УДК 515.2

Триортогональна конусно-полярна система поверхонь

Лихачова В.В., аспірант
Автомобільно-дорожній інститут
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»
Тел.: (0624)55-39-99

***Анотація* – пропонується триортогональна система, що утворюється качінням без ковзання по прямому круговому конусу площини, на якій визначено полярну ортогональну систему координат.**

***Ключові слова* – триортогональна система, полярна ортогональна система координат, конус обертання, концентричні сфери.**

Постановка проблеми. Триортогональні системи мають широкі застосування у багатьох галузях. Віднесення простору до триортогональної системи значно спрощує викладання сутності предметів вивчення багатьох дисциплін. Особливої уваги заслуговує триортогональна параметризація простору на основі гіперболічних координат, так звана триортогональна конусно-полярна (К-П) система.

Аналіз останніх досліджень. Триортогональну систему, що пропонується, будемо будувати на основі гіперболічних координат, що були введені у [1] функціями:

$$x = v\sin\alpha\cos t - u\sin t,\quad y = v\sin\alpha\sin t + u\cos t,\quad z = v\cos\alpha, \tag{1}$$

де α - стала, кут нахилу твірної конуса обертання, який у подальшому будемо називати опорним, до його осі.

Після перетворення косокутної лівої системи гіперболічних координат у косокутну праву систему гіперболічних координат функції (1) набувають вигляду:

$$x = \bar{v}\sin\alpha\cos t + \bar{u}\sin t,\quad y = \bar{v}\sin\alpha\sin t - \bar{u}\cos t,\quad z = -\bar{v}\cos\alpha. \tag{2}$$

Нагадаємо сутність координатних систем, з використанням яких отримувались функції введення триортогональної конусно-декартової (К-Д) системи [4] (див. рис. 1): глобальна нерухома прямокутна декартова система $xoyz$ з початком o у вершині конуса обертання, що є обвідним площин сім'ї Ламе, вісь якого збігається з віссю oz; рухома прямокутна декартова система $\bar{u}o\bar{v}$, що обертається з параметром t разом із площиною сім’ї Ламе навколо осі oz, має нерухомий початок o у вершині конуса і вісь $o\bar{v}$ на лінії дотику площини і конуса; рухома прямокутна декартова система uov, що, крім обертання навколо осі oz разом із системою $\bar{u}o\bar{v}$, здійснює обертання з параметром $\beta = -t\sin\alpha$ в площині сім’ї Ламе навколо початку o.

Зв’язок між координатами u, v та $\bar{u}, \bar{v}$ на площині сім’ї Ламе визначається функціями:

$$\bar{u} = u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha),$$
$$\bar{v} = -u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha), \tag{3}$$

зв’язок між координатами u, v, параметрами рухів і глобальними координатами визначено функціями [4]:

$$\begin{aligned} x &= [-u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha)]\sin\alpha\cos t + \\ &+ [u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha)]\sin t; \\ y &= [-u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha)]\sin\alpha\sin t - \\ &- [u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha)]\cos t; \\ z &= [u\sin(t\sin\alpha) - v\cos(t\sin\alpha)]\cos\alpha; \end{aligned} \tag{4}$$

що вводять триортогональну конусно-декартову (К-Д) систему.

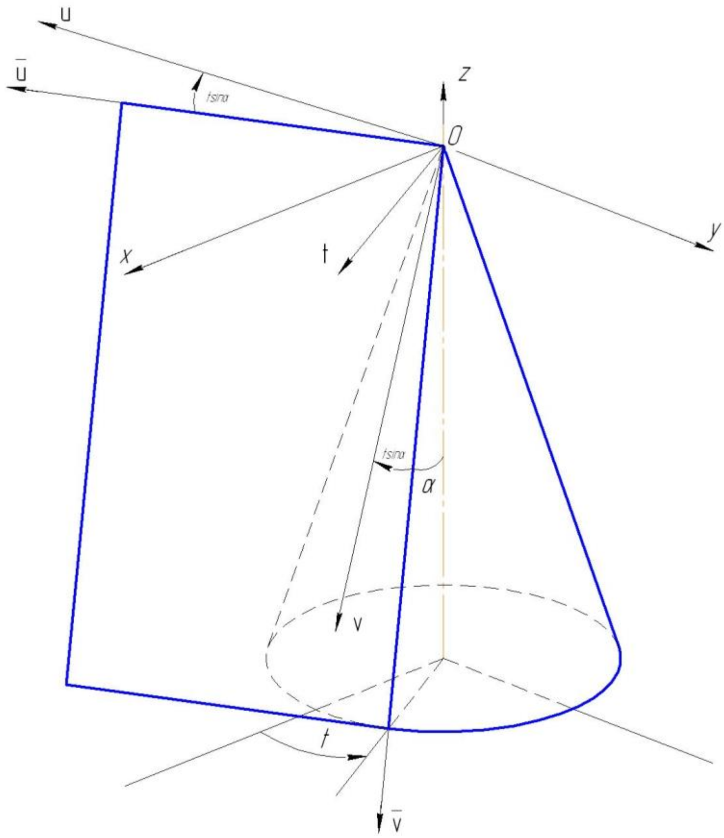

Рис. 1. Триортогональна К-Д система координат t, u, v.

Формулювання цілей статті – перетворити систему гіперболічних координат у триортогональну конусно-полярну систему, визначивши на площині, що обертається без ковзання навколо конуса обертання полярну ортогональну систему координат.

Основна частина. Призначимо на площині Ламе полярну систему координат

$$u = \rho\cos\omega, \quad v = \rho\sin\omega. \tag{5}$$

Підставимо до (3) замість u та v їхні вирази (5). Отримаємо:

$$\bar{u} = \rho\cos\omega\cos(t\sin\alpha) + \rho\sin\omega\sin(t\sin\alpha)$$

$$\bar{v} = -\rho\cos\omega\sin(t\sin\alpha) + \rho\sin\omega\cos(t\sin\alpha)$$

або

$$\bar{u} = \rho\cos(\omega - t\sin\alpha), \quad \bar{v} = \rho\sin(\omega - t\sin\alpha). \tag{6}$$

Здійснимо подальшу підстановку, замінивши в (2) $\bar{u},\bar{v}$ їхніми виразами (6).

Отримаємо:

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\omega - t\sin\alpha)\sin\alpha\cos t + \rho\cos(\omega - t\sin\alpha)\sin t, \\ y &= \rho\sin(\omega - t\sin\alpha)\sin\alpha\sin t - \rho\cos(\omega - t\sin\alpha)\cos t, \\ z &= -\rho\sin(\omega - t\sin\alpha)\cos\alpha \quad - \end{aligned} \tag{7}$$

функції введення системи координат $\rho,\omega,t \quad \alpha = const$, що отримані з (4) застосуванням на площині uov полярних координат ρ,ω:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \omega = \begin{cases} arctg\,\dfrac{v}{u}, & якщо\ u > 0, \\ arctg\,\dfrac{v}{u} + \pi, & якщо\ u < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & якщо\ x = 0, y > 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & якщо\ x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Нагадаємо, що $-t\sin\alpha -$кутовий параметр повороту системи uov відносно системи $\bar{u}o\bar{v}$ (див. рис. 1), $t -$параметр положення площини $\bar{u}o\bar{v}$, дотичної до конуса.

Впевнимося, що система (7) триортогональна. Знайдемо вирази частинних похідних функцій (7):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \rho\cos(\omega - t\sin\alpha)\cos t\cos^2\alpha,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \rho\cos(\omega - t\sin\alpha)\sin t\cos^2\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \rho \cos(\omega - t \sin\alpha) \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \sin(\omega - t \sin\alpha) \sin\alpha \cos t + \cos(\omega - t \sin\alpha) \sin t,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin(\omega - t \sin\alpha) \sin\alpha \sin t - \cos(\omega - t \sin\alpha) \cos t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = -\sin(\omega - t \sin\alpha) \cos\alpha,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \rho \cos(\omega - t \sin\alpha) \sin\alpha \cos t - \rho \sin(\omega - t \sin\alpha) \sin t,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \rho \cos(\omega - t \sin\alpha) \sin\alpha \sin t + \rho \sin(\omega - t \sin\alpha) \cos t,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = -\rho \cos(\omega - t \sin\alpha) \cos\alpha.$$

В умовах триортогональності [3]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial v} = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

замінимо змінні u та v на змінні ρ та ω. Підстановка виразів частинних похідних свідчить проте, що вони виконуються, тобто, система (7) триортогональна.

Внутрішнє рівняння обвідного конуса сім'ї площин $t = const$ знайдемо з умови [3], здійснивши в ній аналогічну заміну змінних:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t}\\
\frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial \omega}\\
\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho}
\end{vmatrix} = -\rho^2 \cos(\omega - t \sin\alpha) \cos\alpha = 0, \tag{10}$$

звідки $\cos(\omega - t \sin\alpha) = 0$,

$$\omega - t \sin\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \omega - t \sin\alpha = \frac{3\pi}{2}. \tag{11}$$

Перше з рівнянь (11) виражає нижню порожнину конуса, друге – верхню порожнину.

Підставимо до (7) замість $\omega - t\sin\alpha$ спочатку праву частину першого рівняння (11), потім праву частину другого рівняння (11). Отримаємо:

$$x = \rho\sin\alpha\cos t, \quad y = \rho\sin\alpha\sin t, \quad z = -\rho\cos\alpha \quad - \tag{12}$$

параметричні рівняння нижньої порожнини конуса.

$$x = -\rho\sin\alpha\cos t, \quad y = -\rho\sin\alpha\sin t, \quad z = \rho\cos\alpha \quad - \tag{13}$$

параметричні рівняння верхньої порожнини конуса.

Рівняння (12) та (13) обмінюються ролями, якщо відлік параметра t вести у горизонтальній площині $z > 0$.

Координатними поверхнями триортогональної системи, введеної функціями (7) є:

$t = const$ – площина, що дотикається до конуса обертання;

$\rho = const$ – концентричні сфери;

$\omega = const$ – конуси з вершинами у спільному центрі сфер, напрямними яких є сферичні криві, ортогональні площинам $t = const$.

На рис. 2 показано координатні поверхні триортогональної К-П системи (7).

а) б) в)

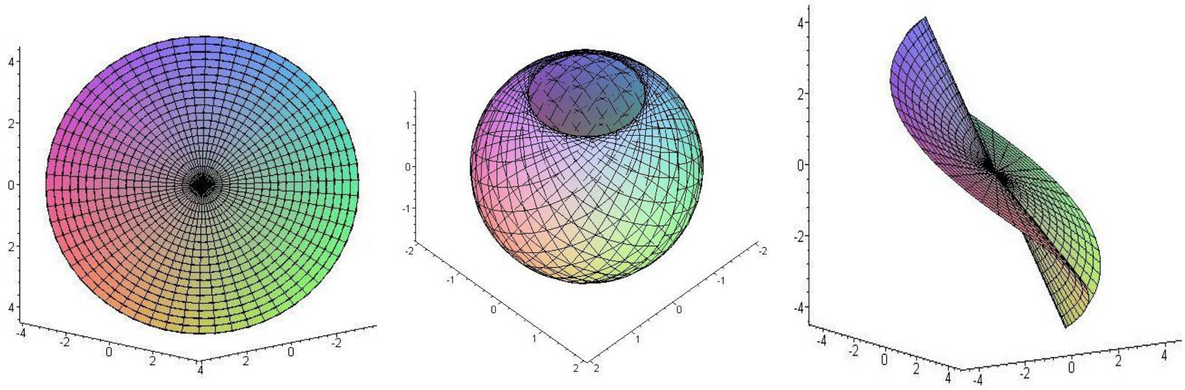

Рис. 2. Координатні поверхні триортогональної системи (7):
а) $t = const$; б) $\rho = const$; в) $\omega = const$.

На рис. 3 показано координатні лінії триортогональної К-П системи (7):

t - лінії – сферичні ортогональні траєкторії площини $t = const$;

ρ - лінії – в'язка прямих, твірних конусів $\omega = const$;

ω - лінії – концентричні кола у площина $t = const$.

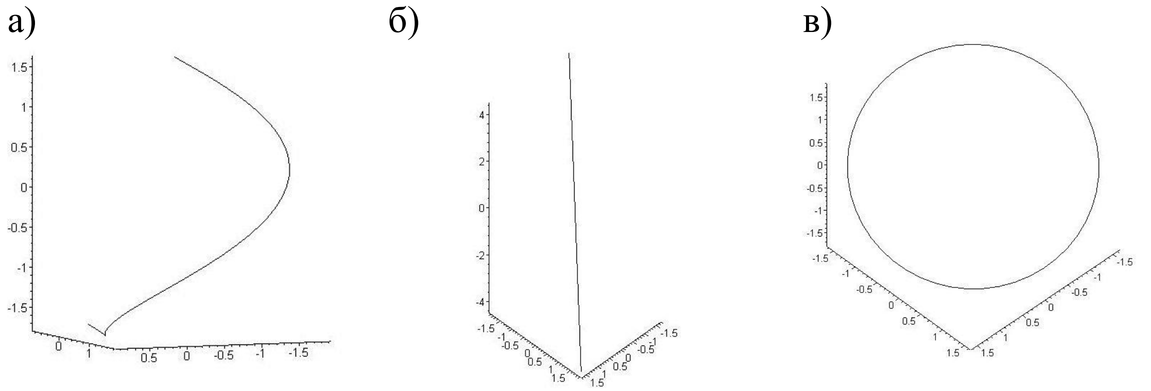

Рис. 7. Координатні лінії триортогональної К-П системи (7):
а) t-лінія; б) ρ-лінія; в) ω-лінія.

Висновки. Триортогональна система, однією із сімей Ламе якої є сім'я площин, на якій визначено полярну ортогональну систему координат та яка є дотичною до опорного прямого кругового конуса, вводиться функціями (7).

Література

1. *Скидан И.А.* Кинематические поверхности в гиперболических координатах// Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 14. – К.: "Будівельник", 1972. – с. 78-82.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. Лейпциг – "Тойбкер", Москва – "Наука". – 1981. – 718с.
3. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonoux et les coordonnées curvilignes. Paris, Gauthier-Villars, 1910. – 567 p.
4. *Андрєєва В.В.* Триортогональна система на основі гіперболічних координат// Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. т.39. – с.128-133.

TRIPLY-ORTHOGONAL CONICAL-POLAR SYSTEM

V. Lihachova

Summary

The functions which introduce triply-orthogonal system involving the family of tangent plans to cone are obtained.