

УДК 534.38

©2012. В.Н. Беловодский, М.Ю. Сухоруков

## МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПОСТРОЕНИЮ БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Построение бифуркационных диаграмм является одной из основных задач анализа динамических систем и основным инструментом для этих целей, в последние десятилетия, является метод точечных отображений, восходящий к Пуанкаре. В работе развивается традиционный для 50-х годов подход, основанный на методе гармонического баланса. Изложены концептуальные особенности его применения при учете большого количества гармоник, приводятся результаты его использования к анализу колебательной системы с одной степенью свободы и полиномиальной упругой и диссипативной характеристиками. Проведен анализ колебаний системы в зонах суб- и супергармонических резонансов, отмечены некоторые новые особенности в их возбуждении.

**Ключевые слова:** бифуркация, многорежимность, резонанс, полигармоническое колебание, периодический режим, численный анализ.

**Введение.** Еще 50-60 лет назад метод гармонического баланса (МГБ) был одним из основных инструментов исследования различных колебательных систем, широко использовался для нахождения их бифуркационных, в частности, амплитудно- и фазочастотных диаграмм [1, 2]. В последующие годы центр тяжести исследований нелинейных систем переместился в область более глубокого изучения явлений многорежимности, в частности, построения областей притяжения [2], изучения хаотических аттракторов [3] и разработки подходов к классификации периодических режимов [4]. Это востребовало использование различных вариантов стробоскопических методов или, отображений Пуанкаре по современной терминологии, которые, в настоящее время, и являются доминирующими при исследовании нелинейных динамических систем [5]. Вместе с тем, МГБ позволяет свести решение системы дифференциальных уравнений к системе полиномиальных, а это позволяет, используя теорему Берштейна [6, 7], определить число решений таких систем. А последующее применение для их анализа подходов тропической геометрии и, развивающихся в ней, методов продолжения к решению полиномиальных уравнений [8] или же методов интервальной арифметики [9], открывает реальную перспективу выполнения глобального динамического анализа нелинейных систем с полиномиальной нелинейностью. Первым шагом в этом направлении представляется построение систем полиномиальных уравнений, что, для динамических систем с таким типом нелинейности, успешно реализуется с использованием комплексной версии МГБ. Ниже демонстрируется его применение к исследованию реальной динамической системы.

**Описание подхода, построение системы полиномиальных уравнений.**

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \mu\omega_0(1 + \beta\xi + \gamma\xi^2)\frac{d\xi}{d\tau} + (1 + \beta\xi + \gamma\xi^2)\xi = P \cos \eta\tau, \quad (1)$$

которое в безразмерной форме описывает движение одномассной вибромашины с силовым или кинематическим возбуждением [10]. В данном случае предполагается кубический характер упругой характеристики и коэффициент сопротивления в системе пропорциональным коэффициенту жесткости упругих связей [11].

Полагая решение в виде

$$\xi(\tau) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\eta\tau}, \quad (2)$$

где  $N$  — число учитываемых гармоник,  $c_n = \overline{c_{-n}}$ . После подстановки (2) в (1), выполнения операций дифференцирования, возведения в степень и последующего сравнения коэффициентов при равных степенях  $e^{in\eta\tau}$ , получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \left(1 + i\mu\omega_0 n \frac{1}{q} \eta - n^2 \frac{1}{q^2} \eta^2\right) c_n + \beta \sum_{k=-N}^N c_k c_{n-k} \left(1 + i\mu\omega_0 (n-k) \frac{1}{q} \eta\right) + \\ & + \gamma \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m} \left(1 + i\mu\omega_0 (n-k-m) \frac{1}{q} \eta\right) = \\ & = \begin{cases} P/2, & n = \pm q \\ 0, & n \neq \pm q \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n, n-k, n-k-m \in [-N, N]$ , а  $q$  — управляющий параметр. Если  $q = 1$ , тогда анализируются режимы периода  $T$ , т.е. основные и супергармонические, если же  $q = 2, 3, \dots$ , — субгармонические режимы порядка  $1 : q$ . Предполагая тригонометрическую форму решения (2) в виде

$$\xi(\tau) = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\eta\tau - \varphi_n), \quad (4)$$

получим, что амплитуда  $n$ -ой гармоники  $A_n = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$ , а начальная фаза  $\varphi_n = \arccos \frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}}$  или  $\varphi_n = -\arccos \frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}}$ , если  $\Im c_{-n} < 0$ , где  $\varphi_n \in [-\pi, \pi]$ .

Количество уравнений и неизвестных  $c_n, c_{-n}$  в системе (3) равно  $(2N + 1)$ . Дальнейшее численное ее решение при последовательном изменении частоты  $\eta$  или иного параметра системы, далее, — бифуркационного, и позволяет получить бифуркационную диаграмму.

**Бифуркационные диаграммы. Особенности программной реализации.**

Инструментом исследования является численное моделирование с использованием разработанных приложений среды MATLAB для построения бифуркационных, в частности, амплитудно- и фазочастотных (АЧХ и ФЧХ), характеристик, анализа

спектрального и фазового состава стационарных колебаний, определения областей притяжения периодических режимов [12]. Быстродействие программных средств MATLAB сильно зависит от использования в программах матричных операций. По этим соображениям, для описания левых частей системы уравнений использован специальный вид матрицы Тейлица. Дело в том, что уравнения, получаемые в результате применения МГБ, например, система (3), содержат ресурсоемкие операции суммирования. При описании таких сумм в виде вложенных программных циклов, время выполнения программы заметно увеличивается и, в ряде случаев примерно в 300 раз может превышать время работы алгоритма, использующего матрицы Тейлица.

В настоящей версии пакета для получения решений в области поиска используется метод мултистарта, что обеспечивается определенным объемом начальных пробных точек, формирование которых производится с использованием Quasi-Random LpTau последовательности [13]. Предположительные точки бифуркации диаграмм устанавливаются путем контроля смены знака якобиана системы уравнений (3) или потери устойчивости отслеживаемого режима, что, в свою очередь, устанавливается по величине модулей мультипликаторов его уравнения в вариациях [14]. Программа спектрального и фазового анализа базируется на численном решении задачи Коши для уравнения (1), определении его стационарных решений и последующем их численном разложении в конечные ряды Фурье вида (4).

**Результаты, анализ.** На рис. 1–4 представлены полученные результаты. В разложениях (2) учитывались пять гармонических составляющих и при визуализации на рисунках указаны лишь те из них, амплитуды которых составляли не менее 1% от наибольшей. Отметим некоторые особенности.

Прежде всего, обратим внимание на ярко выраженный полигармонический характер колебаний в зонах супергармонических резонансов. В частности, при резонансе порядка 2 : 1 амплитуда бигармонической составляющей может составлять до половины основной (см. рис. 1). Несомненно, эта особенность в поведении рассматриваемой системы могла бы быть изучена с учетом дополнительных факторов, однако, уже и это количественное соотношение свидетельствует об определенном практическом подтексте [14] и могла бы учитываться при разработке вибрационных машин технологического назначения.

При данном уровне сопротивления и симметричной характеристике упругой силы ( $\beta = 0$ ) из числа младших удалось обнаружить лишь субрезонансы порядка 1 : 3 (см. рис. 1а, 1б). Характерным является наличие трех пар субгармонических режимов, причем режимы каждой группы (устойчивые, — сплошная линия, неустойчивые, — пунктирная) отличаются лишь сдвигом фаз составляющих гармоник и совпадают при параллельном переносе, т.е.  $\xi(\tau) = \xi(\tau - s)$ . Элементарный анализ дает основания для обобщения этой особенности и позволяет сформулировать следующее предположительное заключение: В нелинейной системе (1) множество субгармонических режимов порядка 1 :  $n$  может быть разделено на один или несколько непересекающихся классов. Каждый класс содержит по  $2n$  режимов, из которых только  $n$  являются устойчивыми. Режимы устойчивых и неустойчи-

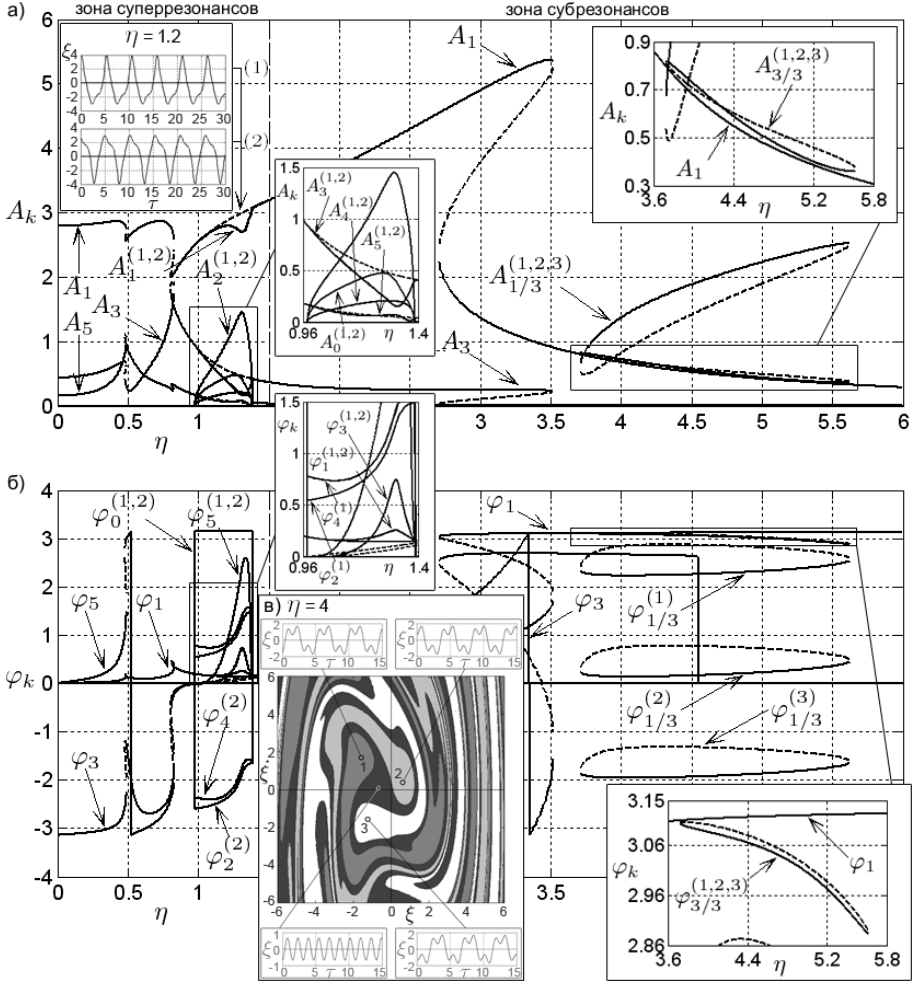


Рис. 1. АЧХ (а), ФЧХ (б) и области притяжения (в) для  $\mu\omega_0 = 0.1, \beta = 0, \gamma = 0.5, P = 10$ , где  $A_k^{(m)}, \varphi_k^{(m)}$  — амплитуда и начальная фаза  $k$ -ой гармоники  $m$ -ого режима

вых групп идентичны относительно сдвига и совпадают при замене переменной  $\tau := \tau + 2\pi m/\omega$ , где  $m = 0, 1, \dots, (n - 1)$ . Или, что то же самое, фазы их гармоник отличаются на  $2\pi km/n$ , где  $k$  — номер гармоники,  $m$  — номер режима.

Области притяжения (см. рис. 1в) свидетельствуют о существенном запасе устойчивости режимов порядка 1 : 3. Это, в частности, проявляется в том, что размеры ядер сечений  $\tau = 0$  их областей притяжения лежат в диапазоне 0.5..0.6 и вполне сравнимы с ядром основного режима. В силу сделанного выше заключения, их можно рассматривать как сечения  $\tau = \tau_0 + 2\pi/n$  области притяжения любого из режимов устойчивой группы.

На рис. 2 представлены бифуркационные диаграммы для резонанса 1 : 3. Из числа особенностей отметим его обострение при введении асимметрии  $\beta$  харак-

теристики (рис. 2а), а также экстремальный характер зависимости при изменении  $P$  (рис. 2б).

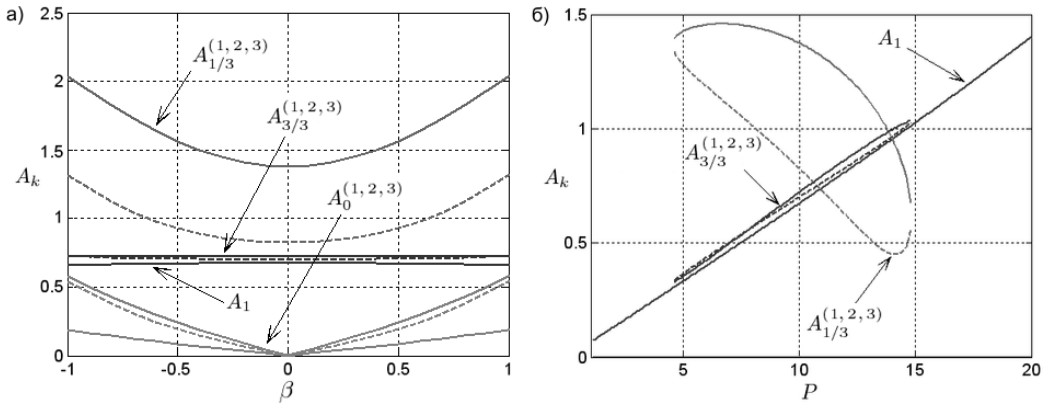


Рис. 2. Бифуркационные кривые для режимов порядка 1 : 3 при варьировании: а)  $\beta$ ; б)  $P$

После снижения сопротивления в системе были обнаружены и субгармонические режимы порядка 1 : 2 (см. рис. 3). Их число и характер подтверждают сформулированную выше гипотезу.

Асимметрию упругой характеристики (рис. 4а) и асимметрию возбуждения (рис. 4б) можно рассматривать как факторы, которые способствуют появлению резонанса 1 : 2. Последний рисунок свидетельствует, что даже незначительного дополнительного возмущения на частоте субгармоники может оказаться достаточным для формирования интенсивных режимов порядка 1 : 2.

Отметим „энергетические“ особенности субгармонических режимов. Выполним следующий умоглядный эксперимент. Рассмотрим, например, значение  $\eta = 3.65$  (рис. 3). Ему соответствуют  $A_{1/2} \approx 2.16$ ,  $A_{2/2} \approx 1.08$ . Положив в (1)  $\beta = \gamma = 0$ , мы получим линейную вибромашину. Используем для определения ее амплитуды колебаний расчетное соотношение  $A \approx P/(\eta^2 - 1)$ , справедливое при  $\eta \gg 1$ . Получим, что для обеспечения полигармонического состава колебаний в линейной вибромашине, сформированной таким образом, необходимо бигармоническое возбуждение со значениями его силовых составляющих равных  $P_{1/2} \approx 5.03$ ,  $P_1 \approx 13.31$ . Таким образом, их суммарная величина составляет 18.34 единиц, против 10 единиц в нелинейной. Данное обстоятельство позволяет надеяться и на осязаемое снижение энергоемкости вибромашин, работающих в режиме субгармонических резонансов. Дополнительное упрощение конструкции, которое сопровождается использованием одного вибровозбудителя вместо двух, представляется очевидным.

Рис. 5 демонстрирует возможности МГБ в исследовании более тонких особенностей в поведении нелинейных динамических систем. На рис. 5а представлены результаты, любезно предоставленные нам автором [16], полученные путем реализации отображения Пуанкаре. На рис. 5б представлены бифуркационные диаграммы, полученные с использованием МГБ, при этом общее число учитываемых

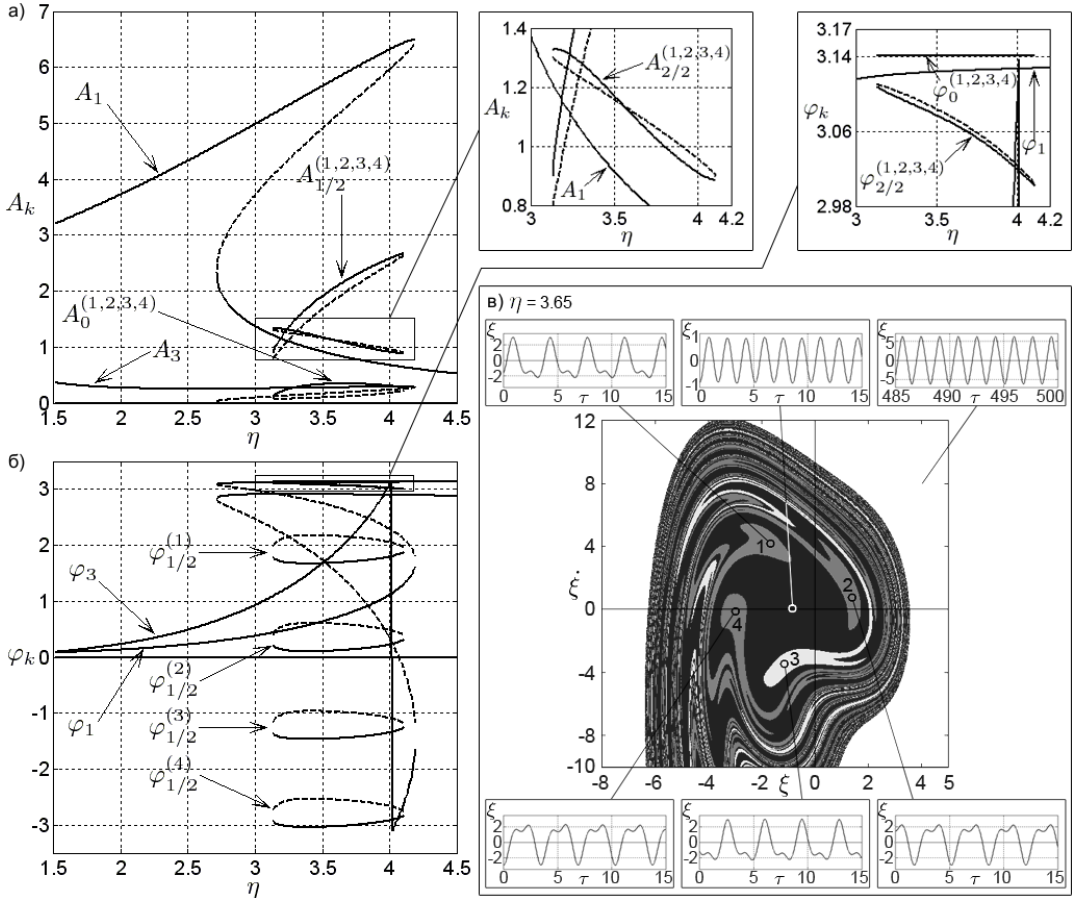


Рис. 3. АЧХ (а), ФЧХ (б) и области притяжения (в) для режимов порядка  $1 : 2$  и  $\mu\omega_0 = 0.05$

гармоник в разложениях (2) составляло 12. Оба расчета выполнены для значений параметров  $\mu\omega_0 = 0.05$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $P = 10$ ,  $q = 12$ .

На рис. 5б показаны режимы порядков  $1 : 1$ ,  $1 : 2$ ,  $1 : 3$ ,  $1 : 6$ ,  $1 : 12$  и не указаны —  $1 : 3$ , существующие при  $\eta > 3.7$ , и  $1 : 5$ . В зоне субгармонического резонанса  $1 : 3$  присутствует хаотический аттрактор, на рис. 5а он обозначен как UPI-3, Unstable Periodic Infinitium, отражающий факт бесконечного удвоения периодов режимов, кратных 3, на рис. 5б процесс удвоения периода колебаний отражен путем построения режимов  $1 : 3$ ,  $1 : 6$  и  $1 : 12$ . Кроме этого, в диапазоне  $3.075 \leq \eta \leq 3.325$  с помощью МГБ были определены дополнительные 48 режимов, они показаны на рис. 5б пунктиром.

**Закключение.** На примере одномерной динамической системы продемонстрированы возможности метода гармонического баланса в части исследования стационарных движений динамических систем с полиномиальной нелинейностью. В данном случае его использование помогло обратить внимание и вскрыть некоторые новые особенности в возбуждении комбинационных резонансов. Концептуальное

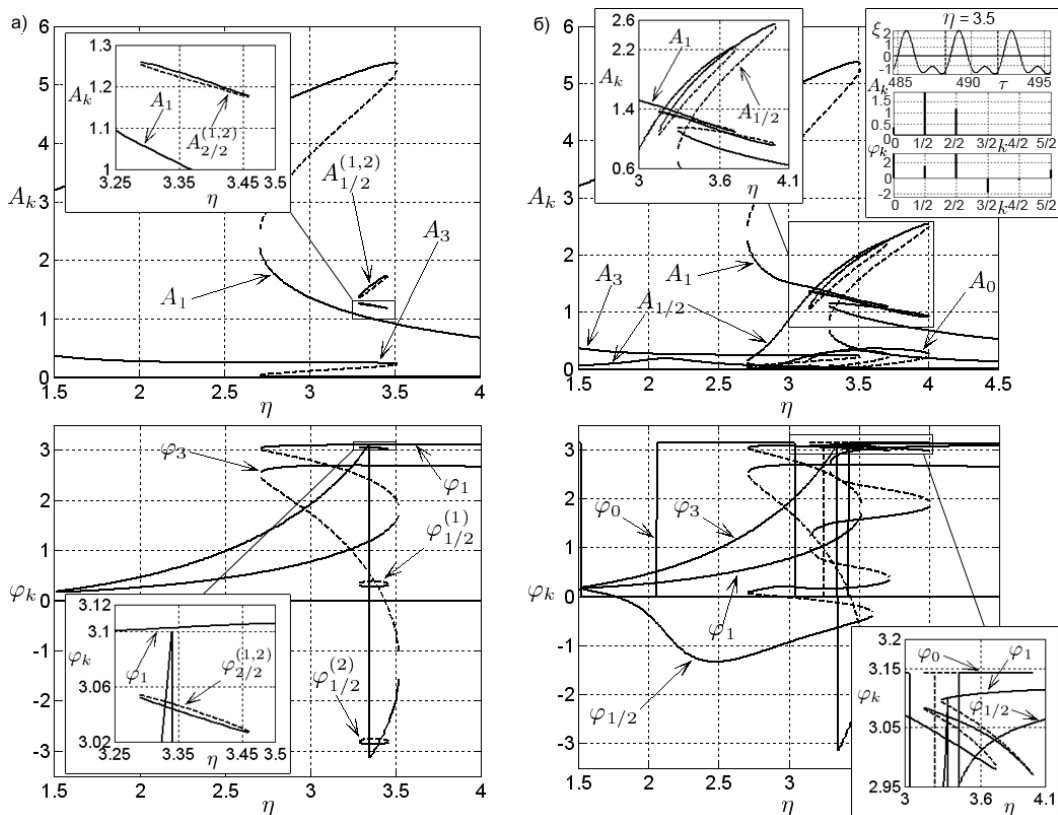


Рис. 4. АЧХ и ФЧХ для режимов порядка 1 : 2 при введении: а) асимметрии характеристики  $\beta = 0.1$ ; б) асимметрии возбуждения  $P_{1/2} \cos(0.5\eta\tau)$ , где  $P_{1/2} = 0.5$

обобщение изложенного подхода для анализа динамических систем более высокой размерности, в принципиальном плане, представляется вполне очевидным.

С точки зрения практических приложений, представленные результаты демонстрируют полигармонические возможности комбинационных резонансов и некоторые резервы их управления при реальных значениях силовых и диссипативных факторов. К числу очередных вопросов на пути к практическому их использованию можно отнести проблему выхода вибрационных машин на проектный режим в условиях его ограниченной устойчивости. Идеальным выходом из этого положения представляется вариант упругой характеристики, для которой выбранный комбинационный режим является глобально устойчивым.

В части использования МГБ для глобального анализа динамических систем такого типа одна из проблем заключается в отделении комплексно сопряженных решений полиномиальных систем уравнений. Дело в том, что движениям динамической системы, в данном случае, — решениям уравнения (1), соответствуют лишь сопряженные решения системы (3), в то время, как теорема Бернштейна, по существу, предлагает метод определения их общего числа. Насколько это может

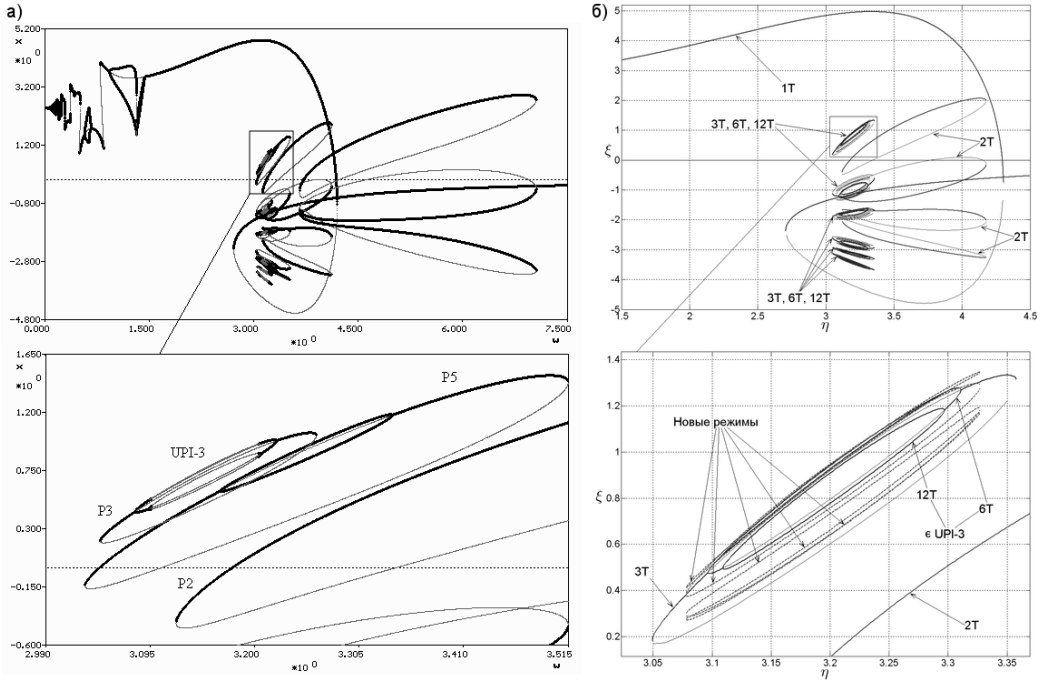


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы вынужденных колебаний, полученные: а) в [16]; б) МГБ

оказаться существенным, приведем следующий пример. При трех учитываемых гармониках в разложениях (2) и  $\eta = 4.0$  общее число решений системы (3), определенное с помощью программы MixedVol [17], реализующей расчет смешанных объемов многогранников Ньютона, равно 414, в то время как число комплексно-сопряженных решений при  $q = 3$ , определенное с помощью метода мультистарта, оказалось равным всего 6.

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
2. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах: пер. с англ. / Т. Хаяси. — М.: Мир, 1968. — 432 с.
3. Ueda Y. The Road to Chaos (Cover, Preface, Technical Comments) / Y. Ueda, R.H. Abraham, H.B. Stewart. — Aerial Press. Kyoto University Research Information Repository, Kyoto, 1992. — 224 p.
4. Zakrzhevsky M.V. Bifurcation Theory of Nonlinear Dynamics and Chaos. Periodic Skeletons and Rare Attractors / M.V. Zakrzhevsky // Rare Attractors and Rare Phenomena in Nonlinear Dynamics. Proceeding of the 2nd International Symposium RA'11. — Riga, RTU, 2011. — pp. 1–10.
5. Thompson J.M.T. Nonlinear Dynamics and Chaos. Second Edition / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. — John Wiley & Sons, Ltd, 2002. — 438 p.
6. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений / А.Г. Хованский // Функциональный анализ и его приложения, 12:1, 1978. — С. 51–61.
7. Surmefts B. Solving Systems of Polynomial Equations / B. Surmefts. — Amer. Math. Soc., CBMS Regional Conferences Series, No. 97. — Providence, Rhode Island, 2002. — 158 p.



8. Кириштейн Б.Х. Деквантование Маслова и метод гомотопий для решения систем нелинейных алгебраических уравнений / Б.Х. Кириштейн // Математические заметки. Т. 83. Вып. 2, 2008. — С. 221–231.
9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. — Институт вычислительных технологий СО РАН. — Новосибирск: XYZ, 2012. — 604 с.
10. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа / Б.И. Крюков. — Киев: Наукова думка, 1967. — 210 с.
11. Аснер В.И. Конструкции и расчеты фильтрующих центрифуг / В.И. Аснер, В.С. Каминский, Г.П. Клочко и др. — М.: Недра, 1976. — 216 с.
12. Беловодский В.Н. Нелинейные вибромашины, супергармонические резонансы и полигармонические вибрации / В.Н. Беловодский, М.Ю. Сухоруков // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. Вып. 40. — Донецк: ДонНТУ, 2010. — С. 20–26.
13. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. — М.: Наука, 1981. — 110 с.
14. Якубович В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
15. Богданов О.С. Справочник по обогащению руд. Основные процессы / Под ред. О.С. Богданова. — М.: Недра, 1983. — 381 с.
16. Zakrzhevsky M.V. Rare Attractors and Typical Bifurcation Groups in Nonlinear Dynamics and Chaos / M.V. Zakrzhevsky. — Riga, RTU, 2012 (In print).
17. Li T. Y. Finding mixed cells in the mixed volume computation / T.Y. Li, X. Li // Found. Comput. Math, Vol. 1, 2001. — pp. 161–181.

**V.N. Belovodskiy, M.Y. Sukhorukov**

**The harmonic balance method for the finding of bifurcation diagrams of oscillatory systems with polynomial nonlinearity.**

Plotting of the bifurcation diagrams is one of the important problems in the analysis of dynamical systems. In recent decades the main instrument for this purpose is the method of point transformations, which goes back to Poincare. In paper we develop a traditional for 50'ies approach based on the harmonic balance method. The conceptual features of its application, taking into account a large number of harmonics, are considered, the results of its use for analysis of the oscillatory system with one degree of freedom and polynomial elastic and dissipative characteristics are presented. Oscillations of the system in areas of sub- and superharmonic resonances are studied, new features in their behavior are discovered.

**Keywords:** *bifurcation, multi-regime, resonance, polyharmonic oscillation, periodic regime, numerical analysis.*

**В.М. Беловодський, М.Ю. Сухоруков**

**Метод гармонічного балансу стосовно до побудови біфуркаційних діаграм коливальних систем з поліноміальною нелінійністю.**

Побудова біфуркаційних діаграм є однією з основних задач аналізу динамічних систем і основним інструментом для цих цілей, в останні десятиліття, є метод точкових відображень, висхідний до Пуанкаре. У роботі розвивається традиційний для 50-х років підхід, заснований на методі гармонічного балансу. Викладено концептуальні особливості його застосування при обліку великої кількості гармонік, наводяться результати його використання до аналізу коливальної системи з

одним ступенем свободи і поліноміальною пружною і дисипативною характеристиками. Проведено аналіз коливань системи в зонах суб- і супергармонійних резонансів, відзначені деякі нові особливості в їх збудженні.

**Ключові слова:** бифуркація, багаторежимність, резонанс, полігармонічне коливання, періодичний режим, чисельний аналіз.

Донецкий нац. техн. ун-т, Донецк  
*belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua*

Получено 14.11.12