n-у* часткову суму ряду за формулою суми *n* членів геометричної прогресії: $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Маємо $S_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{7}} = \dfrac{7}{18}\left(1-\dfrac{1}{7^n}\right)$. Тоді сума ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{18}\left(1-\frac{1}{7^n}\right) = \frac{7}{18}(1-0) = \frac{7}{18}.$$

<u>*Відповідь*</u>: $\dfrac{7}{18}$.

2. Якщо загальний член ряду має вигляд $\frac{1}{n(n+k)}$, то, знаходячи *n-у* часткову суму, застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

<u>*Приклад 39*</u>. Знайти *n-у* часткову суму ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots.$$

<u>*Розв'язання:*</u> Розкладемо загальний член послідовності $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ на найпростіші дроби за допомогою методу невизначених коефіцієнтів: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$, *A,B*-невизначені коефіцієнти.

Початковий та отриманий дроби рівні, їхні знаменники рівні $\Rightarrow$ чисельники тотожно рівні, тобто $(A+B)n+A\equiv 1$ (тотожність-рівність,яка являється вірною за любих допустимих значень змінних).

Нехай $n=0\Rightarrow A=1; n=1\Rightarrow B=-1$ *і* $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Тоді

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

<u>*Відповідь*</u>: $S_n=\frac{n}{n+1}$.

Корисно знати, що $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$ (одержано за допомогою вище згаданого методу).

3. Для знаходження загального члена числової послідовності у деяких випадках можна використовувати принцип математичної індукції, який полягає у наступному:

твердження $A(n)$ справедливе для будь-якого $n\in N$, якщо:

1) воно справедливе для перших допустимих значень *n*;

2) із припущення справедливості твердження для $n=k$ випливає його справедливість для $n=k+1$.

Приклад 40. Знайти *n-у* часткову суму послідовності $1,4,18,96,...,n\cdot n!,...$.

Розв'язання:
$$S_1 = 1 = 2!-1,$$
$$S_2 = 1+4 = 5 = 3!-1,$$
$$S_3 = 1+4+18 = 23 = 4!-1,$$
$$S_4 = 23+96 = 119 = 5!-1 \text{ і т. д.}$$

Виникає гіпотеза : $S_n = (n+1)!-1$, яка і буде твердженням *A(n).*

1) Як видно з наведених вище міркувань, твердження *A(n)* справедливе для перших чотирьох натуральних значень n .

2) Нехай твердження правильне для $n = k$, тобто $S_k = (k+1)!-1$. Виходячи з цього припущення, перевіримо його справедливість для $n = k+1$, тобто перевіримо справедливість твердження $S_{k+1} = (k+2)!-1$. Справді,

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = (k+1)!-1+(k+1)!\cdot(k+1) = (k+1)!(k+1+1)-1 \Rightarrow$$
$$S_{k+1} = (k+2)!-1.$$

Отже, твердження правильне для будь-якого $n \in N$ і $S_n = (n+1)!-1$.

Відповідь: $S_n = (n+1)!-1$.

4. Найпростішу формулу загального члена можна знаходити, використовуючи метод скінчених різниць, суть якого полягає у слідуючому:

- записуємо послідовність різниць між кожним членом, починаючи з другого, і попереднім членом даної послідовності;
- записуємо послідовність різниць між кожним членом, починаючи з другого, і попереднім членом одержаної послідовності і т.д.

Якщо приходимо до послідовності, всі члени якої рівні між собою, а число послідовностей різниць дорівнює *к,* то загальний член даної послідовності являється многочленом *к*-го степеня відносно *n,* тобто має вигляд:

$$u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k .$$

Приклад 41. Знайти найпростішу формулу загального члена ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{35}+\frac{1}{76}+\cdots$$

Розв'язання: Чисельник кожного члена ряду дорівнює 1, а знаменники утворюють послідовність 1, 2, 4, 13, 35, 76, ... Запишемо послідовності різниць:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 9 & & 22 & & 41 & \ldots \\ & 1 & & 7 & & 13 & & 19 & \ldots \\ & & 6 & & 6 & & 6 & \ldots \end{array}$$

Отримали *три* послідовності різниць. Отже, загальний член послідовності знаменників являється многочленом *третього* степеня відносно n, тобто

$u_n = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3$, де $a_0, a_1, a_2, a_3 -$ невизначені коефіцієнти, які треба знайти. Підставляючи у формулу $u_n = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3$ замість n числа 0, 1, 2, 3, одержимо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u_0 = a_0 0^3 + a_1 0^2 + a_2 0 + a_3 = 1; \\ u_1 = a_0 1^3 + a_1 1^2 + a_2 1 + a_3 = 2; \\ u_2 = a_0 2^3 + a_1 2^2 + a_2 2 + a_3 = 4; \\ u_3 = a_0 3^3 + a_1 3^2 + a_2 3 + a_3 = 13. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 1; \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1; \\ 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 = 3; \\ 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 = 12. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_3 = 1; \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1; \\ 4a_0 + 2a_1 + a_2 = \dfrac{3}{2}; \\ 9a_0 + 3a_1 + a_2 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 1; \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1; \\ 3a_0 + a_1 = \dfrac{1}{2}; \\ 4a_0 + a_1 = \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 1; \\ a_2 = \dfrac{5}{2}; \\ a_1 = -\dfrac{5}{2}; \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Підставимо коефіцієнти у формулу загального члена і одержимо $u_n = \dfrac{2n^3 - 5n^2 + 5n + 2}{2}$. Тоді загальний член ряду легко запишеться.

<u>*Відповідь*</u>: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2}{2n^3 - 5n^2 + 5n + 2}$

<u>*Завдання 27*</u>: Знайти загальний член ряду

$a)\ 1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{15}{18} + \dfrac{25}{15} + \dfrac{36}{26} + \ldots..;$ $\quad b)\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} - \dfrac{4}{81} + \cdots;$

$c)\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{9}{15} + \dfrac{27}{24} + \ldots;$ $\quad d)\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{24} + \dfrac{5}{60} - \dfrac{7}{120} + \cdots$

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Записати перші шість членів ряду та перевірити виконання необхідної ознаки збіжності. Зробити висновок відносно збіжності ряду.

№зп	а)	б)	№зп	а)	б)
1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2^n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2 2^n}$	2.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{7n-6}}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{n-2}}$	4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi/6}{2n+9}$
5.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{3^n+1}$	6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\ln(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n+5}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+n}$	8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n+61}{4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{(n+2)!}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3^{2n}-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n}$	10.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3n+2}$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n+2}$	12.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-3}{\ln(n+1)}$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n2^n}$	14.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{6n^2+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi/2\right)}{5n-7}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$	16.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{7n^3-3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{7n+9}}$
17.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$	18.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7}{n(n+2)}$
19.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{n}$	20.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+29n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{7n(n+82)}$
21.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)\cdot 5^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+16}{15n+97}$	22.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100n-17}{n!2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{n+107}$
23.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{n^2+7n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-7}{n(n+8)}$	24.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{17^5}{n^2+2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13n^2}{99n(n+2)}$

№зп	а)	б)	№зп	а)	б)
25.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-7}{3n+9}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{20n+9}$	26.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3n-2}$
27.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n+4}}$	28.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{n^2+5}$
29.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{35n-16}{15n+17}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$	30.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{7n^{n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-7n}{n+1}$

2. Дослідити числовий ряд на збіжність використовуючи ознаку:
а) порівняння; б) Даламбера чи Коші; в) інтегральну ознаку Коші.

№зп	а)	б)	в)
1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2}}$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{2^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+3}$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n2n^{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n}}$
8.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

№зп	а)	б)	в)
9.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n+1}}{5^{2n-1}}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$
10.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n}+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{n^{3}-7}$
11.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n3^{n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n}}{n^{2}+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^{\frac{4}{3}}}$
12.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)3^{n}}{n!}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}n}$
13.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n^{2}+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{4}+1}$
14.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^{3}-2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{2}+3}$
15.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!3^{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$
16.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{2n+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n}(n+1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$
17.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\sqrt[3]{n}}$
18.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n}}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^{2}+3}$
19.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{2^{n}+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^{2}-1}$
20.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5}+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{5}n}$
21.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(n+1)2^{n+3}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n}}{n^{2}+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^{2}}}$

№зп	а)	б)	в)
22.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+8)}{n^2+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+5)4^n}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)}$
23.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+9}$
24.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt[5]{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2+16}$
25.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+9}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2n+5}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{n\ln^4 n}$
26.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^3}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{4^{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3-5}$
27.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2^n(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n}{n^4+9}$
28.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}}$
29.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-n}}{n+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4-2}$
30.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^4-7}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+9}$

3. Дослідити на збіжність ряди за допомогою достатніх ознак.

Ознаки	Даламбера	Порівняння	Інтегральна Коши	Радикальна Коши
	3.1	3.2	3.3	3.4
а)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n^2+kn}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)\cdot k^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}+7k}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+k}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{k^n}$
б)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+kn}{(n+k)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2+kn}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{-k}(kn+6)}{kn+6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{kn-7}{2kn-3}\right)^{2n}$
в)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+kn}{(n+k)(n+3k)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{k}{5n}$	Примітка: тут і на далі $k-$ номер вашого варіанту.	

4. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи означення збіжності, та знайти їх суми у випадку збіжності

а)	б)	в)
$\sum_{n=1}^{\infty} k^{-n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(2k+1)n+k^2+k}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (3k-2)^{-n}$

5. Дослідити ряди на збіжність

№зп	а)	б)
1.	$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{n} (-1)^n \frac{n^2}{2n^3+7n}$
2.	$\frac{1}{5}-\frac{2}{25}+\frac{3}{125}-\frac{4}{625}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n(n+5)}$
3.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{(n+1)(n+4)}$
4.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-7}{(n+9)(n+4)}$
5.	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{(n+9)(n+3)}$
6.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-7}{n\ln(n+1)}$
7.	$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+7}$
8.	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
9.	$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$
10.	$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n-9}$
11.	$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}$

№зп	а)	б)
12.	$\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+21}{n\ln(n+2)}$
13.	$-\frac{11}{3}+\frac{12}{4}-\frac{13}{5}+\frac{14}{6}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+2)}$
14.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\cdot 5^n}$
15.	$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+19)(n^2-6)}$
16.	$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{8}-\frac{4}{11}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n\ln(n+3)}$
17.	$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}-\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+7}$
18.	$-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\frac{8}{125}+\frac{16}{625}-\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+7n}$
19.	$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+5)\cdot 7^n}$
20.	$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{4}{17}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot 8^n}$
21.	$\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+17)(n+3)}$
22.	$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{n!}$
23.	$\frac{1}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 5}+\frac{3}{\ln 10}-\frac{4}{\ln 17}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7^n}$
24.	$\frac{2}{7}-\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2(n+3)}$
25.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+3)\cdot 8^n}$

№зп	а)	б)
26.	$1-\frac{5}{2}+\frac{10}{3}-\frac{15}{4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+15)(n+1)}$
27.	$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{6^n}$
28.	$\frac{1}{2}-\frac{4}{4}+\frac{7}{8}-\frac{10}{16}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n^3+5n}$
29.	$\frac{1}{3}-\frac{2}{6}+\frac{4}{9}-\frac{16}{12}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(\ln n+1)}$
30.	$\frac{1}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 7}+\frac{9}{\ln 11}-\frac{27}{\ln 15}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^3(n+1)}$

6. Задано загальний елемент $u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ ряду $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$.

Встановити область збіжності степеневого ряду.

№зп	$u_n(x)$	№зп	$u_n(x)$
1.	$\frac{n+3}{2n^3+4}(x-3)^n$	2.	$\frac{2^n}{n^2+8}(x+1)^n$
3.	$\frac{2n^2+1}{3n^2-4}(x+5)^n$	4.	$\frac{2n-8}{n^2+4}(x+4)^n$
5.	$\frac{n^2-2}{5^{n-1}}(x-5)^n$	6.	$\frac{(x-1)^n}{3^n(n+1)}$
7.	$\frac{n+4}{n^3-2}(x+1)^n$	8.	$\frac{(x-4)^n}{2^n(n+4)}$
9.	$\frac{3^n(x-2)^n}{n+2}$	10.	$\frac{2^n}{n+3}(x+3)^n$
11.	$\frac{n+4}{2n^2-1}(x+3)^n$	12.	$\frac{(x+1)^n}{(n+1)(n+2)}$
13.	$(n^2+1)3^{-n+1}(x+5)^n$	14.	$3^n n^{-1}(x-5)^n$

№зп	$u_n(x)$	№зп	$u_n(x)$
15.	$\frac{(x+7)^n}{3^{n-1}(2n-3)}$	16.	$\frac{n+3}{2n+1}(x-1)^n$
17.	$\frac{n+1}{2n^2+1}(x-2)^n$	18.	$\frac{(x+2)^n}{2^n(n+3)}$
19.	$\frac{n(x+2)^n}{3^n(n^2-8)}$	20.	$\frac{n-2}{2^{n-1}}(x-4)^n$
21.	$\frac{x^n}{(3n-1)(2n+3)}$	22.	$\frac{(x+4)^n}{2^n(3n+1)}$
23.	$\frac{n+1}{n^3+2}(x+1)^n$	24.	$\frac{3^n}{n^2+4}(x-2)^n$
25.	$\frac{3n^2+1}{5n^2-2}(x+4)^n$	26.	$\frac{2n+1}{n^2+4}(x-4)^n$
27.	$\frac{3^n(x+2)^n}{n+1}$	28.	$\frac{(x+1)^n}{4^n(n+3)}$
29.	$\frac{n+3}{n^3-5}(x-2)^n$	30.	$\frac{(x+4)^n}{2^{n+1}(n+3)}$

7. Обчислити радіус збіжності та записати інтервал збіжності функціональних рядів; дослідити ряди на збіжність на кінцях інтервалу та записати області їх збіжності.

а)	б)	в)
$(x+k)^2+(x+k)^4+(x+k)^6+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty} k!\,x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!\,x^n}$

8. Розвинути у ряд Маклорена дані функції, користуючись відомими стандартними розвиненнями:

а)	б)	в)	г)	д)
$y=e^{kx}$	$y=\cos kx$	$y=\sin x^k$	$y=\frac{\sin x^2}{kx}$	$y=x^k\ln\frac{1+x}{1-x}$

9. Використовуючи означення ряду Тейлора, розвинути в ряд функцію

№зп	функція	точка	№зп	функція	точка
9.1.	$y=\sqrt[k+2]{k+x}$	$x_0=1-k$	9.3.	$y=\sin\dfrac{\pi x}{2k}$	$x_0=k$
9.2.	$y=\ln(x-k)$	$x_0=k+1$	9.4.	$y=k^x$	$x_0=0$

10. Використовуючи три доданки ряду Маклорена функції, наближено обчислити такі значення функції, вкажіть похибку обчислень:

№зп	$f(x_0)$	№зп	$f(x_0)$	№зп	$f(x_0)$
1.	$\ln(1,1)$.	2.	$arctg(0,5)$.	3.	$\sqrt[10]{1040}$
4.	$\sqrt{1,4}$.	5.	$\cos(9^0)$.	6.	$e^{0,1}$
7.	$e^{-0,4}$.	8.	$e^{-1,2}$.	9.	$\sqrt[7]{130}$
10.	$arctg(0,2)$.	11.	$\ln(1,4)$.	12.	$\sin 36^0$
13.	$\sin(10^0)$.	14.	$\sqrt[5]{1,1}$.	15.	$e^{-0,5}$
16.	$e^{-0,7}$.	17.	$\ln(1,6)$.	18.	$\arcsin 0.7$
19.	$arctg(0,4)$.	20.	$\sqrt[4]{12}$.	21.	$\sqrt[7]{144}$
22.	$\cos(15^0)$.	23.	$e^{-0,8}$.	24.	$\ln(5)$
25.	$\sqrt[3]{1,5}$.	26.	$arctg(0,3)$.	27.	$\sqrt[5]{3750}$
28.	$\ln(3)$	29.	$\sin(15^0)$.	30.	$\arcsin 0,3$

11. Обчислити інтеграл $\int_0^b f(x)\,dx$ з точністю $\varepsilon<0,01$.

№зп	$f(x)$	b	№зп	$f(x)$	b
1.	$\sqrt{1+3x^2}$	0,2	2.	$\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2}$	0,1
3.	$\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$	0,1	4.	$\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$	0,2
5.	$\dfrac{arctg\,2x}{x}$	0,4	6.	$\dfrac{\cos 2x-1}{x^2}$	0,1

№зп	$f(x)$	b	№зп	$f(x)$	b
7.	$\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$	0,5	8.	$\dfrac{arctgx-x}{x}$	0,4
9.	$\dfrac{x}{1+x^3}$	0,2	10.	$\dfrac{x+1}{1+x^4}$	0,5
11.	$\dfrac{e^{0,2x}-1}{x}$	0,1	12.	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	0,1
13.	$\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$	0,4	14.	$\dfrac{1-\cos x}{x^2}$	0,4
15.	$\dfrac{\cos x^2-1}{x^2}$	0,5	16.	$\dfrac{arctgx^2-x^2}{x}$	0,5
17.	$\dfrac{arctgx-x}{x^2}$	0,2	18.	$\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$	0,2
19.	$\dfrac{\sin x-x}{x}$	0,1	20.	$arcctgx^2$	0,1
21.	$x\ln(1+3x)$	1	22.	$\sqrt[4]{1+x^2}$	1
23.	$\sin x^2$	0,6	24.	$xarcctgx^3$	1
25.	$\dfrac{\sin x}{x}$	1	26.	$\dfrac{1}{x^2}arcctgx^2$	0,1
27.	$\ln\left(1+\dfrac{x}{10}\right)$	0,5	28.	$\ln(1+2x)$	0,9
29.	$\dfrac{arctgx^4}{x^3}$	1	30.	$\sqrt[5]{1+x^2}$	0,2

12. Розв'язати диференціальне рівняння

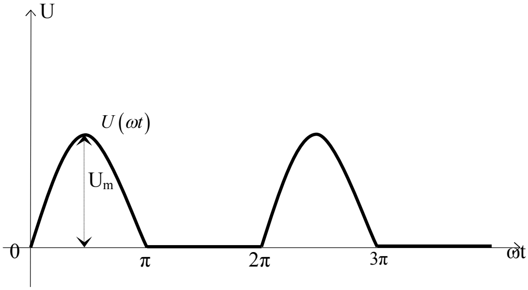
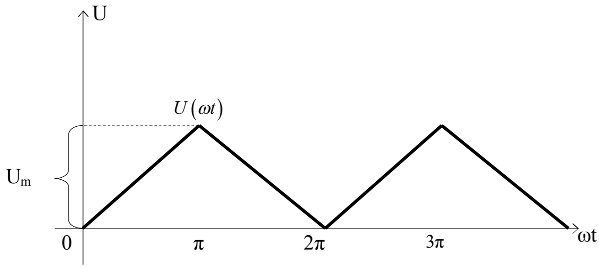
а)	$y'+xy^k=k\cos x,\quad y(0)=1.$			
б)	1.	$y=xy^2-y',\quad y(0)=2$;	2.	$y'=x^2+y^3,\quad y(1)=1$;
	3.	$y'+xy^2=2\cos x,\quad y(0)=1$;	4.	$y'=y+xe^y,\quad y(0)=0$;
	5.	$y''=(y')^2+xy,\ y(0)=y'(0)=2$;	6.	$y^2=xy-y',\quad y(0)=1$.

13. Побудувати графіки функцій та графіки суми ряду з урахуванням їх періодичності, розкласти функцію у ряд Фур'є.

а)	$f(x)=\begin{cases}(-1)^k \dfrac{kx}{2}, & x\in(-\pi,0),\\ 0,25k, & x\in(0,\pi).\end{cases}$	б)	$f(x)=\begin{cases}x+k, x\in(-1,0);\\ k, x\in(0,1).\end{cases}$
в)	$f(x)=\dfrac{(k+1)x}{2k}, x\in(0,\pi)$ за косинусами.	г)	$f(x)=x^2+\dfrac{k}{4}, x\in(0,2)$ за синусами.

14. Для кривої напруги $U(\omega t)$ знайти діючу напругу шляхом безпосереднього інтегрування. Порівняти знайдений результат з розрахунком за гармоніками Фур'є, враховуючи:

$a)$ перший член ряду; $b)$ перші чотири члени ряду.

14.1.	$U(\omega t)=\dfrac{4U_m}{\pi^2}\omega t(\pi-\omega t)$	де U_m– номер варіанта.
		
14.2.	$U(\omega t)=\begin{cases}\dfrac{U_m}{\pi}\omega t, & 0\le\omega t<\pi;\\ -\dfrac{U_m}{\pi}\omega t+2U_m, & \pi<\omega t\le 2\pi.\end{cases}$	
		

7. ЗАВДАННЯ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-9)}$ за означенням та знайти його суму.
2. Дослідити на збіжність ряди:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2};\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1};$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-7};\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!};$$

$$e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!};\qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^5-3n^2}{n^5+7};$$

$$g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n};\qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

3. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність слідуючі знакопереміжні ряди:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^5}{n^{12}+4};$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+9}\right)^n;\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n!)^2}{(2n)!}.$$

4. Визначити область збіжності рядів:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n};\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+x^2);$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\,\frac{x}{3^n};\qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n;$$

$$e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}};\quad f))\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n(x-\pi)$$

5. Знайти суму ряду:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(x^2-1)^{-n}};\qquad c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

6. Розвинути у ряд функції і знайти область збіжності отриманих рядів:

$a)\ f(x)=2^x,\ x_0=0;\quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0;$

$c)\ f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=1;\quad d)\ f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2},\ x_0=1;$

7. Довести, що:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n\,!}=0,\quad a>0;\quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n^2}}{((3n)!)^n}=0;$

$c)$ інтеграл $\int\limits_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^x dx$ збігається.

8. Знайти похідну 10-го порядку функцій в точці $x=0$.

$a)\ y=x^2\cdot\cos 2x;$

$b)\ y=e^{-\frac{x^2}{2}}.$

9. Розвинути функцію $y=x^2$ у ряд Фур'є:

$a)$ в інтервалі $(-\pi,\pi)$, $b)$ в інтервалі $(0,2\pi)$.

За допомогою одержаних розвинень обчислити суми рядів:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2};\qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2};$

$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2};\quad d).\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}.$

10. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$, використовуючи розвинення функції $y=x(\pi-x)$ у ряд синусів в інтервалі $(0,\pi)$.

8. ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного. – М.: Наука, 1981 – 431 с.
3. Буйвол В.Н., Криводуб Ю.Г., и др. Ряды: Учеб. пособие. – К.: КИИГА, 1992. – 82 с.
4. Валєєв К.Г. Вища математика Т1 – Т2. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с.
5. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1962. – 870 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1962. – 527 с.
8. Дубовик В.П. Вища математика. – К.: АСК, 2001. – 647 с.
9. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов. – М.: Высш.шк., 1983. - 175с.
10. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковий словарь математических терминов. – М.:Высш. шк., 1965. – 447 с.
11. Маркушевич А.И. Ряды: Элементарный очерк. М.: Наука, 1979. – 191 с.
12. Овчинніков П.П. Вища математика Т1, – К.: Техніка, 2001. – 597 с.
13. Овчинніков П.П. Вища математика Т2, – К.: Техніка, 2001. –790с.
14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 430с.
15. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учебник для втузов. – М.: Физматгиз, 1963. - 855с.: ил.
16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике,2ч., – М.: Рольф, 2000. – 288с.
17. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.:Высш. шк., 1983. – 174с.

Додаток А

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ У РЯД МАКЛОРЕНА

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty);$

2. $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty);$

3. $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty);$

4. $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n}{n!},$ $\quad |x| < 1;$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots,$

5. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,\ |x| < 1;$

6. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1;$

7. $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1;$

8. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,\ -1 < x \le 1;$

9. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\ldots\right), \quad |x| < 1;$

10. $arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \le 1;$

12. $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots, \quad |x| < 1;$

13. $arcctg\ x = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \le 1.$

Додаток Б

ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ФОРМУЛИ

1. $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$ – середнє арифметичне значення n чисел $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

2. $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}$ – середнє геометричне значення n невід'ємних чисел $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

3. $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$ – середнє гармонічне значення додатніх чисел $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

4. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \left(a_i \ge 0, i = \overline{1, n}\right)$ – нерівність Коши.

5. $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}, n > 1.$

6. $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}.$

7. $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n},\ n \ge 1.$

8. $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^n$ – біном Ньютона.

9. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – формула для знаходження числа розміщень із n елементів по k елементів у кожному. До речі:
$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots n, \quad 0! = 1.$

10. Правило Лопіталя: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ або $\lim\limits_{n \to a} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}$

11. $\sin x < x < tgx,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n -$ метод Абеля обчислення суми збіжного числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

13. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e -$ друга чудова границя, $e = 2{,}7128\ldots$ основа натурального логарифма.

14. $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}$ $-$ формула Стерлінга $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}} = 1.$

15. Властивості логарифмів:

$a)$ $\log_a XY = \log_a X + \log_a Y;$ $\quad b)$ $\log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y;$

$c)$ $\log_a X^k = k\log_a X, \quad \forall X, Y > 0.$

16. $a_n = a_1 + d(n-1) -$ формула загального члена арифметичної прогресії; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n -$ формула суми n перших членів арифметичної прогресії.

17. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} -$ формула загального члена геометричної прогресії; $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} -$ формула суми n перших членів геометричної прогресії; $S = \frac{b_1}{1-q} -$ формула суми членів нескінчено спадної геометричної прогресії;

18. $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right) -$ розклад дробу на прості дроби.

19. $|a+b| \le |a| + |b|$.

20. $|a-b| \ge |a| - |b|$.

21. $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$.

22. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ДОДАТОК В

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ

Основні властивості невизначеного інтегралу

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \Rightarrow d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx;$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$ де $a \neq 0$ $const$;

Таблиця інтегралів

1.	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1;$	2.	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C;$
3.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + C;$	4.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
5.	$\int e^u du = e^u + C;$	6.	$\int \cos u du = \sin u + C;$
7.	$\int \sin u du = -\cos u + C;$	8.	$\int \sin ku dx = -\frac{1}{k}\cos ku + C;$
9.	$\int \cos ku dx = \frac{1}{k}\sin ku + C;$	10.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C;$
11.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C;$	12.	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C;$
13.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$	14.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\rvert + C.$
15.	$\int u^n \sin mu \ du = -u^n \frac{\cos mu}{m} + \frac{n}{m}\int u^{n-1}\cos mu \ du$		
16.	$\int u^n \cos mu \ du = u^n \frac{\sin mu}{m} - \frac{n}{m}\int u^{n-1}\sin mu \ du$		

Формула інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$.

ДОДАТОК Г

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Основні властивості похідних

1. $(u+v-w)' = u'+v'-w';$
2. $(u\cdot v)' = u'v+uv';$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right);$
4. $(c)' = 0;$
5. $(c\cdot u)' = c\cdot u';$
6. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$
7. $\left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{cu'}{u^2};$
8. $u'_u = 1.$

Таблиця похідних елементарних функцій

1.	$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$	2.	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$
3.	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$	4.	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
5.	$(ctgu)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$	6.	$(a^u)' = a^u \ln a\cdot u'$
7.	$(e^u)' = e^u\cdot u'$	8.	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\cdot \log_a e = \frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\ln a}$
9.	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	10.	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11.	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	12.	$(arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

Формула знаходження похідної складної функції

Якщо $y = f(u)$, де $u = u(x)$ то $y' = f'_u(u)\cdot u'(x)$.

Формула знаходження похідної функції заданої параметрично

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{x'_t}{y'_t}$$

Підписано до друку 05.05.2010. Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 3,94.
Друк лазерний. Замовлення № 10/10. Тираж 150 прим.

Надруковано в Видавничому центрі КІІ ДВНЗ „ДонНТУ”