УДК 515.2

# Триортогональна система на основі гіперболічних координат

Андрєєва В.В., аспірант
*Донецький національний технічний університет*
Тел. (062) 338-48-*85*

***Анотація* – пропонується триортогональна система, що утворюється качінням без ковзання площини по прямому круговому конусу.**

***Ключові слова* – триортогональна система, евольвента, ортогональна траєкторія, різьблена поверхня.**

*Постановка проблеми.* Триортогональні системи знаходять широке застосування в теорії поля. Вирази диференціально-геометричних характеристик скалярного чи векторного поля значно спрощуються, коли воно віднесено до триортогональної системи.

З іншого боку вибір триортогональної системи мусить бути у відповідності зі структурою поля. Тільки у цьому випадку система віднесення поля має найменший вплив на розв'язуваність проблеми моделювання поля у цілому.

*Аналіз останніх досліджень.* Триортогональну систему, що пропонується, будемо будувати на основі гіперболічних координат, що були введені у [1] функціями:

$$x = v\sin\alpha\cos t - u\sin t, \quad y = v\sin\alpha\sin t + u\cos t, \quad z = v\cos\alpha, \tag{1}$$

де $\alpha$ - стала, кут нахилу твірної конуса обертання, який у подальшому будемо називати опорним, до його осі.

Гіперболічна система утворюється сім'єю площин, дотичних до опорного конуса. Її параметрами є: $t$ - кутовий параметр положення площини у сім'ї дотичних площин, $u, v$ - прямокутні координати на площині сім'ї з початком $o$ у вершині опорного конуса, вісь $ov$ є характеристикою сім'ї.

Гіперболічна система не є триортогональною, оскільки з трьох умов триортогональності, тільки друга задовільнюється [3]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \bar{u}} = \bar{v}\sin\alpha,\\
&\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\frac{\partial x}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{u}}\frac{\partial y}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{u}}\frac{\partial z}{\partial \bar{v}} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \bar{v}} = -\bar{u}\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{2}$$

Крім того, гіперболічна система ліва, а не права, що також є не бажаним, оскільки вирази диференціально-геометричних характеристик полів складені для триортогональних правих систем.

*Формулювання цілей статті* – перетворити систему гіперболічних координат у триортогональну праву систему.

*Основна частина*. Порівняно з гіперболічною системою координат (див. рис.1), яка враховує лише обертальний рух дотичної до опорного конуса площини, їй слід надати ще одного обертального руху самій по собі – обертання навколо початку $o$ за умов забезпечення перекочування без ковзання площини по опорному конусу.

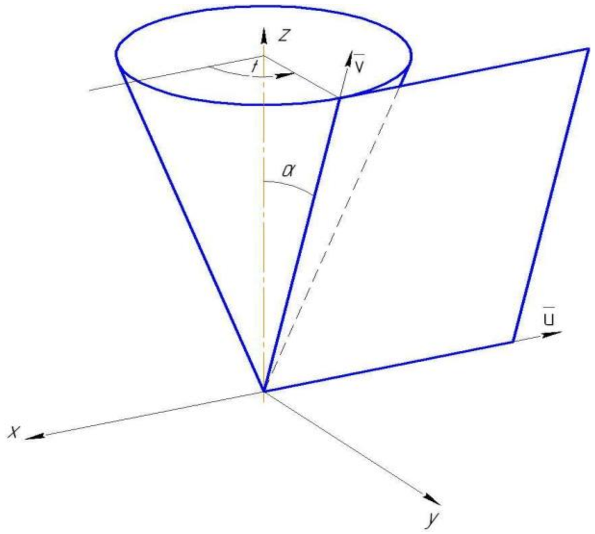


Рис.1

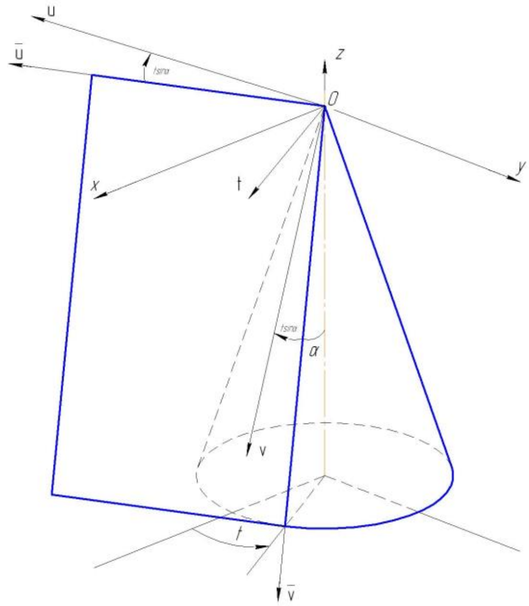


Рис.2

Щоб триортогональна система була правою, необхідно врахувати два чинника: по-перше, осі слід спрямувати уздовж дотичних до координатних ліній у бік збільшення відповідної координати. Цей чинник легко врахувати надаванням кінематичного змісту формоутворенню системи. По-друге, на кожній з координатних поверхонь двовимірна система мусить бути правою.

Спочатку перетворимо косокутну ліву систему гіперболічних координат у косокутну праву систему гіперболічних координат. Для цього вісь $o\bar{u}$ спрямуємо у бік збільшення координати $\bar{u}$, вважаючи її другою координатою, вісь $ot$ спрямуємо у бік зростання $t$ за напрямом дотичної до $t$- лінії (див. рис.2), вважаючи її першою координатою. Вісь $o\bar{v}$ спрямуємо таким чином, щоб тріедр $ot\bar{u}\bar{v}$ був правим (рис.2). Функції введення гіперболічних координат набувають вигляду:

$$x=\bar{v}\sin\alpha\cos t+\bar{u}\sin t,\quad y=\bar{v}\sin\alpha\sin t-\bar{u}\cos t,\quad z=-\bar{v}\cos\alpha. \qquad (3)$$

З умов (2) триортогональності лише друга виконується, тобто система гіперболічних координат(3) є косокутною правою.

Щоб перетворити її у триортогональну, необхідно площині $t=const$ крім обертального руху навколо осі $oz$ надати обертального руху самої по собі навколо точки $o$, параметр якого визначимо з умови перекочування площини $t = const$ по опорному конусу без ковзання.

Відомо, що розгортка прямого кругового конуса є сектор з центральним кутом $\beta = 2\pi \frac{r}{l}$, де $r$- радіус основи, $l$- довжина твірної конуса. Очевидно, $\frac{r}{l} = \sin\alpha$, де $\alpha$- кут між віссю конуса і його твірною. Залежність між змінним кутом $t$, що вимірюється на площині основи, і змінним кутом $\beta$ повороту дотичної площини навколо вершини конуса, коли вона обкочує конус без ковзання, знайдемо з пропорції:

$$\frac{t}{2\pi} = \frac{\beta}{2\pi \sin\alpha},$$

звідки

$$\beta = t \sin\alpha. \qquad (4)$$

Замінимо у виразах (3) $\bar{u}$ та $\bar{v}$ на вирази $u$ та $v$ (див. рис.2) з врахуванням того, що система $uov$ обертається навколо точки $o$ відносно системи $\bar{u}o\bar{v}$ з параметром (4):

$$\bar{u} = u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha), \quad \bar{v} = -u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha). \qquad (5)$$

Підстановка (5) до (3) дає:

$$\begin{aligned}
&x = [-u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha)]\sin\alpha\cos t + \\
&+ [u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha)]\sin t; \\
&y = [-u\sin(t\sin\alpha) + v\cos(t\sin\alpha)]\sin\alpha\sin t - \\
&- [u\cos(t\sin\alpha) + v\sin(t\sin\alpha)]\cos t; \\
&z = [u\sin(t\sin\alpha) - v\cos(t\sin\alpha)]\cos\alpha;
\end{aligned} \qquad (6)$$

- функції введення триортогональної системи.

Її координатними поверхнями є:

$t = const$ - сім’я півплощин, дотичних до опорного конуса;

$u = const$ - лінійчата різьблена поверхня Монжа, меридіаном якої є пряма, паралельна змінній осі $ov$ чи збігається з нею при $u = 0$;

$v = const$ - лінійчата різьблена поверхня Монжа, меридіаном якої є пряма, паралельна змінній осі $ou$ чи збігається з нею при $v = 0$.

Координатні лінії:

$t$ - лінії – ортогональні траєкторії сім’ї площин $t = const$;

$u$ - лінії – прямі, паралельні змінній осі $ov$;

$v$ - лінії – прямі, паралельні змінній осі $ou$.

Доведемо, що координатні $t$ - лінії є сферичними. Піднесення обох частин рівнянь (3) та (6) до квадрату та визначення сум обох частин дає:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 = u^2 + v^2, \qquad (7)$$

тобто, ортогональна траєкторія сім'ї площин $t = const$ розташована на сфері з центром у вершині опорного конуса, радіус якої дорівнює відстані поточної точки площини $t = const$ від вершини опорного конуса.

Доведемо, що координатні поверхні $u = const$ та $v = const$ розгортні. Оскільки координатні $u$ - лінії і $v$ - лінії є меридіанами різьблених поверхонь Монжа, які в свою чергу є лініями кривини цих поверхонь, маємо лінійчаті поверхні з прямолінійними лініями кривини, що може бути лише у випадку розгортних поверхонь.

Визначимо функції:

$$t = t(x, y, z), \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \tag{8}$$

залежності криволінійних координат $t, u, v$ від прямолінійних декартових координат.

Через будь-яку точку простору, зовнішню відносно опорного конуса, проходить єдина півплощина $t = const$ як триортогональної (6), так косокутної гіперболічної (3) системи. Щоб знайти положення цієї півплощини за значеннями $x, y, z$ координат точки, через яку вона проходить, з третього з рівнянь (3) знаходимо:

$$\bar{v} = -\frac{z}{\cos\alpha}. \tag{9}$$

Скориставшись (9) та (7) знаходимо $\bar{u}$

$$\bar{u} = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 tg^2\alpha}. \tag{10}$$

Перше з рівнянь (3) представимо у вигляді [2]

$$x = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 \sin^2\alpha}\,\sin\left(t + arctg\,\frac{\bar{u}}{\bar{v}\sin\alpha}\right). \tag{11}$$

Підставимо до (11) вирази $\bar{u}$ з (10) та $\bar{v}$ з (9). Отримаємо:

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\sin\left(t - arctg\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 tg^2\alpha}}{z tg\alpha}\right),$$

Звідки

$$t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2-z^2tg^2\alpha}}{ztg\alpha}. \qquad (12)$$

Оскільки положення півплощини $t = const$ у сім'ї площин, дотичних до опорного конуса залежить лише від координат $x, y, z$ точки, через яку вона проходить, і не залежить від координат системи $\overline{u}o\overline{v}$ чи $uov$, до якої ця точка віднесена, функція (12) спільна для косокутної гіперболічної (3) і для триортогональної (6) систем.

Функції залежності двох інших координат $u$ та $v$ триортогональної системи (6) від прямокутних декартових координат $x, y, z$ визначимо, розв'язавши систему (5) відносно $u$ і $v$:

$$\begin{aligned} u &= \overline{u}\cos(t\sin\alpha) - \overline{v}\sin(t\sin\alpha), \\ v &= \overline{u}\sin(t\sin\alpha) + \overline{v}\cos(t\sin\alpha). \end{aligned} \qquad (13)$$

Підставимо замість $\overline{u}$ та $\overline{v}$ їхні вирази (10), (9). Отримаємо:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2+y^2-z^2tg^2\alpha}\cos(t\sin\alpha) + \frac{z}{\cos\alpha}\sin(t\sin\alpha), \\ v &= \sqrt{x^2+y^2-z^2tg^2\alpha}\sin(t\sin\alpha) - \frac{z}{\cos\alpha}\cos(t\sin\alpha), \end{aligned} \qquad (14)$$

де $t$ обчислюється за формулою (12).

Таким чином, функції (8) мають вирази (12), (14).

*Висновки.* Триортогональна система, однією із сімей Ламе якої є сім'я площин, дотичних до опорного прямого кругового конуса, вводиться функціями (6).

Література


1. *Скидан И.А.* Кинематические поверхности в гиперболических координатах// Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 14. – К.: "Будівельник", 1972. – с. 78-82.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. Лейпциг – "Тойбкер", Москва – "Наука". – 1981. – 718с.
3. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonoux et les coordonnées curvilignes. Paris, Gauthier-Villars, 1910. – 567 p.


## TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEM BASED ON HYPERBOLIC COORDINATES


V. Andreeva



**Summary**

**The functions which introduce triply-orthogonal system involving the family of tangent plans to cone are obtained.**