

УСЛОВИЯ ПЕРЕХОДА К МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ ВОЗДУШНОГО ОТОПЛЕНИЯ И ВЕНТИЛЯЦИИ

С.П. Высоцкий

Доктор технических наук, профессор
АДИ ГВУЗ "ДонНТУ"

Приведены типовые математические модели расчета характеристик структуры газовых потоков в системах воздушного отопления и вентиляции. Показаны математические модели и алгоритмы расчетов, которые могут быть использованы при проектировании вентиляционных систем. Разработаны упрощенные математические модели аэротермических процессов отопительно-вентиляционных систем.

1. Введение

Одной из проблем моделирования теплообмена в вентилируемом помещении являются, возникающие в системе гидродинамические неустойчивости, из которых основную роль играет неустойчивость Релея-Тейлора. Исследование такого рода турбулентных течений является фундаментальной задачей гидродинамики. Сложность прямого численного расчета характеристик систем воздушного отопления и вентиляции по гидродинамическим уравнениям, его чувствительность к начальным условиям, с одной стороны, и ограниченность параметрического подхода, основанного на построении простых моделей турбулентного перемешивания, с другой, заставляют искать новые методы описания данного явления.

Несмотря на достаточную полноту описания нестационарных аэротермодинамических процессов [1,2], использование существующих математических моделей в практических расчетах является затруднительным из-за сложности задания начальных и граничных условий, выражений для коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности, а также сложности проведения вычислительной процедуры. Кроме того, указанная математическая модель не позволяет определить оптимальный закон регулирования, если система отопления и вентиляции рассматривается в качестве объекта, не позволяет использовать хорошо разработанный математический аппарат анализа устойчивости, качества регулирования и т.д.

В этой связи, настоятельной необходимостью является разработка более простых математических моделей рассматриваемых процессов, предельно полно учитывающих особенности их протекания.

2. Оценка времени выравнивания температуры

Для выяснения возможности и обоснованности использования математической модели аэротермодинамических процессов, представленной в сосредоточенных параметрах, необходимо оценить время выравнивания температуры по объему объекта регулирования, т.е. помещения, в котором осуществляется вентиляция воздуха и сравнить его с временем, характерным для возмущающего воздействия.

Задача решалась в такой постановке: изменялась скачком температура стенок помещения, находилось время выравнивания температуры воздуха в помещении. Это типичная задача нестационарной теплопроводности. Аналитическое описание этого процесса включает в себя дифференциальное уравнение и условие однозначности.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

В этом выражении:

t - температура воздуха;

a - коэффициент температуропроводности воздуха.

Условия однозначности задаются в виде:

физических параметров λ, ρ, c ;

формы и геометрических размеров объекта $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$;

распределения температуры в начальный момент времени

$\tau = 0 \quad t = t_0 = f(x, y, z).$

Граничные условия задаются в виде граничных условий первого рода, так как нами принято, что температура наружных стенок остается постоянной.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (1) совместно с условиями однозначности дает математическую модель рассматриваемой задачи. Решение ее заключается в отыскании функции

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (2)$$

которая удовлетворяла бы уравнению (1) и краевым условиям.

Дифференциальное уравнение (1) может быть решено несколькими аналитическими методами: преобразования Лапласа, методом источников, методом разделения переменных и др. Например, решение дифференциального уравне-

ния теплопроводности для плоской бесконечной прослойки шириной 2δ имеет вид

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right). \quad (3)$$

Входящие в уравнение температурного поля (3) величины ε , μ_n , $a\tau/\delta^2$; x/δ являются безразмерными и имеют следующий смысл:

$\varepsilon = t/t_0$ - безразмерная температура;

$a\tau/\delta^2 = Fo$ – критерий Фурье, представляющий собой безразмерное время;

μ_n – корни уравнения $\operatorname{ctg} \mu = \mu/Bi$;

Bi – критерий Био.

С учетом последних обозначений уравнение (3) принимает вид:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (4)$$

Обычно вентилируемые помещения имеют форму параллелепипеда, который можно представить пресечением трех взаимноперпендикулярных прослоек с соответствующими толщинами и распределением температуры. Используя теорему о перемножении решений, решение будет иметь вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z.$$

Как видно из уравнения (4), значение температуры воздуха в помещении в каждый момент времени определяется суммой экспонент. Для поставленной задачи отметим, что время выравнивания температуры в основном определяется наибольшим значением постоянной времени и равно

$$t_{\text{вырав}} = 3\mu_1^2 Fo. \quad (5)$$

Таким образом, выражение (5) дает возможность оценить время выравнивания температуры газа в объекте, однако для этого необходимо знать характерный размер помещения. Использование ширины, длины или высоты помещения приведет к неверному результату, так как интенсивность выравнивания определяется не только коэффициентом теплопроводности, но и более сложными процессами, которые могут, как интенсифицировать теплообмен, так и его замедлить.

3. Определение характерного размера

Сложность взаимодействующих между собой физических явлений, проявляющихся при теплопередаче, требует многогранных и глубоких исследований

каждого конкретного случая. В общем случае трудно предсказать возможность интенсификации процесса теплопередачи каким-либо физическим воздействием. Поэтому даже приближенные рекомендации представляют практический интерес.

Предложим две аксиомы устанавливающие усиление основного процесса взаимодействующим физическим явлениям.

1. Для усиления основного процесса взаимодействием физического явления другой природы необходимым, но недостаточным условием является наличие функциональной зависимости между параметрами основного и налагаемого процессов.

2. Для того, чтобы при наложении двух физических явлений произошло усиление основного, достаточно чтобы связь между параметрами налагаемого и основного полей была прямой, т.е. чтобы при увеличении параметра градиента налагаемого процесса увеличивался и параметр основного градиента.

Применим эти аксиомы для анализа влияния на интенсивность теплопередачи такого явления как гидродинамическое перемешивание среды. Процесс перемешивания среды приводит к образованию ячеек с различной температурой (холодного и теплого воздуха), размеры которых значительно меньше размеров вентилируемого помещения, т.е. происходит уменьшение геометрического размера в формуле (5), что в свою очередь увеличивает критерий Фурье и уменьшает время выравнивания температуры по объему помещения. Таким образом, выполняется необходимое и достаточное условие интенсификации процесса выравнивания температуры по объему вентилируемого помещения.

Известно несколько гидродинамических неустойчивостей, возникающих на границе раздела сред, в данном случае на границе теплого и холодного воздуха. Ими обусловлено развитие фрактальных деформаций границ – процесса, который на турбулентной стадии называют турбулентным перемешиванием. Это классические неустойчивости Рэля-Тейлора (РТН), Рихтмайера-Мешкова (НРМ) и др. РТН – это неустойчивость тяжелого над легким [3-5]. Она ответственна за распад неустойчивых гидростатических равновесий, и в большой степени определяет тепловую конвекцию над источником тепла.

Неустойчивость появляется, если, во-первых, имеется гидростатическое равновесие и, во-вторых, если распределение плотности по высоте таково, что равновесие неустойчиво. Простейший пример такого распределения показан на рис. 1а.

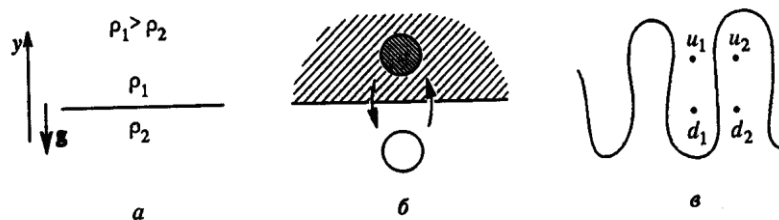


Рис.1. Рэлей-тейлоровская неустойчивость

Критерий неустойчивости принимает вид

$$\frac{d\rho}{dy} > 0. \quad (6)$$

В случае газа алогичный критерий

$$\frac{ds}{dy} > 0, \quad (7)$$

где s – энтропия газа.

Причиной неустойчивости является то, что обмен или перестановка элементов жидкости приводит к уменьшению гравитационной энергии системы. Этот обмен показан на рис. 1б. При другом качественном объяснении механизма неустойчивости изображают соседние колонки легкой (теплой) и тяжелой (холодной) жидкостей (рис. 1в). Оба слоя «кинематически» связаны. В процессе движения в системе не должно возникнуть пустот. Отсюда следует, что ∇p в теплом воздухе не может быть так велик, как гидростатический градиент давления в холодном. В противном случае этот теплый воздух выбрасывался бы вверх с ускорением в $1/\mu$ раз большим ускорением свободного падения (здесь $\mu = \rho_2 / \rho_1$). Для случая $\mu \ll 1$ давление (температура) выравнивается по легкому веществу.

Это означает, что разность давлений между точками u_2 и d_2 (рис. 1в) порядка $(\nabla p)_2 H_{ud}$, где $(\nabla p)_2$ – гидростатический градиент давления в легкой жидкости, а H_{ud} – расстояние по вертикали между точками u_2 и d_2 . Выравнивание давлений означает, что разность давлений между точками u_1 и d_1 в холодной жидкости примерно такая же, как и в теплой. Ясно, что этого градиента недостаточно для поддержания холодной (более тяжелой) жидкости в поле силы тяжести. Поэтому ячейка последней двигается вниз, выдавливая вверх теплую (более легкую) жидкость.

Отметим, что рассматриваемая неустойчивость не является неустойчивостью в обычном понимании этого термина. Здесь нет самоусиления возмущений, т.е. нет силы, которая была бы пропорциональна отклонению. Это движение по инерции, импульс создает поле скоростей, а дальше происходит инерционное «расползание». Причем движение развивается как в неустойчивом по критерию (6) так и устойчивом (7) состоянии (рис. 2).

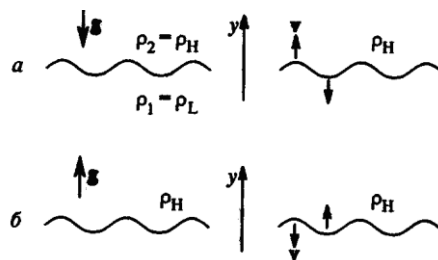


Рис. 2. Иллюстрация возникновения неустойчивости

До начала импульса возмущения давление однородно $\nabla p \equiv 0$ и гофрированная поверхность раздела находится в состоянии покоя. В течение действия импульса поверхность раздела не успевает сдвинуться с места - приращение координат равно нулю. Зато приращение скорости конечно. В случае *a*, см. рис. 2а, это приращение связано с неустойчивостью, а в случае *б* - со стоячими гравитационными волнами. При этом в случае *б* фазы возмущений поверхности и скорости сдвинуты на 180° . Поэтому вскоре после окончания импульса поверхность раздела становится плоской, а уже затем начинается монотонный рост амплитуды. Происходит так называемая перефазировка, при которой ячейки (на исходной поверхности) при развитии возмущения превращаются в струи и наоборот. На этом языке вмятины в тяжелый газ называются ячейками, а выпуклости на ограничивающей этот газ поверхности - струями.

Амплитуды линейных возмущений скорости подчиняются уравнению

$$v_{tt} = gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} v, \quad (8)$$

где v — вертикальная компонента возмущения скорости или собственно компонента скорости, поскольку в невозмущенном состоянии газы покоились.

Если $g < 0$ (а), то

$$\begin{aligned} \delta\eta &= (\delta\eta)_0 \operatorname{ch} \gamma t, \quad v = (\delta\eta)_0 \gamma \operatorname{sh} \gamma t, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2}} gk. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $g > 0$ (б), то

$$\begin{aligned} \delta\eta &= (\delta\eta)_0 \cos \omega t, \quad v = -(\delta\eta)_0 \omega \sin \omega t, \\ \omega &= \sqrt{\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2}} gk. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в эти уравнения $g = \Delta v_{CB} / \delta t$, найдем, что в момент $t = \delta t$ окончания импульса ($t = 0$ - момент его начала) амплитуда $\delta\eta$ (при $\delta\eta \rightarrow 0$) не изменилась, а амплитуды приращений скорости равны

$$v = \pm (\delta\eta)_0 k |A| \Delta v_{CB}. \quad (11)$$

Это и есть искомая оценочная величина. Верхний и нижний знаки относятся к случаям (а) и (б) соответственно. При ее выводе функции sh и \sin необходимо разложить по малому аргументу. Число Атвуда A и амплитуда $(\delta\eta)_0 = \delta\eta$ не меняются в процессе ускорения.

Выводы

Предложенная модель и алгоритм ее реализации были положены в основу инженерных методик расчета воздухообмена в вентилируемых помещениях,

использована в разработках Донбасского государственного научно-исследовательского и проектно-конструкторского института строительного производства Госстроя Украины при модернизации вентиляционных систем ряда теплогенерирующих предприятий и позволили существенно улучшить их характеристики.

Литература

1. Ежов А.А. Шумский “Нейрокомпьютинг и его приложение в экономике и бизнесе” / А. А. Ежов, С.А. Шумский.- Москва, МИФИ, 1998.
2. N.J. Zabusky, S. Zeng, J. Ray, R. Samtaney, “Vertical Projectiles from Shock-Bubble Interactions”, Proc. of 6th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (Marseille, 18-21 June, 1997, France) p. 539.
3. R.L. Holmes et al., J.W. Grove et al., “Single mode Richtmyer-Meshkov Instability: Experiment, Simulation and Theory”. Proc. of 6th Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (Marseille, 18-21 June, 1997, France), p. 197.
4. G. Taylor, Proc. Roy. Soc. London A201, 192,1950.
5. I. Daubechies. “Ten lecture on Wavelets.” CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathemedics, Philadelphia, 1992.