

УДК 515.2

СІМ'Я КІЛ НА ПОВЕРХНІ СФЕРИ, ЯК ВИЗНАЧНИК ТРИОРТОГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПОВЕРХОНЬ

Лихачова В.В., к.т.н.

Автомобільно-дорожній інститут

ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Тел.: (0624)55-39-99

Анотація – пропонується триортогональна система, визначником якої є сім'я кіл на поверхні сфери.

Ключові слова – триортогональна система, координатні поверхні, сітка Боне, сім'я кіл, концентричні сфери.

Постановка проблеми. Триортогональні системи мають широкі застосування у багатьох галузях. Віднесення простору до триортогональної системи значно спрощує викладання сутності предметів вивчення багатьох дисциплін. Особливої уваги заслуговує триортогональна система, визначником якої є сім'я кіл на поверхні сфери.

Аналіз останніх досліджень. Сфера, як і площина, має ту особливу властивість, що будь-яка лінія на її поверхні є лінією кривини.

Ортогональними траєкторіями сім'ї паралельних площин є в'язка прямих з невласним центром. Ортогональними траєкторіями сім'ї концентричних сфер є в'язка прямих з центром у спільному центрі сфер.

Як визначником триортогональної системи може бути сім'я ліній на площині, що припускає існування сім'ї ортогональних до неї ліній [1], так визначником триортогональної системи може бути і сім'я ліній на сфері.

У обох випадках алгоритм побудови триортогональної системи полягає у знаходженні на площині чи на сфері сім'ї, ортогональної сім'ї-визначника.

Крім сім'ї сфер (площин), до координатних поверхонь увійдуть конуси (циліндри), напрямними яких будуть лінії двох ортогональних сімей на сфері (площині).

Особливої уваги заслуговує, як визначник, сім'я кіл на поверхні сфери, ортогональна сім'я до якої також складається із кіл. Сітку двох ортогональних сімей кіл називають сіткою Боне [2, 3]. Її отримують у

перетині сфери двома пучками площин, осі яких полярні відносно сфери.

Взагалі, визначником сітки Боне на сфері можуть бути два довільних кола на його поверхні. Перетин площин кіл визначника дає вісь першого пучка, пряма, що проходить через вершини конусів, дотичних до сфери уздовж поданих кіл, є віссю другого пучка.

Розрізняють три випадки взаємного положення двох кіл визначника на сфері:

- вони мають спільну дотичну: осі пучків перетинаються у точці дотику, вони належать дотичній площині у точці дотику, одна з них збігається зі спільною дотичною, друга – перпендикулярна першій;

- вони перетинаються: вісь першого пучка проходить через точки перетину, вісь другого не перетинає сферу і утворює з першою віссю прямий кут мимобіжності;

- вони розташовані у паралельних площинах: вісь одного з пучків проходить через центри кіл визначника, вісь іншого – невласна пряма перетину площин поданих кіл.

У третьому випадку матимемо сітку Боне, що збігається з системою географічних координат на сфері, що утворює класичну сферичну систему координат.

Формулювання цілей статті – розглянути перші два випадки взаємного положення двох кіл визначника на сфері для утворення триортогональних систем поверхонь.

Основна частина. Триортогональну систему першого випадку утворимо перетворенням подібності з центром у центрі сфери одиничного радіуса:

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (1)$$

і коефіцієнтом t . Сфера віднесена до сітки Боне [2].

Функції введення триортогональної системи матимуть вигляд:

$$x = \frac{2ut}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2vt}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{(u^2 + v^2 - 1)t}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (2)$$

Сфері (1) будуть відповідати координатні концентричні сфери $t = const$, сім'ям сітки Боне відповідатимуть взаємно ортогональні конуси зі спільною вершиною у центрі сфери (1) і спільною твірною, що збігається з віссю oz .

На рис. 1 та рис. 2 показано триортогональну систему і окремо її координатні поверхні, виділено осі пучків площин, що перетинають сферу (1), утворюючи сітку Боне.

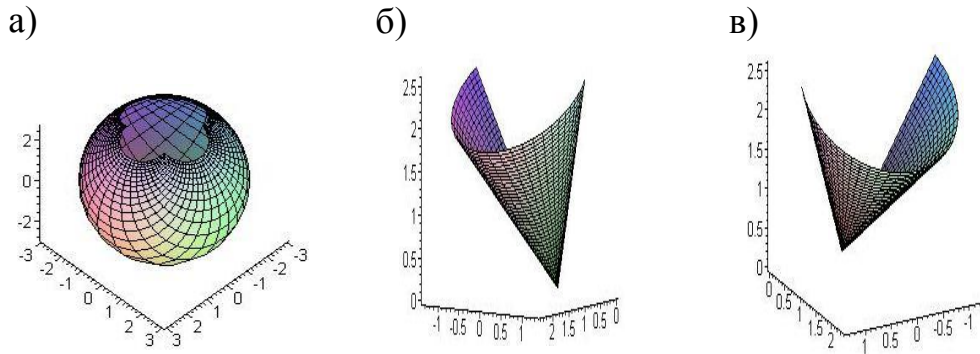


Рис. 1. Координатні поверхні триортогональної системи (2):
а) $t = const$; б) $u = const$; в) $v = const$

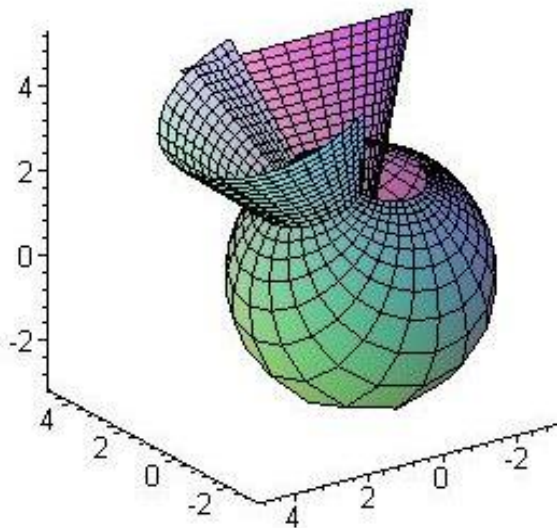


Рис. 2. Триортогональна система (2)

Аналогічно отримаємо показану на рис. 3 та рис. 4 триортогональну систему другого випадку, функції введення якої матимуть вигляд:

$$x = \frac{\sqrt{1-a^2} \sin u}{chv + a \cos u} t, \quad y = -\frac{\sqrt{1-a^2} shv}{chv + a \cos u} t, \quad z = \frac{\cos u + achv}{chv + a \cos u} t. \quad (3)$$

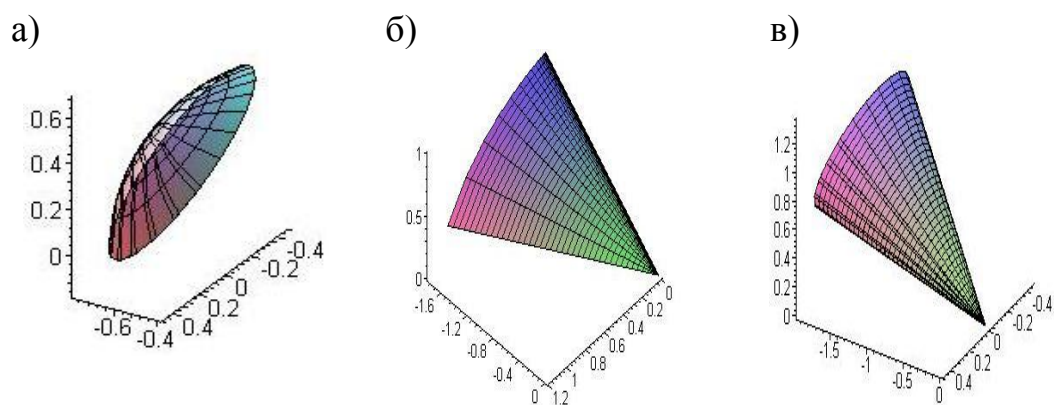


Рис. 3. Координатні поверхні триортогональної системи (3):
 а) $t = const$; б) $u = const$; в) $v = const$

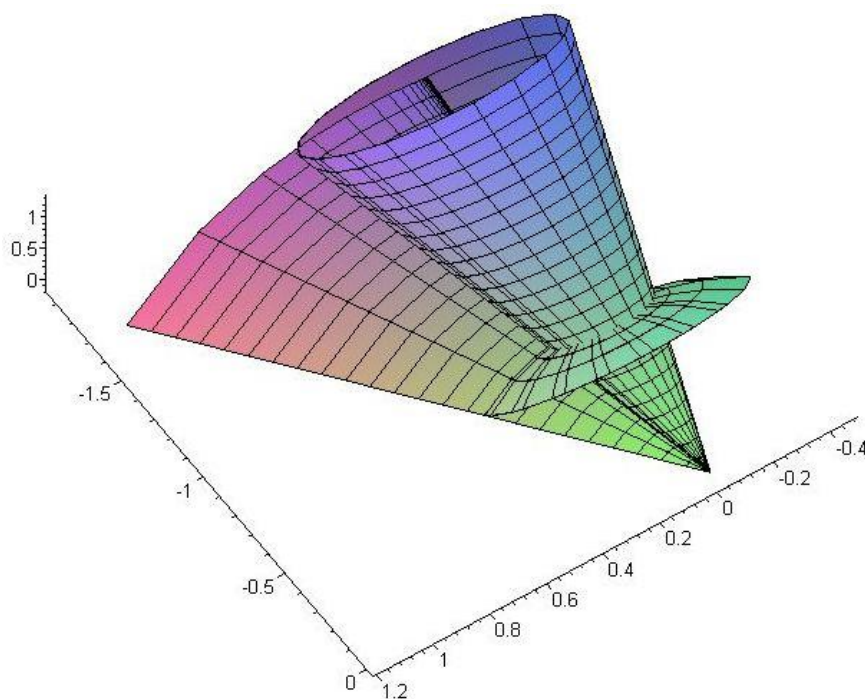


Рис. 4. Триортогональна система (3)

Висновки. Оскільки будь-яка лінія на сфері (як і на площині) є лінією кривини, триортогональні системи зі сферичною сім'єю Ламе зручно використовувати для формоутворення поверхонь, віднесених до ліній кривини.

Література

1. Андреева В.В. Триортогональні системи з координатною сім'єю площин / В.В. Андреева // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь, 2007. – Вип. 4, т.34. – С.134–143.
2. Bonnet O. Mémoire sur les surfaces orthogonales / O. Bonnet // Comptes rendues de l'Academie des sciences , t .54 , 1862. – P. 554 – 655.
3. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия / В.И. Шуликовский. – М.: Госиздат физ.-мат. лит-ры, 1963. – 540 с.

СЕМЬЯ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ, КАК ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. Лихачёва

Аннотация – предлагается триортогональная система, определителем которой является семья окружностей на поверхности сферы.

THE FAMILY OF CIRCLES ON THE SURFACE OF THE SPHERE, AS THE DETERMINANT FOR TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEM SURFACES

V. Likhachova

Summary

Proposed to construction algorithm triply-orthogonal system, which is the determinant of the family of circles on the surface of the sphere.