МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
„ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

Навчально – методичний посібник
щодо організації самостійної роботи студентів

СПЕЦІАЛЬНИЙ РОЗДІЛ МАТЕМАТИКИ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Розглянуто на засіданні кафедри
„Природничі науки”
протокол № 35 від 24.04.08 р.

Затверджено
навчально-видавничою Радою Дон НТУ
протокол № 4 від 19.05.08 р.

Красноармійськ, 2008

УДК 517
Спеціальний розділ математики – операційне числення, навчально – методичний посібник щодо організації самостійної роботи студентів, С.В. Волков, В.Д. Мальцева – Красноармійськ: КІІ ДВНЗ ДонНТУ, 2008р. – 56с.

Мета посібника – надати методичну допомогу для організації та реалізації самостійної роботи студентів всіх форм та напрямків навчання зі спеціального розділу математики – операційне числення .

Посібник містить короткий теоретичний матеріал, приклади та вказівки до розв'язання задач, завдання для самостійного опрацювання матеріалу студентами, вимоги до їх виконання та оформлення, орієнтовні питання до семестрового контролю, перелік рекомендованої та використаної літератури.

Укладачі: С.В. Волков, В.Д. Мальцева ст. викладачі кафедри „Природничі науки" КІІ ДВНЗ ДонНТУ.

Рецензенти:

Кадубовський О.А. – к.ф.-м.н. доц. кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ;

Триллєр Є.А. – к.т.н. доц. кафедри електромеханіки і автоматики КІІ ДонНТУ.

ЗМІСТ

ВСТУП

Викладання спеціального розділу математики має ціль ознайомити студентів з операційним, символьним, численням, яке необхідне для розв'язання прикладних задач при вивченні електротехніки та теорії автоматизації і управління, та удосконалити навички складання і аналізу математичних моделей задач прикладного характеру, пов'язаних з майбутньою діяльністю інженера.

У відповідності до вимог підготовки бакалаврів, визначених у кваліфікаційній характеристиці напряму, в результаті вивчення даного курсу студент повинен:

знати:

– класи задач, які можна звести до таких задач, що розв'язуються з використанням операційних методів;

– способи розв'язання задач, пов'язаних зі спеціальністю, використовуючи операційні методи;

вміти:

– самостійно розбиратися в математичному апараті, який знаходиться в спеціальній літературі;

– обирати методи дослідження і доводити розв'язки задач до практичного результату;

– робити перевірку одержаних результатів;

– використовувати комп'ютерні технології, таблиці та довідкові матеріали.

1. ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Уважно прочитайте теоретичну частину вказівок та вдоскональте свої знання вивченням відповідного матеріалу дисципліни за підручниками, що вказані у переліку. Уважно проаналізуйте доведення властивостей та розв'язок задач, що наводяться у кожному розділі.

Визначте завдання для самостійного опрацювання, що відповідають номеру Вашого варіанту. Завдання необхідно виконати в окремому зошиті титульну сторінку якого оформити за зразком:

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Красноармійський індустріальний інститут
Контрольна робота
з дисципліни „Спеціальний розділ математики”
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
студента групи ____________________
вказати назву групи

____
Прізвище Ім’я По-батькові

ВАРІАНТ № ___
номер залікової книжки власний підпис
дата здачі роботи

Роботу необхідно починати з запису умови завдання в повному об’ємі, вказавши відповідний номер завдання, і супроводжувати розв’язання досить детальними поясненнями, текст яких не повинен містити скорочених записів, окрім загально прийнятих. Усі розрахунки повинні виконуватися повністю, без втрати логічної послідовності дій. У випадку можливості давати геометричну інтерпретацію умови і розв’язання задачі. Результати, які одержані під час виконання завдань, слід перевірити та обґрунтувати, і тільки після підтвердження записати повну відповідь. Оформлену роботу у встановлений термін здати на перевірку. У десятиденний термін, після здачі, обов’язково з’ясувати результати перевірки роботи викладачем. У разі необхідності допрацювати розв’язання у тому ж зошиті в кінці роботи з вказівкою „Доробка”, зберігаючи номер відповідного завдання.

Якщо в процесі вивчення матеріалу чи при розв’язанні задач у студента виникають питання, то необхідно звернутися до викладача за консультацією, які проводяться згідно розкладу або за попередньою домовленістю з викладачем поза встановленого графіку.

2. ОРІЄНТОВНІ ПИТАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

1. Що називають перетворенням Лапласа?
2. Яким умовам повинна задовольняти функція, щоб вона була оригіналом в перетворенні Лапласа?
3. Як сформулювати та довести:
   1) теорему єдиності зображень;
   2) теорему лінійності відповідності оригіналу та зображень;
   3) теорему подібності;
   4) теорему про диференціювання оригіналів;
   5) теорему про диференціювання зображень;
   6) теорему про диференціювання за параметром;
   7) теорему запізнювання;
   8) теорему зсуву;
   9) теорему множення;
   10) теорему про інтегрування зображення;
   11) теорему про інтегрування похідної зображення?
4. Вказати алгоритм застосування перетворення Лапласа до:
   1) розв’язання диференціальних рівнянь;
   2) розв’язання систем диференціальних рівнянь;
   3) розв’язання інтегральних рівнянь;
   4) обчислення невласних інтегралів;
   5) підсумовування степеневих рядів та розклад функцій в ряд;
   6) аналізу перехідних процесів в електричних ланцюгах.

3. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Операційне числення знаходить застосування у важливому розділі математики „Диференціальні рівняння”, в розділі електротехніки „Перехідні процеси в електричних ланцюгах” та в „Теорії автоматизації і управління”.

При вивченні операційного числення важливо зрозуміти його основну ідею. Суть цього математичного методу полягає в тому, що функції $f(t)$ дійсної змінної t за певним законом ставиться у відповідність функція $F(p)$ комплексної змінної p так, що операції диференціювання і інтегрування над функцією $f(t)$ зводяться до алгебраїчних операцій над $F(p)$. Це дозволяє даним диференціальним чи інтегральним рівнянням відносно $f(t)$ ставити у відповідність алгебраїчні рівняння відносно $F(p)$, що спрощує розв’язання даних рівнянь. Крім цього, операційний метод в значній мірі спрощує аналіз перехідних режимів в електричних ланцюгах, а також розрахунок ланцюгів змінного струму. Застосування цього методу можливе також при знаходженні невласних інтегралів, підсумовуванні рядів і т.д.

В основу операційного числення покладена зокрема ідея перетворення Лапласа.

O_1. ***Перетворенням Лапласа*** функції $f(t)$ дійсної змінної називається знаходження функції $F(p)$ комплексної змінної, за формулою

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \qquad (1)$$

Зауважимо, що інтеграл в правій частині (1) є невласним першого роду, залежить від комплексного параметру $p\left(p = \alpha + \beta i,\ \alpha > 0\right)$ і носить назву інтеграла Лапласа.

Відомо, що для збіжності інтеграла Лапласа, тобто для визначення деякої функції $F(p)$, необхідно виконання наступних умов:

1) функція $f(t)-$неперервна при $t \geq 0$, або має точки розриву лише першого роду;
2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) функція $f(t)$ має обмежену ступінь росту, тобто існують такі додатні числа M і a, для яких $\left|f(t)\right| \le Me^{a \cdot t}$ $\forall t \in [0;\infty)$.

Вкажемо на те, що більшість функцій, які описують різні фізико – технічні процеси, задовольняють вказаним умовам.

O_2**. *Оригіналом*** $f(t)$ називається функція, що задовольняє умовам 1), 2), 3)**.**

O_3**. *Зображенням*** (*зображенням по Лапласу*) оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$, отримана в результаті перетворення за формулою (1)

Існує кілька способів скороченого запису відповідності між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$:

$$F(p) = L(f(t)), \text{ або } f(t) \rightleftarrows F(p), \text{ або } f(t) \doteqdot F(p),$$

$$F(p) \leftrightarrows f(t).$$

4. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ОЗНАЧЕННЯМ

Використовуючи означення, знайдемо зображення деяких оригіналів. Відповідність між оригіналом і зображенням визначається формулою (1).

Приклад 1. Для $f(t)=1$ знайти $F(p)$.

Розв'язання:

$$F(p)=L(f(t))=L(1)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}dt=\frac{1}{-p}\lim_{b\to\infty}e^{-pt}\Big|_0^b=$$

$$=\frac{1}{-p}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-pb}-e^0\right)=\frac{1}{-p}\left(e^{-\infty}-1\right)=\frac{1}{p}.$$

Отже $L(1)=F(p)=\dfrac{1}{p}$. *Відповідь:* $1 \leftrightarrows \dfrac{1}{p}$

Приклад 2. Для $f(t)=e^{a\cdot t}$ знайти $F(p)$.

Розв'язання:

$$F(p)=L(f(t))=L\left(e^{a\cdot t}\right)=\int_0^{+\infty}e^{a\cdot t}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-p)t}dt=$$

$$=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to\infty}e^{(a-p)t}\Big|_0^b=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to\infty}\left(e^{(a-p)b}-e^0\right)=\frac{1}{a-p}\left(e^{-\infty}-1\right)=\frac{1}{p-a}.$$

Отже $L\left(e^{a\cdot t}\right)=F(p)=\dfrac{1}{p-a}$. *Відповідь:* $e^{a\cdot t} \leftrightarrows \dfrac{1}{p-a}$.

Відмітимо, що з одержаного результату можна отримати результат першого прикладу при значенні параметра $a=0$.

Приклад 3. Для $f(t)=t$ знайти $F(p)$.

Розв'язання:

$$F(p)=L(f(t))=L(t)=\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-pt}dt=\left|\begin{matrix}\int udv=uv-\int vdu\\ u=t,\quad dv=e^{-pt}dt\\ du=dt,\quad v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{matrix}\right|$$

Враховуючи спосіб обчислення невласних інтегралів, отримаємо

$$\lim_{b\to\infty}\left(t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^b+\frac{1}{p}\int_0^b e^{-pt}dt\right)=\lim_{b\to\infty}\left(b\cdot\frac{e^{-pb}}{-p}+0+\frac{e^{-pt}}{-p^2}\Big|_0^b\right)=\frac{be^{-\infty}}{-p}+\frac{e^{-\infty}}{-p^2}+\frac{1}{p^2}$$

Отже, $F(p)=L(t)=\frac{1}{p^2}$. *Відповідь:* $t \rightleftarrows \frac{1}{p^2}$.

Приклад 4. Знайти зображення для оригіналу $f(t)=\sin t$.

Розв'язання:

$$F(p)=L(\sin t)=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-pt}dt=\begin{vmatrix}\int udv=uv-\int vdu\\ u=\sin t,\quad dv=e^{-pt}dt\\ du=\cos tdt,\quad v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\sin t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^b+\frac{1}{p}\int_0^b\cos t\cdot e^{-pt}dt\right)=\begin{vmatrix}\int udv=uv-\int vdu\\ u=\cos t,\quad dv=e^{-pt}dt\\ du=-\sin tdt,\quad v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(0-\frac{1}{p^2}\cos t\cdot e^{-pt}\Big|_0^b-\frac{1}{p^2}\int_0^b\sin t\cdot e^{-pt}dt\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-pt}dt\Rightarrow$$

$$L(\sin t)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}L(\sin t)\Rightarrow L(\sin t)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2}\Rightarrow L(\sin t)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Отже, $F(p)=L(\sin t)=\frac{1}{p^2+1}$. *Відповідь:* $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$.

Приклад 5. Знайти зображення для оригіналу $f(t)=\cos t$.

Розв'язання:

$$F(p)=L(\cos t)=\int_0^{+\infty}\cos t\cdot e^{-pt}dt=\begin{vmatrix}\int udv=uv-\int vdu\\ u=\cos t,\quad dv=e^{-pt}dt\\ du=-\sin tdt,\quad v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\cos t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^b-\frac{1}{p}\int_0^b \sin t\cdot e^{-pt}dt\right)=\left|\begin{array}{c}\int udv=uv-\int vdu\\ u=\sin t,\quad dv=e^{-pt}dt\\ du=\cos tdt,\quad v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\sin t\cdot e^{-pt}\Big|_0^b-\frac{1}{p^2}\int_0^b \cos t\cdot e^{-pt}dt\right)=\frac{1}{p}+0-\frac{1}{p^2}\int_0^{+\infty}\cos t\cdot e^{-pt}dt\Rightarrow$$

$$L(\cos t)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}L(\cos t)\Rightarrow L(\cos t)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p}\Rightarrow L(\cos t)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Отже, $F(p)=L(\cos t)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

<u>*Відповідь:*</u> $\cos t \rightleftarrows \dfrac{p}{p^2+1}$.

<u>***Завдання 1.***</u> Знайти зображення оригіналу за означенням:

a. $f(t)=e^{-t}\sin t$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.

b. $f(t)=\sin^2 t$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

c. $f(t)=t\cos t$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

5. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА

Для встановлення відповідності між оригіналами $f(t), g(t)$ і їх відповідними зображеннями $F(p), G(p)$, вкажемо на ряд властивостей.

1. Теорема єдиності зображень.

$$F(p) = G(p) \text{ тоді і тільки тоді, коли } f(t) = g(t). \tag{2}$$

2. Теорема лінійності.

Для будь-яких постійних a, b:

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \rightleftarrows a \cdot F(p) + b \cdot G(p). \tag{3}$$

3. Теорема подібності.

$$\forall \alpha > 0,\ f(\alpha \cdot t) \rightleftarrows \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4}$$

4. Теорема про диференціювання оригіналів.

Якщо $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t) -$ оригінали, то

$$f'(t) \rightleftarrows pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \rightleftarrows p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

....

$$f^{(n)}(t) \rightleftarrows p^n F(p) - f(0) p^{n-1} - f'(0) p^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{5}$$

5. Теорема про диференціювання зображень.

$$F'(p) \leftrightarrows -tf(t)$$

....

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrows (-t)^n f(t). \tag{6}$$

6. Теорема про диференціювання за параметром.

Якщо, для будь-яких значень параметра a

$$f(t, a) \rightleftarrows F(p, a), \text{ то } \frac{\partial f(t, a)}{\partial a} \rightleftarrows \frac{\partial F(p, a)}{\partial a}. \tag{7}$$

7. Теорема запізнювання.

$$\forall m > 0,\ f(t - m) \rightleftarrows e^{-p\, m} F(p). \tag{8}$$

8. Теорема зсуву.

$$\forall m,\ e^{mt} f(t) \rightleftarrows F(p - m). \tag{9}$$

9. Теорема множення (згортки).

$$\int_0^t f(z) \cdot g(t - z)\, dz \rightleftarrows F(p) \cdot G(p). \tag{10}$$

10. Теорема про інтегрування зображення.

$$\int_0^{+\infty} F(p)\,dp = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt\,. \qquad (11)$$

11. Теорема про інтегрування похідної зображення.

$$(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(p)\,dp = \int_0^{+\infty} t^n \cdot f(t)\,dt. \qquad (12)$$

<u>Доведення 1.</u>

$$f(t)=g(t) \Rightarrow \int_0^{+\infty}\big(f(t)-g(t)\big)e^{-pt}dt = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt - \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt =$$

$$= F(p)-G(p)=0 \Rightarrow F(p)=G(p).$$

$$F(p)=G(p) \Rightarrow F(p)-G(p)=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt - \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\big(f(t)-g(t)\big)e^{-pt}dt = 0 \Rightarrow f(t)-g(t)=0 \Rightarrow f(t)=g(t).$$

Отже, $\begin{cases} f(t)=g(t) \Rightarrow F(p)=G(p), \\ F(p)=G(p) \Rightarrow f(t)=g(t), \end{cases} \Rightarrow f(t)=g(t) \Leftrightarrow F(p)=G(p)$,

що і треба довести.

<u>Доведення 2.</u>

$$a\cdot f(t)+b\cdot g(t) \rightleftarrows \int_0^{+\infty}\big(af(t)+bg(t)\big)e^{-pt}dt = a\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt +$$

$+b\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = a\cdot F(p)+b\cdot G(p),$ що і треба було довести.

<u>Доведення 3.</u>

$$f(\alpha\cdot t) \rightleftarrows \int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \left| \begin{array}{ll} \alpha t = z, & dt = \dfrac{1}{\alpha}dz \\ t = \dfrac{z}{\alpha}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 0 & +\infty \\ \hline z & 0 & +\infty \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f(z)e^{-\frac{p}{\alpha}z}\frac{1}{\alpha}dt =$$

$= \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(z)e^{-\frac{p}{\alpha}z}dt = \dfrac{1}{\alpha}F(\dfrac{p}{\alpha}),$ що і треба було встановити.

Доведення 4.

$$L\left(f'(t)\right)=\int\limits_0^{+\infty} f'\left(t\right)e^{-pt}dt=\left|\begin{array}{l} \int udv=uv-\int vdu \\ u=e^{-pt}, \qquad du=-pe^{-pt}dt \\ dv=f'\left(t\right)dt,\ v=\int f'\left(t\right)dt=f\left(t\right)\end{array}\right|=$$

$$=e^{-pt}f\left(t\right)\Big|_0^{+\infty}+p\int\limits_0^{+\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt=e^{-\infty}f\left(\infty\right)-e^0 f(0)+p\int\limits_0^{+\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt=$$

$=pF(p)-f(0)\Rightarrow f'(t)\rightleftarrows pF(p)-f(0).$

Аналогічно доводиться: $f''(t)\rightleftarrows p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$,

$$f'''(t)\rightleftarrows p^3F\left(p\right)-p^2f'\left(0\right)-pf''\left(0\right)-f\left(0\right),$$

....

$$f^{(n)}(t)\rightleftarrows p^nF(p)-f(0)p^{n-1}-f'(0)p^{n-2}-...-f^{(n-1)}(0),$$

або

$$L\left(f^{(n)}\left(t\right)\right)=pL\left(f^{(n-1)}\left(t\right)\right)-f^{(n-1)}\left(0\right),\quad n\in N.$$

Доведення 5.

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt\Rightarrow$$

$$F'(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f\left(t\right)e^{-pt}}{\partial p}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f\left(t\right)\partial e^{-pt}}{\partial p}dt=\int\limits_0^{+\infty} f\left(t\right)\left(-t\right)e^{-pt}dt\leftrightarrows -tf(t);$$

$$F''(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^2 f\left(t\right)e^{-pt}}{\partial p^2}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f\left(t\right)\partial^2 e^{-pt}}{\partial p^2}dt=\int\limits_0^{+\infty} f\left(t\right)\left(-t\right)\cdot\left(-t\right)e^{-pt}dt\Rightarrow$$

$$F''(p)\leftrightarrows t^2f(t),$$

....

$F^{(n)}(p)\leftrightarrows\left(-t\right)^n f(t),$ що і треба було довести.

Пропонуємо доведення властивості 6 читачам виконати самостійно.

Доведення 7.

$$f(t-m)\rightleftarrows\int\limits_0^{+\infty} f\left(t-m\right)e^{-pt}dt=\left|\begin{array}{ll} t-m=z, & dt=dz \\ t=z+m, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline t & 0 & +\infty \\ \hline z & -m & +\infty \\ \hline\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\int_{-m}^{+\infty} f(z)e^{-p(z+m)}dt=\int_{-m}^{+\infty} f(z)e^{-pz-pm}dt=\int_{-m}^{+\infty} f(z)e^{-pz}e^{-p\,m}dt=$$

$$=e^{-p\,m}\int_{-m}^{+\infty} f(z)e^{-pz}dt=e^{-p\,m}\int_{0}^{+\infty} f(z)e^{-pz}dt=e^{-p\,m}F(p)\Rightarrow$$

$$f(t-m)\rightleftarrows e^{-p\,m}F(p),$$ що і треба було довести.

<u>Доведення 8.</u>

$$e^{mt}f(t)\rightleftarrows\int_0^{+\infty} e^{mt}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t(p-m)}dt=F(p-m)\Rightarrow$$

$$e^{mt}f(t)\rightleftarrows F(p-m),$$ що і треба було встановити.

Пропонуємо доведення властивості 9 читачам виконати самостійно.

<u>Доведення 10.</u>

$$\int_0^{+\infty} F(p)dp=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)dp=\int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt}dp\right)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\left(\left.\frac{e^{-pt}}{-t}\right|_0^{+\infty}\right)dt=\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{e^{-\infty}}{-t}+\frac{e^0}{t}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} F(p)dp=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt,$$ що і треба довести.

<u>Доведення 11.</u>

Згідно властивості (5) встановлено $F^{(n)}(p)\rightleftarrows(-t)^n f(t)$ маємо $(-1)^{n+1}F^{(n+1)}(p)\rightleftarrows(t)^{n+1}f(t)$. Застосувавши до одержаного співвідношення властивість (10), отримаємо:

$$(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} F^{(n+1)}(p)dp=\int_0^{+\infty} t^n\cdot f(t)dt,$$ що і треба довести.

Вкажемо на деякі застосування властивостей щодо знаходження зображень.

Застосуємо властивість (6) до співвідношення $e^{a\cdot t}\rightleftarrows\dfrac{1}{p-a}$:

$$\frac{\partial e^{a\cdot t}}{\partial a} \rightleftarrows \frac{\partial\left(\left(p-a\right)^{-1}\right)}{\partial a} \Rightarrow te^{a\cdot t} \rightleftarrows -1\cdot\left(p-a\right)^{-2}\cdot\left(-1\right) \Rightarrow te^{a\cdot t} \rightleftarrows \frac{1}{\left(p-a\right)^{2}},$$

Продовжуючи диференціювання, отримуємо:

$$t^2 e^{a\cdot t} \rightleftarrows \frac{2!}{\left(p-a\right)^{3}}; t^3 e^{a\cdot t} \rightleftarrows \frac{3!}{\left(p-a\right)^{4}};...; t^n e^{a\cdot t} \rightleftarrows \frac{n!}{\left(p-a\right)^{n+1}}. \quad (13)$$

При $a=0$ отримаємо

$$t \rightleftarrows \frac{1}{p^2}; t^2 \rightleftarrows \frac{2!}{p^3}; t^3 \rightleftarrows \frac{3!}{p^4};...; t^n \rightleftarrows \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (14)$$

6. ОПЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Під операційним методом розв'язання задач розуміють метод, в основу якого покладені наступні етапи:

– від шуканих функцій – оригіналів переходять до деяких інших, функцій – зображень;
– над зображеннями виконують операції, що відповідають заданим операціям над відповідними функціями – оригіналами;
– виконавши дії над зображеннями і знайшовши їх, повертаються до оригіналів за таблицею (додатки А, Б).

6.1. Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами

Нехай дано лінійне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'(t)+b\cdot y(t)=c(t). \qquad (15)$$

Знайдемо його частинний розв'язок, (розв'яжемо задачу Коші) за початкових умов $y(0)=y_0$.

Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння, враховуючи (властивість 1), що рівність оригіналів забезпечує рівність зображень і, вважаючи $y'(t), y(t)$ оригіналами, переходимо від заданого рівняння до рівняння, що пов'язує їх зображення згідно властивості (4),

$$L(y(t))=Y(p),\ L(y'(t))=pY(p)-y_0,\ L(c(t))=C(p).$$

$$L(y'(t)+p\cdot y(t))=L(y')+p\cdot L(y)=L(C(t))$$

$$pY(p)-y_0+bY(p)=C(p)$$

Отримане рівняння є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно $Y(p)$, розв'яжемо його:

$$pY(p)+bY(p)=C(p)+y_0 \Rightarrow Y(p)(p+b)=C(p)+y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{C(p)+y_0}{p+b}.$$

Визначивши зображення $Y(p)$, представимо його у вигляді суми табличних зображень і за допомогою властивостей і таблиці, знайдемо оригінал $y(t)-$ частинний розв'язок рівняння (15).

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2y = e^{2t}$ за умови, що $y(0) = 1$.

Розв'язання:
Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння.

$$L(y' + 2y) = L(e^{2t}) \Rightarrow L(y') + 2L(y) = \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pY - y(0) + 2Y = \frac{1}{p-2} \Rightarrow (p+2)Y - 1 = \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$(p+2)Y = \frac{1}{p-2} + 1 = \frac{1+p-2}{p-2} \Rightarrow (p+2)Y = \frac{p-1}{p-2} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p+2)} \Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p^2 - 2^2};$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2 - 2^2} = \frac{p}{p^2 - 2^2} - \frac{1}{p^2 - 2^2} \leftrightarrows ch(2 \cdot t) - \frac{1}{2} sh(2 \cdot t).$$

Відповідь: $y(t) = ch(2 \cdot t) - \frac{1}{2} sh(2 \cdot t)$.

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - y = te^t$ за умови, що $y(0) = 0$.

Розв'язання:

$$L(y') - L(y) = L(te^t) \Rightarrow pY - y(0) - Y = \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow$$

$$(p-1)Y = \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow Y = \frac{1}{(p-1)^3} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{2} \frac{2!}{(p-1)^3} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t;$$

Перевіримо знайдений розв'язок:

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t \Rightarrow y'(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 \right)' e^t + \frac{1}{2} t^2 \left(e^t \right)' = te^t + \frac{1}{2} t^2 e^t;$$

$$y' - y = te^t + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} t^2 e^t = te^t.$$

Знайдений розв'язок задовольняє даному рівнянню.

Відповідь: $y(t) = 0,5 \cdot t^2 e^t$.

<u>Приклад 8.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' + y = e^{-t}$ за умови, що $y(0) = 1$.

<u>Розв'язання:</u>

$$L(y') + L(y) = L(e^{-t}) \Rightarrow pY - y(0) + Y = \frac{1}{p+1} \Rightarrow (p+1)Y - 1 = \frac{1}{p+1} \Rightarrow$$

$$(p+1)Y = \frac{1}{p+1} + 1 \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} \Rightarrow y(t) = te^{-t} + e^{-t}.$$

Виконаємо перевірку $y' + y = e^{-t}$

$$\left((t+1)e^{-t}\right)' + (t+1)e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow (t+1)' e^{-t} + (t+1)\left(e^{-t}\right)' + (t+1)e^{-t} = e^{-t};$$

$1 \cdot e^{-t} + (t+1)\left(-e^{-t}\right) + (t+1)e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow e^{-t} \equiv e^{-t}$. Маємо тотожність.

<u>Відповідь:</u> $y(t) = (t+1)e^{-t}$.

<u>Завдання 2.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' - y = 1$ коли відомо, що $y(0) = -1$.

<u>Відповідь:</u> $y(t) = -1$.

<u>Завдання 3.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2y = 2$ коли відомо, що $y(0) = 1$.

<u>Відповідь:</u> $y(t) = e^{-2t} + 1$.

<u>Завдання 4.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' - 2y = e^{2t} + 6$ коли відомо, що $y(0) = -3$.

<u>Відповідь:</u> $y(t) = te^{2t} - 3$.

<u>Завдання 5.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' - y = -t$ коли відомо, що $y(0) = 1$.

<u>Відповідь:</u> $y(t) = t + 1$.

6.2. Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Нехай дано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''(t)+b\cdot y'(t)+c\cdot y(t)=f(t). \qquad (16)$$

Знайдемо його частинний розв'язок за початкових умов $y'(0)=y_0',\ y(0)=y_0$.

Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння. Вважаючи $y''(t), y'(t), y(t)$ оригіналами, переходимо від заданого рівняння до рівняння, що пов'язує їх зображення,

$$L\left(y''(t)+b\cdot y'(t)+c\cdot y(t)\right)=L\left(f(t)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\left(y''(t)\right)+b\cdot L\left(y'(t)\right)+c\cdot L\left(y(t)\right)=L\left(f(t)\right)$$

$$L\left(y(t)\right)=Y(p),\ L\left(y'(t)\right)=pY(p)-y_0,$$

$$L\left(f(t)\right)=F(p), L\left(y''(t)\right)=p^2Y(p)-y_0p-y_0'.$$

$$p^2Y(p)-y_0p-y_0'+b\cdot\left(pY(p)-y_0\right)+c\cdot Y(p)=F(p)$$

Отримане рівняння є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно $Y(p)$, розв'яжемо його:

$$p^2Y(p)-y_0p-y_0'+b\cdot pY(p)-b\cdot y_0+c\cdot Y(p)=F(p)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2Y(p)+b\cdot pY(p)+c\cdot Y(p)=F(p)+y_0p+y_0'+b\cdot y_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(p^2+b\cdot p+c\right)Y(p)=F(p)+y_0p+y_0'+b\cdot y_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{F(p)+y_0p+y_0'+b\cdot y_0}{p^2+b\cdot p+c}.$$

Визначивши зображення $Y(p)$, представимо його у вигляді суми табличних зображень і за допомогою властивостей і таблиці знайдемо оригінал $y(t)-$ частинний розв'язок (16).

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''+3y'+2y=1+t+t^2$ за умови, що $y(0)=0$ і $y'(0)=1$.

Розв'язання:

Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння

$$L\left(y''+3y'+2y\right)=L\left(1+t+t^2\right).$$

$$L\left(1+t+t^2\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3},\ L(y)=Y,\ L(y')=pY-y(0)=pY,$$

$$L(y'')=p^2Y-py(0)-y'(0)=p^2Y-1\Rightarrow$$

$$p^2Y-1+3pY+2Y=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}\Rightarrow$$

$$p^2Y+3pY+2Y=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+1\Rightarrow\left(p^2+3p+2\right)Y=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+1$$

$$Y=\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+1}{p^2+3p+2}\Rightarrow\frac{p^3+p^2+p+2}{p^3\left(p^2+3p+2\right)}\Rightarrow Y(p)=\frac{p^3+p^2+p+2}{p^3\left(p^2+3p+2\right)}$$

$$Y(p)=\frac{p^3+p^2+p+2}{p^3(p+2)(p+1)}=\frac{p^2(p+1)+p+2}{p^3(p+2)(p+1)}=\frac{1}{p(p+2)}+\frac{1}{p^3(p+1)}.$$

Представимо другий дріб у вигляді суми простих дробів,

$$\frac{1}{p^3(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p^3}+\frac{D}{p+1}=$$

$$=\frac{Ap^2(p+1)+Bp(p+1)+C(p+1)+Dp^3}{p^3(p+1)}\Rightarrow$$

$$1=(A+D)p^3+(A+B)p^2+(B+C)p+C\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A+D=0;\\A+B=0;\\B+C=0;\\C=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1;\\B=-1;\\A=1;\\D=-1.\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{p^3(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p+1}.$$

$$Y(p)=\frac{1}{p(p+2)}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p+1}\leftrightarrows\frac{1-e^{-2t}}{2}+1-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{3}{2}-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{2}.$$

Виконаємо перевірку отриманого розв'язку. Знайдемо похідні функції $y(t)=\frac{3}{2}-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{2}$:

$$y'=\left(\frac{3}{2}-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{2}\right)'=-1+t+e^{-t}+e^{-2t},$$

$$y''=\left(-1+t+e^{-t}+e^{-2t}\right)'=1-e^{-t}-2e^{-2t}.$$

Підставимо функцію та її похідні до рівняння

$$y''+3y'+2y=1+t+t^2 \Rightarrow$$

$$\left(1-e^{-t}-2e^{-2t}\right)+3\left(-1+t+e^{-t}+e^{-2t}\right)+2\left(\frac{3}{2}-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{2}\right)=$$

$$=1-e^{-t}-2e^{-2t}-3+3t+3e^{-t}+3e^{-2t}+3-2t+t^2-2e^{-t}-e^{-2t}=$$

$$=1+t+t^2.$$

Бачимо, що отриманий розв'язок задовольняє дане рівняння.

<u>*Відповідь:*</u> $y(t)=\frac{3}{2}-t+\frac{t^2}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}-e^{-t}$.

<u>***Завдання 6.***</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y''-y'=1$, коли відомо, що $y(0)=0,\ y'(0)=-1$.

<u>*Відповідь:*</u> $y(t)=-t$.

<u>***Завдання 7.***</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y''-2y'=8y$, коли відомо, що $y(0)=3,\ y'(0)=0$.

<u>*Відповідь:*</u> $y(t)=2e^{-2t}+e^{4t}$.

<u>***Завдання 8.***</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y''+9y=18e^{-3t}$, коли відомо, що $y(0)=2;\ \ y'(0)=0$.

<u>*Відповідь:*</u> $y(t)=e^{-3t}+\sin 3t+\cos 3t$.

6.3. Розв'язання систем лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь майже без всяких змін переноситься на розв'язання систем як лінійних однорідних так і неоднорідних диференціальних рівнянь.

Приклад 10. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь,

$$\begin{cases} x'(t) = -x + y + z; \\ y'(t) = x - y + z; \\ z'(t) = x + y - z. \end{cases} \quad x(0) = 2,\, y(0) = 2,\, z(0) = -1.$$

Розв'язання:

Якщо вважати, що $L(x) = X(p), L(y) = Y(p), L(z) = Z(p)$, то згідно властивості диференціювання оригіналу:

$$L(x'(t)) = pX - x(0) = pX - 2,\ \ L(y'(t)) = pY - y(0) = pY - 2,$$

$$L(z'(t)) = pZ - z(0) = pZ + 1.$$

Застосуємо перетворення Лапласа до кожного з рівнянь системи:

$$\begin{cases} pX - 2 = -X + Y + Z; \\ pY - 2 = X - Y + Z; \\ pZ + 1 = X + Y - Z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p+1)X - Y - Z = 2; \\ -X + (p+1)Y - Z = 2; \\ -X - Y + (p+1)Z = -1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера $X = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, Y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}, Z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$,

де $\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -1 \\ -1 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix}$ – головний визначник, визначник складений із коефіцієнтів при невідомих в системі;

$\Delta_{x,y,z}$ – допоміжні визначники, визначники отримані з головного шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -1 \\ -1 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 - 1 - 1 - 3(p+1) = p^3 + 3p^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Delta = (p+2)^2 (p-1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = 2(p+1)^2 - 1 + 2 - (p+1) - 2 + 2(p+1) =$$

$$= 2(p+1)^2 + (p+1) - 1 = 2\big((p+1) - (-1)\big)\left((p+1) - \frac{1}{2}\right) = (p+2)(2p+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)(2p+1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & 2 \\ -1 & p+1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(p+2)(p-4).$$

Зауважимо, визначники обчислені за правилом трикутника:

$$X(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)}, Y(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)}, Z(p) = \frac{-(p-4)}{(p+2)(p-1)}.$$

Представимо зображення X, Y, Z розв'язків $x(t), y(t), z(t)$ у вигляді простих (табличних) дробів та знайдемо їх оригінали:

$$X(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)} = 2\frac{p}{(p+2)(p-1)} + \frac{1}{(p+2)(p-1)},$$

і, враховуючи відповідність для кожного дробу отримаємо

$$X(p) \leftrightarrows 2\frac{-1e^t - 2e^{-2t}}{-1-2} + \frac{e^{-2t} - e^t}{-1-2} = \frac{1}{-3}\left(-2e^t - 4e^{-2t} + e^{-2t} - e^t\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = e^t + e^{-2t}.$$

$$Y(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-1} = \frac{A(p-1) + B(p+2)}{(p+2)(p-1)},$$

З рівності дробів, у яких рівні знаменники, робимо висновок про необхідність прирівняти чисельники цих дробів.

$$2p+1 = A(p-1) + B(p+2) \Rightarrow \begin{array}{c|c} p=1 & 3 = B\cdot 3 \\ p=-2 & -3 = A\cdot(-3) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B = 1, \\ A = 1. \end{cases}$$

$$Y(p)=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p-1}\;\overset{\rightarrow}{\leftarrow}\; e^{-2t}+e^{t}\Rightarrow y(t)=e^{t}+e^{-2t}.$$

$$Z(p)=\frac{-(p-4)}{(p+2)(p-1)}=-\frac{(p-1)-3}{(p+2)(p-1)}=-\frac{1}{p+2}+\frac{3}{(p+2)(p-1)}\Rightarrow$$

$$Z(p)\;\overset{\rightarrow}{\leftarrow}\; -e^{-2t}+3\left(\frac{e^{-2t}-e^{t}}{-1-2}\right)=e^{t}-2e^{-2t}\Rightarrow z(t)=e^{t}-2e^{-2t}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\begin{cases} x(t)=e^{t}+e^{-2t}, \\ y(t)=e^{t}+e^{-2t}, \\ z(t)=e^{t}-2e^{-2t} \end{cases}$ $-$розв'язок даної системи.

<u>Приклад 11.</u> Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь,

$$\begin{cases} x'(t)-5x+9y=4, \\ y'(t)-x+5y=e^{5t}. \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0.$$

<u>*Розв'язання:*</u>

Нехай $L(x)=X(p), L(y)=Y(p)$, тоді згідно властивості (6) маємо:

$$L(x'(t))=pX-x(0)=pX,\; L(y'(t))=pY-y(0)=pY.$$

Застосуємо перетворення Лапласа до кожного рівняння системи:

$$\begin{cases} L(x'(t)-5x+9y)=L(4), \\ L(y'(t)-x+5y)=L(e^{5t}). \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} pX-5X+9Y=\dfrac{4}{p}, \\ pY-X+5Y=\dfrac{1}{p-5}. \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} (p-5)X+9Y=\dfrac{4}{p}, \\ -X+(p+5)Y=\dfrac{1}{p-5}. \end{cases}\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix} p-5 & 9 \\ -1 & p+5 \end{vmatrix}=p^2-25+9=p^2-16,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{4}{p} & 9 \\ \dfrac{1}{p-5} & p+5 \end{vmatrix}=\frac{4p+20}{p}-\frac{9}{p-5}=\frac{4p^2-9p-100}{p(p-5)}\Rightarrow$$

$$\Delta_x = \frac{(4p-25)(p+4)}{p(p-5)}, \ \Delta_y = \begin{Vmatrix} p-5 & \dfrac{4}{p} \\ -1 & \dfrac{1}{p-5} \end{Vmatrix} = 1 + \frac{4}{p} = \frac{p+4}{p}.$$

За формулами Крамера

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(4p-25)(p+4)}{p(p-5)(p^2-16)} = \frac{4p-25}{p(p-5)(p-4)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p+4}{p(p^2-16)} = \frac{\cancel{p+4}}{p(p-4)\,\cancel{(p+4)}} = \frac{1}{p(p-4)}.$$

$$X(p) = \frac{4}{(p-5)(p-4)} - 25\frac{1}{p(p-5)(p-4)} \Rightarrow$$

$$X(p) \leftrightarrows 4\frac{e^{5t}-e^{4t}}{5-4} - 25\left(\frac{1}{20} - \frac{5e^{4t}-4e^{5t}}{20(5-4)}\right) \Rightarrow x(t) = -\frac{5}{4} - e^{5t} + \frac{9}{4}e^{4t},$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p-4)} \leftrightarrows \frac{e^{0t}-e^{4t}}{0-4} = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{5}{4} - e^{5t} + \dfrac{9}{4}e^{4t}, \\ y(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{e^{4t}}{4}. \end{cases}$ $-$ розв’язок даної системи.

<u>***Завдання 9.***</u> Розв’язати систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$ коли відомо, що $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$ Виконати перевірку отриманого результату.

<u>*Відповідь:*</u> $\begin{cases} x(t) = e^{t}, \\ y(t) = -e^{t}. \end{cases}$

<u>Завдання 10.</u> Розв'язати систему $\begin{cases} x + x' = e^t + y, \\ y' + y = e^t + x, \end{cases}$ коли відомо, що $x(0) = y(0) = 1$. Виконати перевірку отриманого результату.

<u>Відповідь:</u> $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t. \end{cases}$

<u>Завдання 11.</u> Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2y + 2x, \end{cases}$ коли відомо, що $x(0) = y(0) = 1$. Виконати перевірку отриманого результату для підтвердження йог правильності.

<u>Відповідь:</u> $\begin{cases} x(t) = e^t\left(\cos t - 2\sin t\right), \\ y(t) = e^t\left(\cos t + 3\sin t\right). \end{cases}$

6.4. Розв'язання інтегральних рівнянь

Ще одним із застосувань операційного числення є розв'язання деяких інтегральних рівнянь, рівнянь в яких під знаком інтеграла знаходиться невідома функція. Такими рівняннями, наприклад, є рівняння Вольтера першого (17) та другого порядку (18)

$$f(t)=\int_0^t k(t-x)\cdot\varphi(x)\,dx, \tag{17}$$

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t k(t-x)\cdot\varphi(x)\,dx. \tag{18}$$

Якщо функції $\varphi(t), f(t), k(t)$ є оригіналами, для яких $\Phi(p), F(p), K(p)$ являються їх відповідними зображеннями за Лапласом, то, враховуючи теорему лінійності та теорему про згортку оригіналів, інтегральним рівнянням будуть відповідати рівняння для зображень.

Рівнянню Вольтера першого порядку відповідає рівняння для зображень:

$$F(p)=K(p)\cdot\Phi(p)\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{K(p)}. \tag{19}$$

Рівнянню Вольтера другого порядку відповідає рівняння для зображень:

$$\Phi(p)=F(p)+K(p)\cdot\Phi(p)\Rightarrow$$

$$\Phi(p)-K(p)\cdot\Phi(p)=F(p)\Rightarrow\Phi(p)\left(1-K(p)\right)=F(p)\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-K(p)}. \tag{20}$$

Для зображень $\Phi(p)$ знаходимо оригінал $\varphi(t)-$розв'язок відповідного інтегрального рівняння.

Приклад 12. Розв'язати інтегральне рівняння,

$$\varphi(t)=2+\frac{1}{2}\int_0^t (t-x)^2\varphi(x)\,dx.$$

Розв'язання:

Враховуючи, що $\varphi(t)\rightleftarrows\Phi(p), 2\rightleftarrows\frac{2}{p}, t^2\rightleftarrows\frac{2}{p^3}$, отримаємо:

$$\Phi(p)=\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\frac{2}{p^3}\cdot\Phi(p)\Rightarrow\Phi(p)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)=\frac{2}{p}\Rightarrow\Phi(p)=\frac{2p^2}{p^3-1},$$

$$\Phi(p)=\frac{2p^2}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}\Rightarrow$$

$$\frac{2p^2}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{A\left(p^2+p+1\right)+(Bp+C)(p-1)}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}\Rightarrow$$

$$2p^2=A\left(p^2+p+1\right)+(Bp+C)(p-1)$$

$$2p^2=(A+B)p^2+(A-B+C)p+(A-C)$$

$$\begin{array}{c|c} p^2 & 2=A+B \\ p & 0=A-B+C \\ p^0 & 0=A-C \end{array}\Rightarrow\begin{cases}B=2-A,\\ C=A,\\ 0=A-2+A+A.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2/3,\\ C=2/3,\\ B=2-2/3=4/3.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\frac{2p+1}{p^2+p+1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p-1}+2\frac{p+1/2}{\left(p+1/2\right)^2+3/4}\right)\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p-1}+2\frac{p+1/2}{\left(p+1/2\right)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\right)\leftarrow\!\!\!\!\rightarrow\frac{2}{3}\left(e^t+2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}\cdot t}{2}\right)$$

<u>*Відповідь:*</u> $\varphi(t)=\frac{2}{3}e^t+\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}\cdot t}{2}$ – розв’язок рівняння.

<u>***Приклад 13.***</u> Розв’язати інтегральне рівняння,

$$\varphi(t)=t+\int_0^t(t-x)\cdot\varphi(x)\,dx.$$

<u>*Розв’язання:*</u>

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння і враховуючи, що $\varphi(t)\leftarrow\!\!\!\!\rightarrow\Phi(p),\, t\leftarrow\!\!\!\!\rightarrow\frac{1}{p^2}$, отримаємо:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p)\Rightarrow\Phi(p)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2}\Rightarrow\Phi(p)=\frac{1}{p^2}:\frac{p^2-1}{p^2}\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p^2}{p^2-1}=\frac{1}{p^2-1}\Rightarrow\Phi(p)=\frac{1}{p^2-1}\rightleftarrows\frac{e^t-e^{-t}}{2}=sh(t).$$

<u>*Відповідь:*</u> $\varphi(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ – розв’язок рівняння.

<u>***Приклад 14.***</u> Розв’язати інтегральне рівняння,

$$\varphi(t)=\cos t+\int_0^t(t-x)\cdot\varphi(x)\,dx\,.$$

<u>*Розв’язання:*</u>

Застосуємо перетворення Лапласа до рівняння. Розглянемо інтеграл як згортку і враховуючи, що $\varphi(t)\rightleftarrows\Phi(p),t\rightleftarrows\dfrac{1}{p^2},\cos t\rightleftarrows\dfrac{p}{p^2+1}$ отримаємо на основі властивостей

$$\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p)\Rightarrow\Phi(p)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{p}{p^2+1}\Rightarrow$$

$$\Phi(p)=\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2-1}\right)\Rightarrow\varphi(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\mathrm{ch}t).$$

<u>*Відповідь:*</u> $\varphi(t)=\dfrac{1}{2}(\cos t+\mathrm{ch}t)$ – розв’язок рівняння.

6.5. Обчислення невласних інтегралів від функцій спеціального виду

Властивостями (10), (11) встановлено зв'язок між невласними інтегралами від функцій спеціального виду і інтегралами від зображень. Це дає можливість обчислювати $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, $\int_0^{+\infty} t^n \cdot f(t) dt$.

Приклад 15. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Розв'язання:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} L(\sin t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = arctg(p)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 16. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$.

Розв'язання:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} L\left(e^{-2t} - e^{-t}\right) dp = \int_0^{+\infty} \left(L\left(e^{-2t}\right) - L\left(e^{-t}\right)\right) dp =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1}\right) dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|p+2| - \ln|p+1|\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|\frac{p+2}{p+1}\right|\right)\Bigg|_0^b,$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|\frac{b+2}{b+1}\right| - \ln\left|\frac{0+2}{0+1}\right|\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|\frac{1+\frac{2}{b}}{1+\frac{1}{b}}\right| - \ln 2\right) = \ln\left|\frac{1+0}{1+0}\right| - \ln 2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Відповідь: даний невласний інтеграл дорівнює $\ln 0,5$

Приклад 17. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t} \sin(t) dt$.

Розв'язання:

За формулою (12)

$$\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}\sin(t)\,dt=(-1)^{1+1}\int_0^{+\infty}\left(L\left(e^{-t}\sin t\right)\right)^{(1+1)}dp=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right)''dp=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right)'\Bigg|_0^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2p+2}{\left(p^2+2p+2\right)^2}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{2b+2}{\left(b^2+2b+2\right)^2}+\frac{2\cdot 0+2}{\left(0^2+2\cdot 0+2\right)^2}=0+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}\sin(t)\,dt=0,5$.

<u>***Приклад 18.***</u> Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-t}dt$.

<u>*Розв'язання:*</u>
За формулою (12)

$$\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-t}dt=(-1)^{2+1}\int_0^{+\infty}\left(L\left(e^{-t}\right)\right)^{2+1}dp=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{p+1}\right)'''dp=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{p+1}\right)''\Bigg|_0^b,$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right)'\Bigg|_0^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{(p+1)^3}\right)\Bigg|_0^b=-\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{(b+1)^3}-\frac{2}{(0+1)^3}\right)=$$

$$=-0+2\Rightarrow\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-t}dt=2.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\int_0^{+\infty} t^2\cdot e^{-t}dt=2$.

<u>***Завдання 12.***</u> Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-2t}dt$.

<u>*Відповідь:*</u> $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-2t}dt=\frac{1}{4}$.

6.6. Підсумовування степеневих рядів та розклад функцій в ряд

З теорії степеневих рядів відомо, що функція, яка на деякому інтервалі має обмежені абсолютні величини всіх похідних, може бути представлена степеневим рядом. Це забезпечується третьою умовою, якій повинен задовольняти оригінал. Отже, всі оригінали можуть бути представлені степеневим рядом.

Нехай функція $f(t)-$ оригінал, тоді

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+....+a_nt^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n ,$$

де коефіцієнти ряду, коефіцієнти Тейлора, можна знайти за формулою

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow a_0=f(0), a_1=\frac{f'(0)}{1!}, a_2=\frac{f''(0)}{2!}, a_3=\frac{f'''(0)}{3!},....$$

Отже справедливе представлення оригіналу: $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n$. Для знаходження $f(t)-$ суми ряду застосуємо перетворення Лапласа до степеневого ряду, враховуючи властивості і те, що $L\left(t^n\right)=\frac{n!}{p^{n+1}}$, отримаємо

$$L\left(f(t)\right)=F(p)=L\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}L\left(t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{n!}{p^{n+1}}\Rightarrow$$

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}. \qquad (21)$$

Отримана сума зображень – ряд, що є видозміненою геометричною прогресією, умова збіжності і суми якої відомі. Підсумувавши геометричну прогресію, згідно властивостей і таблиці відповідності перейдемо до відповідного оригіналу.

Приклад 19. Знайти функцію $f(t)$, яка є сумою ряду

$$1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4!}t^4+...+\frac{1}{n!}t^n+...$$

Розв'язання:

Застосуємо перетворення Лапласа до правої та лівої частини рівності:

$$1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4!}t^4+\ldots+\frac{1}{n!}t^n+\ldots=f(t),\quad f(t)-?$$

$$L\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\ldots+\frac{1}{n!}t^n+\ldots\right)=L\left(f(t)\right)\Rightarrow$$

$$L(1)+L(t)+\frac{1}{2}L\left(t^2\right)+\frac{1}{6}L\left(t^3\right)+\ldots+\frac{1}{n!}L\left(t^n\right)+..=F(p)$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{p^3}+\frac{1}{6}\frac{3!}{p^4}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{n!}{p^{n+1}}+\ldots=F(p)\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^5}\ldots+\frac{1}{p^{n+1}}+\ldots$$

Очевидно, зображення $F(p)$ представлено сумою геометричної прогресії, для якої $b_1=\frac{1}{p}-$перший її елемент і $q=\frac{1}{p}-$ її знаменник. Враховуючи, що $S=\frac{b_1}{1-q}-$ сума нескінченної геометричної прогресії при $|q|=\left|\frac{1}{p}\right|<1$, маємо $F(p)=\frac{1/p}{1-1/p}=\frac{1/p}{\frac{p-1}{p}}=\frac{1}{p-1}$.

Отже, $F(p)=\frac{1}{p-1}\ \overleftarrow{\rightarrow}\ f(t)=e^t\Rightarrow e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\ldots+\frac{1}{n!}t^n+\ldots$

<u>*Відповідь:*</u> $1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4!}t^4+\ldots+\frac{1}{n!}t^n+\ldots=e^t$

За допомогою операційного методу окрім знаходження функцій, які є сумами степеневих рядів, також можна дані функції розкладати в степеневі ряди, не використовуючи коефіцієнти Тейлора та відповідну формулу. Для цього для даної функції – оригіналу знаходять відповідне зображення, яке є раціональним дробом і отриманий дріб, звівши до суми геометричної прогресії, представляють геометричним рядом. Від нескінченного ряду, доданки якого представлені зображеннями, переходимо до ряду відповідних оригіналів, який і буде степеневим.

<u>Приклад 20.</u> Розкласти функцію $f(t)=\sin^2 t$ в ряд.

<u>Розв'язання:</u>

Відомо, що зображенням функції $f(t)=\sin^2(t)$ є $\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$, тобто $\sin^2 t \rightleftarrows \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. Допустивши, що зображення $\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$ є сумою нескінченної геометричної прогресії сума якої $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, перетворимо зображення

$$\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{2/p}{p^2+4}=\frac{2/p}{p^2\left(1+\left(2/p\right)^2\right)}=\frac{b_1}{1-q}\Rightarrow b_1=\frac{2}{p^3},\ q=-\left(\frac{2}{p}\right)^2\Rightarrow$$

$$S=b_1\left(1+q+q^2+q^3+\dots\right)=\frac{2}{p^3}\left(1-\frac{2^2}{p^2}+\frac{2^4}{p^4}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-2}}{p^{2n-2}}+..\right).$$

Отже, $F(p)=\dfrac{2}{p^3}-\dfrac{2^3}{p^5}+\dfrac{2^5}{p^7}-\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{p^{2n+1}}+\dots$. Враховуючи, що $\dfrac{1}{p^{n+1}}\rightleftarrows\dfrac{t^n}{n!}$ отримаємо:

$$\frac{2}{p^3}-\frac{2^3}{p^5}+\frac{2^5}{p^7}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{p^{2n+1}}+\dots\rightleftarrows f(t)\Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{2}{2!}t^2-\frac{2^3}{4!}t^4+\frac{2^5}{6!}t^6-\dots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}t^{2n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}t^{2n}$$

<u>Відповідь:</u> розклад даної функції в ряд має вигляд

$$\sin^2(t)=\frac{2}{2!}t^2-\frac{2^3}{4!}t^4+\dots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}t^{2n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}t^{2n}.$$

6.7. Аналіз перехідних процесів в електричних ланцюгах

Розглянемо електричний ланцюг (схема I) із змінним за величиною електричним струмом, приєднаємо до нього конденсатор, на обкладках якого відбувається накопичування заряду, що викликає в ланцюгу напругу

$$U_C(t) = -\frac{1}{C}\int_0^t \Im(t)\,dt,$$

де $\Im(t)$ – сила струму, C – ємність конденсатора. Знак „–" свідчить про те, що напруга $U_C(t)$ діє протилежно до прикладеної в ланцюгу „ЕРС" – $\mathrm{E}(t)$, що викликає додатній струм $\Im(t)$. В протилежний бік дії „ЕРС" направлена також і „ЕРС" самоіндукції, що виникає в котушці індуктивності. Величина цієї „ЕРС" представляється формулою

$$U_L(t) = -L\frac{d\Im(t)}{dt},$$

де L – індуктивність котушки.

Закон Ома, що записаний для ланцюга з опором R, має вигляд

$$\Im(t) = \frac{\mathrm{E}(t) + U_C(t) + U_L(t)}{R} \qquad (22)$$

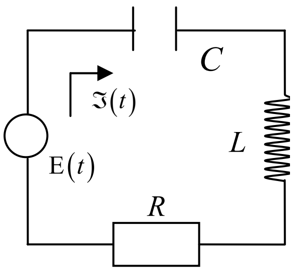

схема I

Застосуємо перетворення Лапласа до рівняння, вважаючи, що $\mathrm{E}(t) \rightleftarrows E(p)$, $\Im(t) \rightleftarrows I(p)$ і згідно теореми про диференціювання зображень

$$U_L(t) = -L\frac{d\Im(t)}{dt} \rightleftarrows -L\cdot p\cdot I(p),$$

а згідно теореми множення отримаємо

$$U_C(t) = -\frac{1}{C}\int_0^t \Im(t)\,dt = -\frac{1}{C}\int_0^t 1\cdot\Im(t)\,dt \Rightarrow -\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{p}\cdot I(p).$$

Тоді рівнянням, що виражає закон Ома, буде рівняння зображень:

$$I(p) = \frac{E(p) - \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{p}\cdot I(p) - L\cdot p\cdot I(p)}{R}.$$

Розв'язавши його відносно $I(p)$, маємо:

$$I(p)=\frac{E(p)}{R+\dfrac{1}{Cp}+Lp}. \tag{23}$$

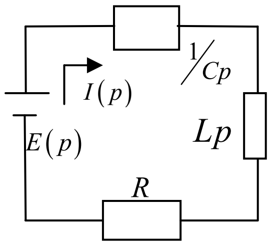

схема II

Це дозволяє схемі I поставити у відповідність схему II, в якій діє закон постійного струму. При цьому конденсаторам ємністю C відповідає опір $1/_{Cp}$, а котушкам індуктивності $-Lp$.

<u>Приклад 21.</u> Знайти струм у вивченому ланцюгу, коли „ЕРС" в ньому постійна.

<u>Розв'язання:</u>

За умови $\mathrm{E}(t)=\mathrm{E}_0=const\Rightarrow \mathrm{E}_0=\mathrm{E}_0\cdot 1 \rightleftarrows \dfrac{\mathrm{E}_0}{p}$ і відомо, що

$$I(p)=\frac{E(p)}{R+\dfrac{1}{Cp}+Lp}\Rightarrow I(p)=\frac{E_0/p}{R+\dfrac{1}{Cp}+Lp}=\frac{E_0}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}.$$

Встановимо $\Im(t)-$силу струму. Виділимо в знаменнику останнього дробу повний квадрат

$$I(p)=\frac{E_0}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}=\frac{E_0}{L}\cdot\frac{1}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}.$$

Позначимо $\dfrac{R}{2L}=\gamma,\ \sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}=\omega$. Тоді

$$I(p)=\frac{E_0}{L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\gamma)^2+\omega^2}\rightleftarrows\frac{E_0}{L\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t\Rightarrow \Im(t)=\frac{E_0}{L\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t$$

Отже $\Im(t)=\dfrac{E_0}{L\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t-$ сила струму при постійній „ЕРС" в ланцюгу.

Дослідимо отриманий результат у випадках:

1. Якщо значення характеристик R, L, C такі, що $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0,$ то $\omega-$ дійсне число, і в ланцюгу виникають затухаючі коливання. Якщо ж $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}<0, \omega-$ уявне число, тобто $\omega=i\Gamma$, де $\Gamma=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$, то, врахувавши зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями $\sin(i\cdot x)=i\cdot sh(x)=i\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, отримаємо $\Im(t)=\frac{E_0}{L\cdot\Gamma}e^{-\gamma t}\cdot\frac{e^{\Gamma t}-e^{-\Gamma t}}{2}$.

Затухання при цьому відбуваються без коливань.

2. Якщо ємність в ланцюгу відсутня, то $C\to\infty$. В цьому випадку

$$\Gamma=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{L\cdot\infty}}=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-0}=\frac{R}{2L}=\gamma\Rightarrow,$$

$$\Im(t)=\frac{E_0}{L\cdot\gamma}e^{-\gamma t}\cdot\frac{e^{\gamma t}-e^{-\gamma t}}{2}=\frac{E_0}{2L\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right),$$ а значить

$$\Im(t)=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \tag{24}$$

3. Якщо в ланцюгу відсутня і індуктивність $(L\to 0)$, матимемо

$$\Im(t)=\frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{25}$$

7. ЗНАХОДЖЕННЯ ОРИГІНАЛІВ ВІД СКЛАДНИХ ДРОБІВ

Як відомо, значна кількість зображень є правильним складним дробом. Для успішного використання таблиці відповідності, знаходження оригіналів за відомим зображенням, необхідно вміти розкладати правильні складні дроби на суму простих, що мають вигляд:

I. $\dfrac{A}{p-a}$;

II. $\dfrac{A}{(p-a)^m}$ $m-$ціле число, більше за одиницю;

III. $\dfrac{Ap+B}{ap^2+bp+c}$, коли $D=b^2-4ac<0$;

IV. $\dfrac{Ap+B}{\left(ap^2+bp+c\right)^k}$, коли $D=b^2-4ac<0$ і $k-$ціле число, більше за одиницю.

Оригінали зображень (I, II) знаходимо безпосередньо з таблиці

$$\frac{A}{p-a} \rightleftarrows Ae^{at}, \tag{26}$$

$$\frac{A}{(p-a)^m} \rightleftarrows At^{m-1}e^{at}. \tag{27}$$

Для знаходження оригіналів (III, IV), необхідно згадати чи засвоїти техніку виділення повних квадратів з тричлена ap^2+bp+c.

$$ap^2+bp+c=a\left(p^2+\frac{b}{a}p+\frac{c}{a}\right)=a\left(p^2+2\frac{b}{2a}p+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$a\left(\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4ac}\right)=a\left((p+\lambda)^2+m^2\right),\ m^2=\frac{4ac-b^2}{4ac},\lambda=\frac{b}{2a},$$

Враховуючи представлення знаменника зображення прийме вигляд

$$\frac{Ap+B}{a\left((p+\lambda)^2+m^2\right)}=\frac{A(p+\lambda)+B-A\lambda}{a\left((p+\lambda)^2+m^2\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{A}{a}\cdot\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+m^2}+\frac{B-A\lambda}{a}\cdot\frac{1}{(p+\lambda)^2+m^2},$$

відповідні оригінали дробів можна знайти в таблиці.

<u>Приклад 22.</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{p-2}{-3p^2+2p+5}.$$

<u>Розв'язання:</u>

Виділимо повний квадрат у знаменнику дробу

$$-3p^2+2p+5=-3\left(p^2-2\frac{1}{3}p-\frac{5}{3}\right)=-3\left(p^2-2\cdot\frac{1}{3}p+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{5}{3}\right)=$$

$$=-3\left(\left(p-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right)=-3\left(\left(p-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right),$$

бачимо, що знаменник представляється у вигляді добутку

$$-3\left(\left(p-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)=-3\left(p-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(p-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=-3\left(p-\frac{5}{3}\right)(p-1).$$

$$F(p)=\frac{p-2}{-3\left(p-\frac{5}{3}\right)(p-1)}=\frac{p-1-1}{-3\left(p-\frac{5}{3}\right)(p-1)}\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{1}{-3}\frac{1}{p-\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(p-\frac{5}{3}\right)(p-1)}\leftrightarrows\frac{-1}{3}e^{\frac{5}{3}t}+\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{5}{3}t}-e^t}{\frac{5}{3}-1}=\frac{1}{6}e^{\frac{5}{3}t}-\frac{1}{2}e^t$$

<u>Відповідь:</u> $f(t)=\frac{1}{6}e^{\frac{5}{3}t}-\frac{1}{2}e^t$.

<u>Приклад 23.</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{2p-1}{p^2+6p+13}.$$

<u>Розв'язання:</u>

Виділимо повний квадрат в знаменнику дробу

$$p^2+6p+13=p^2+2\cdot3p+9+4=(p+3)^2+4\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{2p-1}{(p+3)^2+4}=\frac{2p+6-6-1}{(p+3)^2+2^2}=2\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2}+\frac{-7}{(p+3)^2+2^2}$$

$$2\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2}\rightleftarrows 2e^{-3t}\cos 2t;\quad \frac{-7}{(p+3)^2+2^2}\rightleftarrows \frac{7}{2}e^{-3t}\sin 2t$$

$$f(t)=2e^{-3t}\cos 2t-\frac{7}{2}e^{-3t}\sin 2t.$$

<u>*Відповідь:*</u> оригінал даного зображення $f(t)=e^{-3t}\left(2\cos 2t-\frac{7}{2}\sin 2t\right)$.

<u>***Приклад 24.***</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{p-3}{p^2+8p+15}.$$

<u>*Розв'язання:*</u>

$$F(p)=\frac{p-3}{p^2+8p+15}\Rightarrow\frac{p-3}{p^2+2\cdot 4p+16-1}=\frac{p-3}{(p+4)^2-1}\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{p-3}{(p+4-1)(p+4+1)}=\frac{p+3-6}{(p+3)(p+5)}=\frac{1}{p+5}-\frac{6}{(p+3)(p+5)}\Rightarrow$$

$$f(t)=e^{-5t}-6\left(\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{-3+5}\right)=e^{-5t}-3e^{-3t}+3e^{-5t}\Rightarrow f(t)=4e^{-5t}-3e^{-3t}.$$

<u>***Завдання 13.***</u> Знайти оригінал за даним зображенням:

a. $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+4p+5}$; <u>*Відповідь:*</u> $e^{-2t}\cos t$.

b. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+6p+8}$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{3}{2}e^{-4t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}$.

c. $F(p)=\dfrac{-p+4}{p^2-2p+10}$; <u>*Відповідь:*</u> $e^{t}\left(\sin 3t-\cos 3t\right)$.

d. $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-p-2}$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{5}{3}e^{-t}+\dfrac{4}{3}e^{2t}$.

e. $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2-8p+7}$; <u>*Відповідь:*</u> $e^{t}+2e^{7t}$.

У випадку, коли зображенням є будь–який правильний дріб $\dfrac{P(p)}{Q(p)}$, знаменник якого розкладено на множники, тобто

$$Q(p)=(p-p_1)^{k_1}\cdot(p-p_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(a_1p^2+b_1p+c_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(a_1p^2+b_1p+c_1\right)^{s_m}$$

його можна представити у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{(p-p_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(p-p_1)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{p-p_2}+\frac{B_2}{(p-p_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_1}}{(p-p_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{C_1p+D_1}{a_1p^2+b_1p+c_1}+\frac{C_2p+D_2}{\left(a_1p^2+b_1p+c_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}p+D_{s_1}}{\left(a_1p^2+b_1p+c_1\right)^{s_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_1p+N_1}{a_mp^2+b_mp+c_m}+\frac{M_2p+N_2}{\left(a_mp^2+b_mp+c_m\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m}p+N_{s_m}}{\left(a_mp^2+b_mp+c_m\right)^{s_m}},$$

де $A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots,C_1,D_1,C_2,D_2,\ldots,M_1,N_1,M_2,N_2,\ldots -$ деякі дійсні коефіцієнти, що необхідно буде визначити.

Розглянемо вказану схему в частинних випадках.

Так, справедливі наступні розклади правильних складних дробів:

$$\frac{P_1(p)}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{B}{p-p_2}; \tag{28}$$

$$\frac{P_2(p)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{B}{p-p_2}+\frac{C}{p-p_3}; \tag{29}$$

$$\frac{P_3(p)}{(p-p_1)(p-p_2)^2}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{B}{p-p_2}+\frac{C}{(p-p_2)^2}; \tag{30}$$

$$\frac{P_4(p)}{(p-p_1)\left(ap^2+bp+c\right)}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{Bp+C}{ap^2+bp+c}. \tag{31}$$

<u>Приклад 25.</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{-2p^2+12}{p^3-5p^2+6p}$$

<u>Розв'язання:</u>

Представимо знаменник даного дробу як добуток множників

$$p^3-5p^2+6p=p\left(p^2-5p+6\right),$$

$$p^2-5p+6=0\Rightarrow D=b^2-4ac=25-24=1>0,\Rightarrow$$

$$p_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-1}{2}=2,\ p_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+1}{2}=3\Rightarrow$$

$$p^2-5p+6=(p-2)(p-3)\Rightarrow p^3-5p^2+6p=p(p-2)(p-3).$$

$$F(p)=\frac{-2p^2+12}{p^3-5p^2+6p}=\frac{-2p^2+12}{p(p-2)(p-3)}$$

Враховуючи, що знаменник даного дробу представляється як добуток трьох множників, то за формулою (29)

$$F(p)=\frac{-2p^2+12}{p(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}.$$

$$A,B,C-? \qquad \frac{-2p^2+12}{p(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}$$

$$=\frac{A(p-2)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-2)}{p(p-2)(p-3)}.$$

Маємо два рівні дроби з тотожно рівними знаменниками, а значить і тотожно рівними чисельниками, тобто

$$-2p^2+12\equiv A(p-2)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-2)\Rightarrow$$

$$-2p^2+12\equiv(A+B+C)p^2+(-5A-3B-2C)p+6A.$$

Враховуючи, що два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях, отримаємо систему і розв'яжемо її одним із відомих методів, наприклад методом підстановки

$$\begin{cases}-2=A+B+C,\\0=-5A-3B-2C,\\12=6A.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2,\\-2=2+B+C,\\0=-10-3B-2C,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2,\\B+C=-4,\\3B+2C=-10,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 2, \\ B = -C - 4, \\ 3B + 2C = -10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -C - 4, \\ 3(-C - 4) + 2C = -10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -C - 4, \\ -3C - 12 + 2C = -10, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 2, \\ B = -C - 4, \\ C = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -2, \\ C = -2, \end{cases} \Rightarrow F(p) = \frac{-2p^2 + 12}{p(p-2)(p-3)} = \frac{2}{p} + \frac{-2}{p-2} + \frac{-2}{p-3}.$$

Отже $F(p) \rightleftarrows 2 - 2e^{2t} - 2e^{3t}$.

<u>*Відповідь:*</u> $f(t) = 2 - 2e^{2t} - 2e^{3t}$.

Роботу по знаходженню значень коефіцієнтів можна раціоналізувати, виходячи з означення тотожності, за яким:

тотожність – це рівність, яка справедлива при всіх допустимих значеннях змінних і параметрів.

<u>***Приклад 26.***</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 4}{p^3 + p^2 - 4p - 4}$$

<u>*Розв'язання:*</u>

Розкладемо знаменник даного дробу на множники:

$$p^3 + p^2 - 4p - 4 = p^2(p+1) - 4(p+1) = (p+1)(p^2 - 4) \Rightarrow$$

$$p^3 + p^2 - 4p - 4 = (p+1)(p-2)(p+2).$$

Враховуючи, що знаменник даного дробу представляється як добуток трьох множників за формулою (29)

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 4}{(p+1)(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2}.$$

Встановимо значення коефіцієнтів A, B, C:

$$\frac{p^2 - p + 4}{(p+1)(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2} =$$

$$= \frac{A(p-2)(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+1)(p-2)}{(p+1)(p-2)(p+2)} \Rightarrow$$

$$p^2 - p + 4 \equiv A(p-2)(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+1)(p-2).$$

Підставивши в тотожність довільні значення p (рекомендовано нулі знаменника) отримаємо:

$$\begin{cases} p=-1 \Rightarrow 1+1+4=A(-3)(-1+2), \\ p=2 \Rightarrow 4-2+4=B(2+1)(2+2), \\ p=-2 \Rightarrow 4+2+4=C(-2+1)(-2-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=-3A, \\ 6=12B, \\ 10=4C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2, \\ B=\tfrac{1}{2}, \\ C=\tfrac{5}{2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{-2}{p+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p-2}+\frac{5}{2}\frac{1}{p+2} \Leftarrow\!\!\!\rightarrow -2e^{-t}+0,5e^{2t}+2,5e^{-2t}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $f(t)=-2e^{-t}+0,5e^{2t}+2,5e^{-2t}$.

<u>***Приклад 27.***</u> Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{p^2+3p-1}{p^3+2p^2+4p+8}$$

<u>*Розв'язання:*</u>

Розкладемо знаменник даного дробу на множники:

$$p^3+2p^2+4p+8=(p+2)p^2+4(p+2)=(p+2)(p^2+4)$$

Враховуючи, що знаменник даного дробу представляється як добуток двох множників, то за формулою (31) маємо

$$F(p)=\frac{p^2+3p-1}{p^3+2p^2+4p+8}=\frac{p^2+3p-1}{(p+2)(p^2+4)}=\frac{A}{p+2}+\frac{Bp+C}{p^2+4}.$$

Встановимо значення коефіцієнтів A,B,C:

$$\frac{p^2+3p-1}{(p+2)(p^2+4)}=\frac{A}{p+2}+\frac{Bp+C}{p^2+4}=\frac{A(p^2+4)+(Bp+C)(p+2)}{(p+2)(p^2+4)} \Rightarrow$$

$$p^2+3p-1 \equiv A(p^2+4)+(Bp+C)(p+2).$$

Розкриємо дужки і згрупуємо доданки за степенями p .

$$A(p^2+4)+(Bp+C)(p+2)=(A+B)p^2+(2B+C)p+(4A+2C) \Rightarrow$$

$$p^2+3p-1 \equiv (A+B)p^2+(2B+C)p+(4A+2C).$$

Прирівняємо коефіцієнти многочленів, що розміщені при відповідних степенях:

$$\begin{cases} p^2 \,\big|\, 1 = A + B, \\ p^1 \,\big|\, 3 = 2B + C, \\ p^0 \,\big|\, -1 = 4A + 2C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A, \\ 3 = 2(1 - A) + C, \\ -1 = 4A + 2C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A, \\ C = 1 + 2A, \\ -1 = 4A + 2C, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B = 1 - A, \\ C = 1 + 2A, \\ -1 = 4A + 2(1 + 2A), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A, \\ C = 1 + 2A, \\ A = -\dfrac{3}{8}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{11}{8}, \\ C = \dfrac{1}{4}, \\ A = -\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{p^2 + 3p - 1}{p^3 + 2p^2 + 4p + 8} = \frac{-3}{8}\frac{1}{p+2} + \frac{\frac{11}{8}p + \frac{1}{4}}{p^2 + 4} \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{-3}{8}\frac{1}{p+2} + \frac{11}{8}\frac{p}{p^2 + 2^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^2 + 2^2} \leftrightarrows \frac{-3}{8}e^{-2t} + \frac{11}{8}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t.$$

<u>*Відповідь:*</u> $f(t) = \dfrac{-3}{8}e^{-2t} + \dfrac{11}{8}\cos 2t + \dfrac{1}{8}\sin 2t$.

<u>***Завдання 14.***</u> Знайти оригінал за даним зображенням:

a. $\dfrac{p-1}{p^3 - 5p^2 + 3p + 9}$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{-3}{8}e^{-t} - \dfrac{1}{8}te^{3t} + \dfrac{3}{8}e^{3t}$.

b. $\dfrac{p^2 - 2}{p^3 + 5p^2 + 4p - 10}$; <u>*Відповідь:*</u> $\dfrac{-1}{17}e^{t} + \dfrac{18}{17}e^{-3t}\cos t - \dfrac{30}{17}e^{-3t}\sin t$.

<u>***Приклад 28.***</u> Знайти оригінал $e^{-2p}\dfrac{p}{p^2+9}$.

<u>*Розв'язання:*</u>

Оскільки зображення представлене добутком, один з множників якого e^{-2p} то скористаємось теоремою запізнювання:

$$f(t - m) \rightleftarrows e^{-p\,m}F(p),\ m = 2\ .$$

Оригінал дробу $\dfrac{p}{p^2+9} = \dfrac{p}{p^2+3^2} \leftrightarrows \cos 3t$, а значить $e^{-2p}\dfrac{p}{p^2+9} \leftrightarrows \cos 3(t-2)$.

<u>*Відповідь:*</u> $\cos 3(t-2)$ – оригінал.

Приклад 29. Знайти оригінал $e^{-p}\dfrac{p+2}{p^2+4p+5}$.

Розв'язання:

Оскільки зображення представлене добутком, один з множників якого e^{-p} то скористаємось теоремою запізнювання:

$$f(t-m)\rightleftarrows e^{-p\,m}F(p),\ \text{при}\ m=1.$$

Оригінал дробу $\dfrac{p+2}{p^2+4p+5}=\dfrac{p+2}{p^2+2p2+4+1}=\dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}$, звідки за таблицею відповідності $\dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}\rightleftarrows e^{-2\,t}\cos t$. Враховуючи запізнення аргументу $e^{-p}\dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}\rightleftarrows e^{-2\,(t-1)}\cos(t-1)$ – оригінал даного виразу.

Завдання 15. Знайти оригінал за даним зображенням:

a. $e^{-4p}\dfrac{p+3}{p^2+6p+10}$; *Відповідь:* $e^{-3(t-4)}\cos(t-4)$.

b. $e^{-3p}\dfrac{p}{p^2-4p+5}$; *Відповідь:* $e^{2(t-3)}\left(\cos(t-3)+2\sin(t-3)\right)$.

8. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Знайдіть оригінал $f(t)$, якщо відомо його зображення $F(p)$.

№ варіанту	$F(p)$	$F(p)$	№ варіанту	$F(p)$	$F(p)$
1.	а) $\frac{e^{-2p}}{p+2}$,	б) $\frac{2p+3}{3p^3+p-4}$.	11.	а) $\frac{e^{-3p}}{p^2+16}$,	б) $\frac{1}{p^3+p}$.
2.	а) $\frac{e^{-3p}}{p^2+1}$,	б) $\frac{p+1}{p^3+2p^2+10p}$.	12.	а) $\frac{e^{-10p}}{p+9}$,	б) $\frac{2p+5}{3p^2+7p-10}$.
3.	а) $\frac{e^{-5p}}{p+3}$,	б) $\frac{p-2}{p^3+3p^2+2p}$.	13.	а) $\frac{e^{-8p}}{p^2-1}$,	б) $\frac{7p+4}{6p^2+5p+13}$.
4.	а) $\frac{e^{-3p}}{(p+2)^2}$,	б) $\frac{2p-3}{p^3+4p^2+4p}$.	14.	а) $\frac{e^{-6p}}{p+2}$,	б) $\frac{2p-5}{p^2+2p+5}$.
5.	а) $\frac{e^{-4p}}{p+1}$,	б) $\frac{2p+5}{p^3+p-10}$.	15.	а) $\frac{e^{-4p}}{p+3}$,	б) $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.
6.	а) $\frac{e^{-7p}}{p^2-1}$,	б) $\frac{3p^2+2p+7}{p^3-3p^2+3p-1}$.	16.	а) $\frac{e^{-7p}}{p^2+5}$,	б) $\frac{p}{(p+2)^2(p-3)}$.
7.	а) $\frac{e^{-6p}}{p+1}$,	б) $\frac{p}{p^3+1}$.	17.	а) $\frac{e^{-2p}}{3p+2}$,	б) $\frac{3p+1}{(p^2+8)(p-1)}$.
8.	а) $\frac{e^{-6p}}{p^2+4}$,	б) $\frac{3p-1}{p^3-1}$.	18.	а) $\frac{e^{-6p}}{p^2+7}$,	б) $\frac{2p-5}{(p+5)(p^2-p)}$.
9.	а) $\frac{e^{-2p}}{p^2+9}$,	б) $\frac{2p+1}{p^3+2p^2+6}$.	19.	а) $\frac{e^{-4p}}{2p+5}$,	б) $\frac{3p+4}{(p+2)(p^2+p)}$.
10.	а) $\frac{e^{-p}}{p^2-25}$,	б) $\frac{p}{p^2-p+7}$.	20.	а) $\frac{e^{-11p}}{p^2-4}$,	б) $\frac{6p-5}{p(p^2+4p+4)}$.

2. Знайти частинний розв’язок диференціальних рівнянь. Зробити перевірку розв’язку а).

№ варіанту	рівняння	початкові умови
1. а)	$2x''+3x'-2x=3e^{6t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=-1.$
2. а)	$x''-4x'+3x=2e^{5t}$,	$x(0)=1,\ x'(0)=-2.$
3. а)	$x''+2x'-35x=2e^{3t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=3.$
4. а)	$x''-2x'-8x=5e^{5t}$,	$x(0)=-1,\ x'(0)=0.$
5. а)	$2x''-5x'-3x=11e^{-7t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=5.$
6. а)	$6x''-5x'+x=7e^{-2t}$,	$x(0)=-3,\ x'(0)=0.$
7. а)	$x''-8x'+15x=2e^{7t}$,	$x(0)=2,\ x'(0)=1.$
8. а)	$x''+4x'-5x=12e^{3t}$,	$x(0)=-2,\ x'(0)=0.$
9. а)	$x''-5x'+4x=-3e^{-5t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=-3.$
10.а)	$x''-5x'-36x=2e^{5t}$,	$x(0)=-5,\ x'(0)=1.$
11.а)	$x''-4x'-5x=3e^{2t}$,	$x(0)=-1,\ x'(0)=2.$
12.а)	$x''+x'-6x=5e^{6t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=-5.$
13.а)	$x''-11x'+30x=7e^{-1,5t}$,	$x(0)=-1,5,\ x'(0)=1.$
14.а)	$x''-x'-30x=2e^{2,5t}$,	$x(0)=3,\ x'(0)=-1.$
15.а)	$x''+x'-30x=3e^{-t}$,	$x(0)=-1,\ x'(0)=2.$
16.а)	$2x''-3x'+2x=2,5e^{t}$,	$x(0)=2,\ x'(0)=7.$
17.а)	$x''+3x'+2x=7e^{-2t}$,	$x(0)=0,\ x'(0)=0.$
18.а)	$x''-6x'-7x=5e^{3t}$,	$x(0)=-11,\ x'(0)=0.$
19.а)	$x''-10x'+16x=5e^{-4t}$,	$x(0)=-4,\ x'(0)=1.$
20.а)	$x''+10x'+16x=2e^{7t}$,	$x(0)=1,\ x'(0)=-2,5.$

Вважати, що початковими умовами в завданні б) для всіх варіантів є $x(0) = x'(0) = 0$.

№ варіанту		рівняння
1.	б)	$9x'' + 6x' + x = 2\sin^2 3t.$
2.	б)	$4x'' - 4x' + x = 3\cos^2 2t.$
3.	б)	$x'' - 2x' + x = 2\cos^2 3t.$
4.	б)	$x'' - 4x' + 4x = 3\sin^2 t.$
5.	б)	$x'' - 10x' + 25x = \sin^2 5t.$
6.	б)	$x'' + 18x' + 81x = -\cos^2 5t.$
7.	б)	$x'' - 14x' + 49x = 3\cos^2 4t.$
8.	б)	$16x'' - 8x' + x = -2\cos^2 7t.$
9.	б)	$25x'' + 10x' + x = 7\sin^2 2t.$
10.	б)	$x'' - 8x' + 16x = -3\cos^2 t.$
11.	б)	$x'' + 6x' + 9x = 2\cos^2 3t.$
12.	б)	$x'' + 4x' + 4x = 7\cos^2 2t.$
13.	б)	$x'' - 22x' + 121x = 3\cos^2 3t.$
14.	б)	$x'' + 12x' + 36x = -5\sin^2 t.$
15.	б)	$x'' + 8x' + 16x = \sin 3t \cos t.$
16.	б)	$x'' + 20x' + 100x = 2\sin 3t \sin 2t.$
17.	б)	$x'' - 30x' + 225x = \cos t \cos 2t.$
18.	б)	$x'' + 28x' + 196x = \sin t \cos 3t.$
19.	б)	$x'' - 26x' + 169x = 2\sin 3t \cos 2t.$
20.	б)	$x'' + 24x' + 144x = 2\sin^2 3t$

3. Знайти $x(t), y(t)$ – розв’язок однорідної системи диференціальних рівнянь. У всіх випадках $x(0) = y(0) = 1$.

№ варіанту	система	№ варіанту	система
1.	$\begin{cases} x' = -7x + 5y, \\ y' = 4x - 8y. \end{cases}$	11.	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x' = -5x - 8y, \\ y' = -3x - 3y. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x' + 4x + 6y = 0, \\ y' + 4x + 2y = 0. \end{cases}$	13.	$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 6y. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -10x - y. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$	15.	$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - 3y. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	17.	$\begin{cases} x' = 2x - 9y, \\ y' = x + 8y. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x' = -5x, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	19.	$\begin{cases} x' = 4y, \\ y' = x. \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = -7x - 3y. \end{cases}$

4. Знайти $x(t), y(t)$ – розв’язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь. У всіх випадках $x(0) = y(0) = 0$.

№ варіанту	система	№ варіанту	система
1.	$\begin{cases} x' - 2x - y = 3e^{-6t}, \\ y' + 6x + 3y = 2e^{2t}. \end{cases}$	11.	$\begin{cases} x' + 4x - y = 5e^{3t}, \\ y' - 3x + 2y = 6e^{-6t}. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x' - x + 3y = -2e^{t}, \\ y' + 4x - 5y = e^{5t}. \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x' - 11x + 3y = 3e^{t}, \\ y' + 6x - 4y = -6e^{2t}. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x' + 2x - 3y = 0, \\ y' - 2x + y = 2e^{-3t}. \end{cases}$	13.	$\begin{cases} x' + 7x - y = 4e^{3t}, \\ y' + x + 5y = 0. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x' - 7x + 5y = e^{4t}, \\ y' - 5x + 3y = 2e^{-2t}. \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x' + 2x + 5y = -11e^{-10t}, \\ y' - 4x - 7y = 0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x' - 11x + 5y = 3e^{2t}, \\ y' - 8x + 3y = 2e^{3t}. \end{cases}$	15.	$\begin{cases} x' + 3x + 2y = e^{t}, \\ y' - 3x - 4y = 4e^{-3t}. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x' - 7x + 6y = -6e^{5t}, \\ y' + 2x - 3y = 0. \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x' - 3x + 3y = 7e^{-5t}, \\ y' + 6x - 6y = 5e^{-7t}. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x' - 6x + 6y = 2e^{3t}, \\ y' + 3x + 4y = 7e^{-2t}. \end{cases}$	17.	$\begin{cases} x' - 3x - 3y = e^{-5t}, \\ y' - 4x + 4y = 3e^{4t}. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x' + 6x + 3y = 3e^{2t}, \\ y' - 4x - y = 5e^{t}. \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x' + 3x - 4y = 2e^{-t}, \\ y' + 3x - 19y = 3e^{7t}. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x' - 2x - y = 0, \\ y' + 8x + 2y = 7e^{6t}. \end{cases}$	19.	$\begin{cases} x' + x + 12y = -2e^{2t}, \\ y' - x - 7y = e^{3t}. \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x' - 11x + 5y = 3e^{2t}, \\ y' - 8x + 3y = 2e^{3t}. \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x' - 7x - 6y = 3e^{t}, \\ y' + 5x + 4y = 4e^{2t}. \end{cases}$

5. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтера першого чи другого порядку

№ варіанту	інтегральне рівняння	№ варіанту	інтегральне рівняння
1.	$\varphi(t)=\sin t+\int_0^t (t-x)\cdot\varphi(x)dx.$	11.	$\varphi(t)=3e^{2t}+4\int_0^t e^{2(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$
2.	$\varphi(t)=e^{-t}+\frac{1}{2}\int_0^t (t-x)^2\cdot\varphi(x)dx.$	12.	$\varphi(t)=1+2t+2\int_0^t \cos(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$
3.	$t=\int_0^t e^{(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$	13.	$\varphi(t)=1+\frac{1}{6}\int_0^t (t-x)^3\cdot\varphi(x)dx.$
4.	$\varphi(t)=1+\frac{1}{3}\int_0^t \sin 2(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$	14.	$\varphi(t)=t+\int_0^t \sin(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$
5.	$\varphi(t)=\sin+2\int_0^t \cos(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$	15.	$\varphi(t)=6\sin 2t-4\int_0^t \cos 2(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$
6.	$\varphi(t)=\frac{t^2}{2}+\int_0^t (t-x)e^{-(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$	16.	$\varphi(t)=3t+5\int_0^t (t-x)\cdot\varphi(x)dx.$
7.	$\varphi(t)=e^{t}-2\int_0^t \cos(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$	17.	$\varphi(t)=6e^{3t}+\int_0^t e^{3(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$
8.	$\sin t=\int_0^t \cos(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$	18.	$\varphi(t)=t+2\int_0^t \left((t-x)-\sin(t-x)\right)\cdot\varphi(x)dx.$
9.	$\sin t=\int_0^t e^{(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$	19.	$\varphi(t)=\cos t+\int_0^t e^{(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$
10.	$t^2e^{t}=\int_0^t e^{2(t-x)}\cdot\varphi(x)dx.$	20.	$t+t^2=\int_0^t \cos(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андре Анго, Математика для электро– и радиоинженеров. – М.: ”Наука”, 1967 г., 780 с.
2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э., Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: ”Наука”, 1968 г., 416 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. Ч. II. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: ”Высш. шк. ”, 1986 г. – 415 с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: ”Наука”, 1971 г., 256 с.
5. Письменний Д. Т., Конспект лекций по высшей математике Ч. 2 – М.: ”Рольф”, 2000. – 256 с.

Додаток А

ТАБЛИЦЯ ВІДПОВІДНОСТІ

№ з/п	Зображення	Оригінал
1)	$1/p$	$\eta(t)=1$
2)	$\dfrac{1}{p^2}$	t
3)	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
4)	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	$e^{\alpha t}$
5)	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$	$te^{\alpha t}$
6)	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{\alpha t}$
7)	$\dfrac{1}{p^2+m^2}$	$\dfrac{1}{m}\sin(m\ t)$
8)	$\dfrac{1}{p^2-m^2}$	$\dfrac{e^{mt}-e^{-mt}}{2m}=\dfrac{1}{m}\mathrm{sh}(m\cdot t)$
9)	$\dfrac{p}{p^2+m^2}$	$\cos(m\ t)$
10)	$\dfrac{p}{p^2-m^2}$	$\dfrac{e^{mt}+e^{-mt}}{2}=\mathrm{ch}(m\cdot t)$
11)	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+m^2}$	$e^{-\lambda t}\cos(m\ t)$
12)	$\dfrac{m}{(p+\lambda)^2+m^2}$	$e^{-\lambda t}\sin(m\ t)$

№ з/п	зображення	оригінал
13)	$\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}$	$\sin^2 t$
14)	$\frac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$	$\cos^2 t$
15)	$\frac{p^2-m^2}{\left(p^2+m^2\right)^2}$	$t\cos(m\ \ t)$
16)	$\frac{p}{\left(p^2+m^2\right)^2}$	$\frac{t}{2m}\sin(m\ \ t)$
17)	$\frac{1}{p^2\left(p^2+m^2\right)}$	$\frac{1}{m^3}\left(mt-\sin(m\ \ t)\right)$
18)	$\frac{1}{\left(p^2+m^2\right)^2}$	$\frac{1}{2m^3}\left(\sin(m\ \ t)-mt\cos(mt)\right)$
19)	$\frac{p^2}{\left(p^2+m^2\right)^2}$	$\frac{1}{2m}\left(\sin(m\ \ t)+mt\cos(m\ \ t)\right)$
20)	$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{e^{\alpha\, t}-e^{\beta\, t}}{\alpha-\beta}$
21)	$\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{\alpha e^{\alpha\, t}-\beta e^{\beta\, t}}{\alpha-\beta}$
22)	$\frac{1}{p(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha e^{\beta\, t}-\beta e^{\alpha\, t}}{\alpha\beta\left(\alpha-\beta\right)}$
23)	$\frac{1}{p^2(p-\alpha)}$	$\frac{e^{\alpha\, t}-\alpha\ \ t-1}{\alpha^2}$
24)	$\frac{1}{p(p-\alpha)^2}$	$\frac{1-\left(1-\alpha\ \ t\right)e^{\alpha\, t}}{\alpha^2}$