ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ПРИ СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

Бессараб В.И.
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра автоматики и телекоммуникаций
E-mail: bvi@fcita.dn.ua

Abstract
Bessarab V.I. Choice and substantiation of performance criterion at the optimal control synthesis in discrete-event systems. *In the article it is shown that integral estimates associated with energy consumption for control can be used for DES performance criterion estimation. For its quantitative assessment it is possible to use any system behavior sample path satisfying monotonicity condition on the parameter included in control. It is considered that derivatives with respect to the parameter included in control, which are computed in discrete time points of sample path, can be used as performance criterion estimation.*

Общая постановка проблемы.

Проблема выбора критерия качества является одной из важнейших при синтезе оптимальных законов управления объектами различной физической природы. Анализ публикаций по данному вопросу для дискретно-непрерывных систем (ДНС) показывает, что в настоящее время отсутствует единая концепция в решении данной научной проблемы. Существует множество частных решений, которые в большинстве своем адаптируют известные методики синтеза для непрерывных или классических дискретных систем под специфику ДНС [1, 2, 3]. При этом, очень часто используются аналитические выражения для известных критериев (обобщенный квадратичный, быстродействия), которые очень сложно интерпретировать под специфику дискретно-непрерывных процессов. До настоящего времени аналитические модели процессов больше ориентировались на анализ явлений в ДНС, а проблемы управления решались на уровне эмпирических условий, полученных из оценок в результате такого анализа [2, 3, 4].

Реальные технические объекты, относящиеся к дискретно-непрерывному классу, рассматриваются как совокупность элементарных процессов, которые должны координироваться (управляться) проектируемой системой управления. Для описания динамики таких процессов в форме, приемлемой к технике управления, удобно использовать аппарат Max-Plus алгебры [3, 4]. В этом описании вводится понятие состояния процесса. Обязательным условием возможности координации является наличие хотя бы одного управляемого извне перехода к следующему состоянию или возможность воздействовать на входной поток ДНС.

Только для ДНС с управляемыми переходами или управляемыми входными потоками можно говорить об управлении вообще и об оптимальном управлении в частности. Применительно к техническим системам задача синтеза управления дискретно-непрерывными объектами сводится к разработке управляющего алгоритма, который обеспечивает координацию причинной и временной циклически повторяющейся последовательности элементарных процессов, составляющих производственный цикл системы и если речь идет об оптимальном управлении, оптимизируется некоторый критерий качества.

Постановка задачи исследований.

В качестве критерия оптимальности обычно используют функционал $J(\Theta)$, с помощью которого можно получить количественную оценку качества управления ДНС. Θ -

некоторый параметр, который непосредственно получают из выборочной траектории поведения дискретно-непрерывной системы. Для различных выборочных траекторий ДНС, полученных экспериментально или путем моделирования, можно оценить $J(\Theta_i)$ для каждой известной выборочной траектории поведения системы. Однако такой способ мало пригоден в силу своей громоздкости и низкой вычислительной эффективности.

Когда параметр Θ_i является вещественной переменной, $J(\Theta_i)$ можно продифференцировать $\frac{\partial J(\Theta_i)}{\partial \Theta_i}$ и получить оценки, которые могут быть использованы в оптимизационных процедурах [1].

Одним из возможных способов оценки производной $\frac{\partial J(\Theta_i)}{\partial \Theta_i}$ является способ конечно-разностной оценки и прямого моделирования поведения ДНС системы. Пусть для некоторой траектории, при некотором Θ_i определен $J(\Theta_i)=L(\Theta_i)$. Дадим приращение $\Delta\Theta_i$ и вычислим $L(\Theta_i+\Delta\Theta_i)$. Полученная оценка $L_\Delta = L(\Theta_i+\Delta\Theta_i)-L(\Theta_i)$ является оценкой для $\frac{\partial J(\Theta_i)}{\partial \Theta_i}$. Но этот подход также предполагает множество итераций при *n* – выборочных траекториях, что требует достаточно большого числа вычислений. Кроме того, градиентное оценивание требует малых $\Delta\Theta_i$, а деление на малое число приводит к массе вычислительных проблем.

В рамках данной статьи решается задача исследования в следующей постановке: если имеется хотя бы одна базовая траектория работы ДНС, и получена хотя бы одна оценка для $J(\Theta)$, то, используя методы теории анализа возмущений [5] и опираясь на методы расширенной системы временного анализа получить состоятельный критерий качества для оптимальной системы управления процессом.

Методика решения задачи и результаты исследований.

Используя подходы формальной теории управления дискретно-непрерывными системами можно ввести следующие обозначения и определения.

Пусть $\sum$ - это непустое конечное множество событий, которые могут быть выполнены в ДНС. Цикл ДНС – это последовательный набор событий из $\sum$. Длина цикла является неотрицательным целым числом, соответствующим числу событий, составляющих цикл.

Формально процессы в управляемой ДНС можно представить:

$$G=\left(X,\sum,f,\sum G,x_0\right), \tag{1}$$

где X – пространство состояний множества *G*;

$\sum$ – множество событий, которые возможны в *G*;

f – локальная функция перехода;

$f(X,e)=X'$, означает, что существует переход в состояние X' из состояния *X* при выполнении события *e*.

$\sum G(x)$ - является набором всех событий *e*, для которых определена $f(X,e)$. $\sum G(x)$ называют выполняемым набором *G* в состоянии *X*;

X_0 – начальное состояние G.

Представленная форма системы управления является системой событийного типа, т. е. случайные события из конечного множества порождают управление, которое оптимизирует критерий качества без учета времени управления. Для введения временного фактора в управление объединяют каждое событие e со счетчиком времени (временная оценка значимости), которая показывает оставшееся расчетное время до события e. Временная ценность события e начинается с «времени жизни», которое является элементом временной последовательности $v_e = \{v_{e,1}, v_{e,2}, \ldots\}$. Другими словами, модель наделенная временной структурой определенной из последовательности $V = \{v_e, e \in \sum\}$. И тогда управление $G = \left(X, \sum, f, \sum_G, x_0, V\right)$ определяется шестью кортежами.

В стохастических системах счетчик времени может быть заменен функциями распределения вероятности временных параметров ДНС

$$F = \{F_e, e \in \sum\} \tag{2}$$

В этом случае вне зависимости от «времени жизни» используют модель события F_e. Обычно события генерируются как процесс Семи-Маркова, который дает алгоритм генерации выборочной траектории поведения ДНС. Выборочная траектория определяется последовательностью $\{e_k, t_k\}$,

где $k = 1, 2 \ldots$;

e_k - k-ое событие из $\sum$;

t_k - необходимое “время жизни” этого события.

В некоторых случаях $F = \{x_k, t_k\}$, где x_k - k-ое состояние, которое достигается за время t_k.

Покажем, как эти рассуждения описывают простейшую одноканальную СМО с неограниченной очередью на обслуживание, формируемой на условиях FIFO. На таких принципах работают отдельные блоки реальных технических систем.

Если $\sum = \{a, d\}$ - множество событий ДНС; a – прибытие заявки; d – убытие заявки после обслуживания.

$X = \{0,1,2\ldots\}$ - общее количество заявок в системе в очереди и в процессе обслуживания.

Предполагаем, что событие a осуществимо всегда (очередь не ограничена), событие d – имеет место только при $x > 0$, так как заявка не может покидать участок, если он пуст.

Динамика этой системы описывается простейшими функциями перехода

$$\begin{aligned} f(x, a) &= x + 1 \quad \text{для } \forall x, \\ f(x, d) &= x - 1 \quad \text{для } \forall x > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Структура счетчика времени определяется a, d и функциями распределения F_a и F_d соответственно.

Траектория состояний может быть получена, если задать некоторое начальное состояние $x_0 \in X$.

Будем использовать буквы греческого алфавита (α, β) для индексации событий, а буквы латинского алфавита (i, j, k, n, m) для подсчета вариантов событий.

T_k – k-ое время для событий в выборочной траектории ДНС. $T_{\alpha,n}$ – n-ое время для события типа α.

Для рассматриваемой ДНС когда наступает событие α во время $T_{\alpha,n}$, то оно должно активироваться в некоторый момент $T_{\beta,n} < T_{\alpha,n}$ изменением события β. В свою очередь, событие β в T_β должно быть активировано некоторым γ во время $T_{\gamma,n} < T_{\beta,n}$ и так далее до T = 0.Отсюда можно определить длительность k-ого обслуживания α, т.е. с тех пор как оно появилось в системе в $T_{\beta,n}$ до $T_{\alpha,n}$.

$$Y_{\alpha,n} = T_{\alpha,n} - T_{\beta,n} \tag{4}$$

Таким образом, всегда можно записать

$$T_{\alpha,n} = v_{\beta 1,k1} + \ldots + v_{\beta s} \tag{5}$$

Для последовательности событий $\beta_1,\ldots,\beta_s$.

Выражение может быть записано в более удобной форме с помощью «функций запуска» с переменными $\{0,1\}$ и определяемыми как:

$\eta(\alpha,n;\beta,m) = 1$, если n–ое событие α запускается m-ым событием β;

$\eta(\alpha,n;\beta,n) = 1$ для всех $\alpha \in \sum, n = 1,2\ldots$;

$\eta(\alpha,n;\beta',m') = 1$ если $\eta(\alpha,n;\beta,m) = 1$ и

$\eta(\alpha,n;\beta',m') = 1$ для некоторых $\beta \in \sum$

$\eta(\alpha,n;\beta,m) = 0$ во всех остальных случаях.

С учетом «функции запуска»

$$T_{\alpha,n} = \sum_{\beta,m} v_{\beta,m}\eta(\alpha,n;\beta,m) \tag{6}$$

Иными словами, последовательность пар (β,m), которая приводит $T_{\alpha,n}$ с функциями запуска $\eta(\alpha,n;\beta,m) = 1$, определяется запускающей последовательностью (α,n).

Так как параметр Θ влияет на время обслуживания события $F_\alpha(t,\Theta)$ можно утверждать, что Θ оказывает влияние на время обслуживания всех заявок последовательности $\{v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2},\ldots\}$.

Производную $dv_\alpha(\Theta)/d\Theta$ можно подсчитать:

$$\frac{dv_{\alpha,k}}{d\Theta} = -\frac{\left[\partial F_\alpha(t;\Theta)/\partial\Theta\right]_{(v_{\alpha,k,\Theta})}}{\left[\partial F_\alpha(t;\Theta)/\partial t\right]_{(v_{\alpha,k,\Theta})}}, \tag{7}$$

где $[\bullet]$ означает в каждой дискретной точке траектории ДНС.

Производная от $T_{\alpha,n}$ по Θ может быть определена при выполнении двух условий:

- для всех $\alpha \in \sum, F_\alpha(t,\Theta)$ является непрерывной функцией по Θ и $F_\alpha(0,\Theta)$ - определено;
- для всех $\alpha \in \sum$ и $k = 1,2,...,v_{\alpha,k}$ является непрерывно дифференцируемой по Θ.

Тогда

$$\frac{dT_{\alpha,n}}{d\Theta} = \sum_{\beta,m} \frac{dv_{\beta,m}}{d\Theta} \eta(\alpha,n;\beta,m) \tag{8}$$

Если взять выборочную траекторию одноканальной СМО, рис. 1, можно показать, как вычисляются соответствующие производные

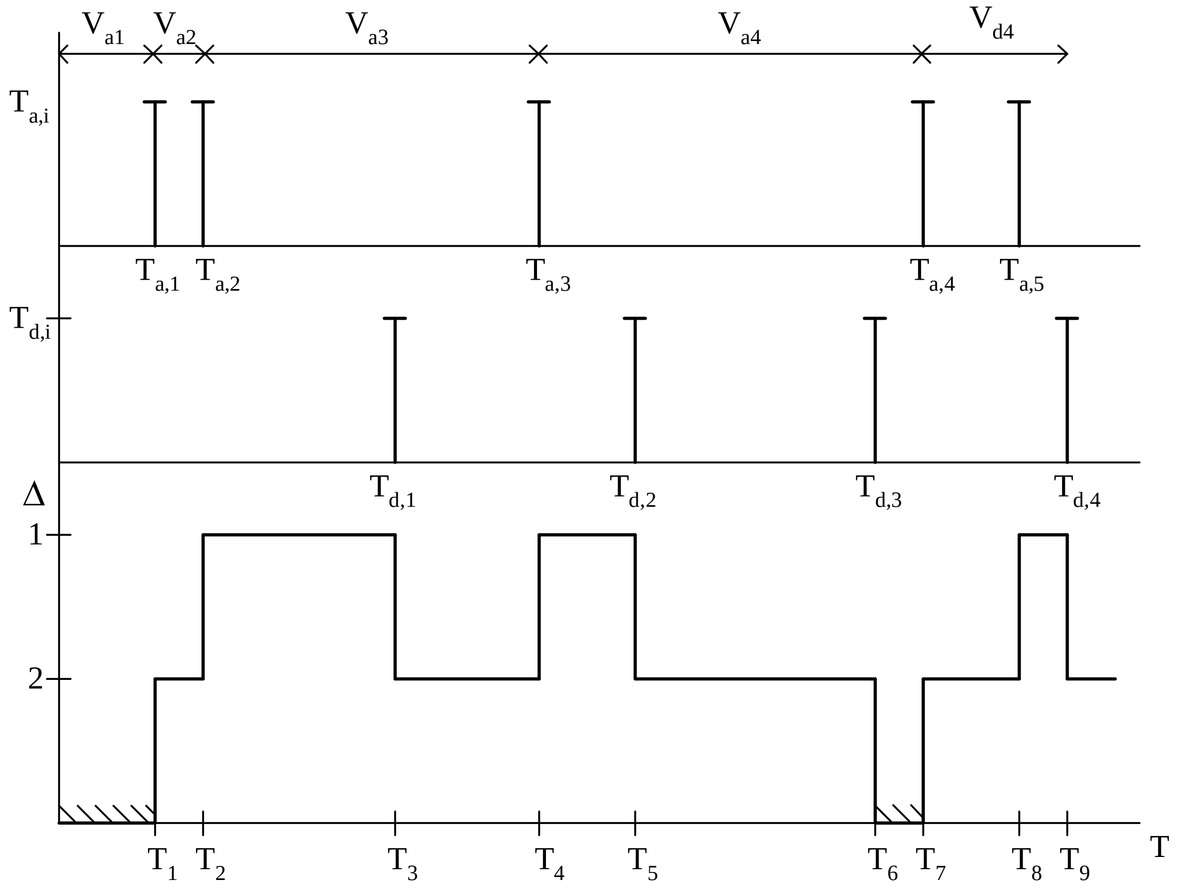

Рис. 1. Выборочная траектория одноканальной СМО

Для события $T_{d,4}$ из рисунка 1 очевидно:

$$T_{d,4} = v_{d,4} + v_{\alpha,4} + v_{\alpha,3} + v_{\alpha,2} + v_{\alpha,1} \tag{9}$$

Тогда производная может быть определена:

$$\frac{dT_{d,4}}{d\Theta} = \frac{dv_{d,4}}{d\Theta} + \frac{dv_{\alpha,4}}{d\Theta} + \frac{dv_{\alpha,3}}{d\Theta} + \frac{dv_{\alpha,2}}{d\Theta} + \frac{dv_{\alpha,1}}{d\Theta} \tag{10}$$

Обобщая процедуры определения производных по времени на основании выборочной траектории ДНС, вводится определение очереди для рассматриваемой системы.

Изменение состояния очереди обусловлено двумя причинами. В начальный момент $\Delta_\alpha = \frac{dv_{\alpha,1}}{d\Theta}$, если задано x_0, во всех остальных случаях $\alpha \in \sum \ \Delta_\alpha = 0$; если α активировано β, тогда:

$$\begin{aligned} &\Delta_\alpha = \Delta_\beta + \frac{dv_\alpha}{d\Theta} \\ &\Delta_d = \Delta_d + \frac{dv_d}{d\Theta}, \text{ пока } x > 1 \\ &\Delta_d = \Delta_\alpha + \frac{dv_d}{d\Theta}, \text{ если } x = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

В качестве оценок для рассматриваемой системы можно использовать следующие критерии на различных конечных интервалах наблюдения за системой:

$$\begin{aligned} &L_T(\Theta) = \int_0^T C(x(t,\Theta))dt; \\ &L_M(\Theta) = \int_0^{T_M} C(x(t,\Theta))dt; \\ &L_{\alpha,M}(\Theta) = \int_0^{T_{\alpha,M}} C(x(t,\Theta))dt; \end{aligned} \tag{12}$$

где $C(x,t,\Theta)$ - некоторая оценка, ассоциированная с затратами энергии (выполняемой работой) ДНС в состоянии $x(t,\Theta)$.

Тогда:

$L_T(\Theta)$ - оценка затрат на управление на некотором конечном интервале наблюдения (например, полный цикл ДНС);

$L_M(\Theta)$ - оценка затрат на управление, полученная путем наблюдения за М вариациями событий;

$L_{\alpha,M}(\Theta)$ - оценка затрат на управление, полученная на интервале времени обслуживания заявки α.

Для простейшей одноканальной системы (Рис.1), приняв $C(x(t,\Theta)) = x(t,\Theta)$, мы можем оценивать минимальную среднюю длину очереди в системе за время [0,T] как $L_T(\Theta)/T$.

Необходимым условием является непрерывность по Θ выборочной траектории. Тогда оценка критерия легко может быть найдена:

$$\frac{dL_M}{d\Theta} = \sum_{k=0}^{M-1} C(x_k)[\frac{dT_{k+1}}{d\Theta} - \frac{dT_k}{d\Theta}] \tag{13}$$

Ключевым является условие, что состояние x_k является неизменным на интервале $[T_k, T_{k+1}]$, и тогда, например:

$$L_M = \sum_{k=0}^{M-1} C(x_k)[T_{k+1} - T_k] \tag{14}$$

В общем случае:

$$\frac{dS_i}{d\Theta} = \sum_{j=1}^{i} \frac{dv_i}{d\Theta}; \tag{15}$$

Тогда, например:

$$L_{d,M}(\Theta) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} S_i, \tag{16}$$

а производная для $L_{d,M}(\Theta)$ может быть посчитана как:

$$\frac{dL_{d,M}}{d\Theta} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{i} \frac{dv_{d,j}}{d\Theta}. \tag{17}$$

Таким образом, на основе информации, полученной из выборочной траектории, мы всегда можем получить дифференциальную оценку критерия качества по параметру Θ, входящему в управление, и мы можем гарантировать, что производная $dL/d\Theta$ является объективной оценкой критерия качества J. Это вытекает из условия, когда математическое ожидание и дифференцирование «снизу» равны:

$$E\left[\frac{dL}{d\Theta}\right] = \frac{dE[L]}{d\Theta} \tag{18}$$

В реальных технических системах параметр Θ является монотонным [4,5], не имеет разрывов, а это гарантирует выполнение условия (18).

Выводы.

1. В рамках данной статьи показано, что для оценки критерия качества ДНС можно использовать интегральные оценки, ассоциированные с энергетическими затратами на управление.

2. Установлено, что для их количественной оценки можно использовать любую выборочную траекторию поведения системы, удовлетворяющую условиям монотонности по параметру, входящему в управление.

3. Показано, что в качестве оценок значимости критерия качества можно использовать значения производных по параметру, входящему в управление, которые вычисляются в дискретные моменты времени выборочной траектории.

Литература

1. F. Bacelli, G. Cohen, and B. Gaujal. Recursive equations and basic properties of timed Petri nets. Journal of Discrete Event Dynamic Systems, 2:415-439, 1992.

2. X. Cao. Realization probabilities – the dynamics of queueing systems. Springer-Verlag, 1994.

3. R. Cieslag, C. Desclaux, A. Fawaz, and P. Varaija. Supervisory control of discrete-event processes with partial observations. IEEE Trans. Automatic Control, 33(3):249-260, March 1988.

4. C.G. Cassandras and S.G. Strickland. Observable augmented systems for sensitivity analysis of Markov and semi-Markov processes. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-34, 10:1026-1037, 1989.

5. P. Glasserman and D.D. Yao. Monotone Structure in Discrete-Event Systems. John Wiley and Sons, New York, 1994.