

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПУТЕМ ИМИТАЦИИ АНСАМБЛЯ РЕАЛИЗАЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Погребняк Н.Н., аспирант

Методы имитации случайных электроэнергетических процессов изменения токов и напряжений используются в электроснабжении для "экспериментальной" проверки теоретических выводов и решения нелинейных задач статистической динамики [1]. Обычно имитируются отдельные реализации случайных процессов, что требует большой их продолжительности, а в ряде случаев и коррекции результатов имитации (например, согласно [2]). Кроме того, при таком подходе исключается возможность полного изучения переходных случайных процессов.

Исходя из общего определения случайного процесса, естественно имитировать его в виде совокупности ансамбля N реализаций. Для определенности эффективность имитации по ансамблю покажем на примере оценки нагрева проводника с постоянной времени нагрева T при протекании по нему тока $i(t)$ в виде последовательности прямоугольных импульсов величиной i_b и пауз при экспоненциальных распределениях длительностей t_b импульсов и пауз t_o . Эта задача имеет аналитическое решение только для частного случая, когда коэффициент включения $k_b = t_b / (t_b + t_o) = 0,5$.

В теории электрических нагрузок используется упрощенное уравнение нагрева проводника [3]

$$Ty' + y = i^2, \quad (1)$$

где $y(t)$ – квадратичный инерционный процесс (ИП), который в относительных единицах совпадает с температурой перегрева проводника [1]. Максимум y_{\max} ИП определяется по плотности $f(y)$ вероятностного распределения с заданной вероятностью E_x . Расчетная электрическая нагрузка по нагреву

$$i_p = \sqrt{y_{\max}}.$$

Таким образом, целью имитации является определение плотности $f(y)$. Известно, что при подаче на вход RC -цепи с постоянной времени $T = RC$ телеграфного сигнала с ординатами ± 1 процесс $u(t)$ на выходе имеет плотность [4]

$$f(u) = \frac{\Gamma(\lambda_0 T + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda_0 T)} (1 - u^2)^{\lambda_0 T - 1} \quad \text{при } 0 \leq |u| \leq 1,$$

где λ_0 - число нулей в единицу времени, $\Gamma(x)$ - гамма-функция. При частоте λ импульсов или пауз, рассматриваемый случай сводится к задаче о телеграфном сигнале при $k_b = 0,5$, $\lambda_0 = 2\lambda$ и $y = i_b(1+u)/2$. С учетом этих величин, при $0 \leq y \leq i_b$ получим

$$f(y) = \frac{2\Gamma(2\lambda T + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\lambda T)} \left[4y(y - i_b)/i_b^2 \right]^{2\lambda T - 1} \quad (2)$$

Отметим, что в аналогичной формуле из [1] вместо $2\lambda T$ вписана величина λT , но эта описка не повлияла на результаты вычислений, представленные на рис. 29.

Количество реализаций случайного процесса. Точность воспроизведения характеристик случайного процесса зависит от количества N его реализаций. Так как выявление закономерностей посредством имитации близко экспериментальным исследованиям, то для определения требуемого количества реализаций используем подход, применяемый при обработке данных для расчета доверительных интервалов оценок характеристик случайных процессов (например, [5]). При этом необходимо решить обратную задачу: определить значение N по заданной погрешности воспроизведения той или иной характеристики, в первую очередь, среднего значения i_c и дисперсии D .

Обозначим через E вероятность того, что допустимые погрешности ε_c и ε_D воспроизведения среднего значения и дисперсии не будут превзойдены. Тогда доверительный интервал для среднего значения будет равен $\varepsilon_c i_c$, что позволяет записать исходную формулу (14.3.7) с учетом (14.3.8) из [5] в виде

$$\varepsilon_c i_c = \sqrt{\frac{D}{N_{\text{cmin}}}} \arg \Phi^* \left(\frac{1+E}{2} \right) = \sqrt{\frac{D}{N_{\text{cmin}}}} \psi,$$

где N_{cmin} - минимальное количество реализаций, $\Phi^*(x)$ - табулированная функция стандартного нормального распределения, ψ - обратная функция. Отсюда получаем

$$N_{\text{cmin}} = \frac{\psi^2 D}{i_c^2 \varepsilon_c^2}$$

Аналогичным образом, используя выражение (14.3.7) с учетом (14.3.12) из [5], записываем формулу расчета доверительного интервала для дисперсии

$$\varepsilon_D D = \psi \sqrt{\frac{1}{N_{D\min}} \mu_4 - \frac{N_{D\min} - 3}{N_{D\min} (N_{D\min} - 1)} D^2},$$

где μ_4 – центральный момент четвертого порядка случайной величины. После преобразований, при

$$\chi = \psi^2 / \varepsilon^2, \quad a_1 = D^2, \quad a_2 = \chi(D^2 - \mu_4) - D^2, \quad a_3 = \chi(\mu_4 - 3D^2)$$

получаем квадратное уравнение $a_1 N_{D\min}^2 + a_2 N_{D\min} + a_3 = 0$ для определения $N_{D\min}$. По смыслу задачи с запасом выбираем больший корень:

$$N_{D\min} = \frac{1}{2} \left[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4a_3} \right], \quad (3)$$

где $\gamma = a_2/a_1 = \chi(1 - \mu_4/D^2) - 1$.

Для двухступенчатого графика нагрузки с величинами ступеней i_o и $i_b > i_o$ среднее значение и дисперсию исходного процесса можно выразить через коэффициенты включения и отключения $k_o = 1 - k_b$, воспользовавшись выражениями (1.78) [1]: $i_c = k_b i_b + k_o i_o$, $D = k_b k_o (i_b - i_o)^2$. По определению четвертый центральный момент составит $\mu_4 = (i_o - i_c)^4 k_o + (i_b - i_c)^4 k_b$. При $i_o = 0$, $i_b = 1$ формулы для среднего значения, дисперсии и четвертого центрального момента принимают вид $i_c = k_b$, $D = k_b k_o$, $\mu_4 = k_b k_o (k_b^3 + k_o^3)$, а минимальное количество реализаций исходного процесса, обеспечивающее воспроизведение среднего значения с заданной погрешностью, составит $N_{c\min} = \chi(1/k_b - 1)$. Количество реализаций, необходимое для воспроизведения дисперсии, определяется по формуле (3) при

$$\gamma = \chi \left(3 - \frac{1}{k_b(1-k_b)} \right) - 1, \quad a_3 = \chi k_b (1 - 7k_b + 12k_b^2 - 6k_b^3).$$

Длительность реализаций случайного процесса. При изучении случайного процесса по ансамблю реализаций, построение гистограмм и вычисление моментов осуществляется по его сечению, поэтому в случае необходимости получения этих характеристик длительность процесса t_n определяется исследуемым моментом времени. Если для расчета характеристик требуется более одного сечения, то длительность реализаций необходимо увеличить до последнего сечения.

В задаче о нагреве проводника интерес представляет установившееся значение температуры перегрева проводника и ее корреляционная функция

$k_y(\tau)$ для значений аргумента τ от 0 до заданного наибольшего значения τ_M . В связи с этим для определения t_n ко времени затухания переходного процесса необходимо добавить τ_M .

В отличие от анализа по ансамблю, при изучении эргодического процесса по одной реализации ее длительность должна во много раз превышать t_n . Но даже в этом частном случае имитация одной реализации не позволяет изучать переходной процесс. Поэтому, несмотря на большую наглядность некоторых характеристик (длительность выбросов, упорядоченная диаграмма и др.), вычисленных по одной реализации, имитация ансамблей реализаций, по нашему мнению, предпочтительнее.

Имитация ансамбля входного процесса. Методы имитации случайных процессов хорошо разработаны [1]. В рассматриваемом случае имитация процесса сводится к получению двух независимых распределенных по экспоненциальному закону случайных величин: длительностей импульсов и пауз. Это объясняется тем, что корреляционная функция $k(\tau)$ исходного процесса определяется через одномерные распределения этих величин [6]. Для экспоненциальных распределений

$$k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|},$$

где параметр $\alpha = 1/[\lambda k_v(1 - k_v)]$ выражается через коэффициент включения и интенсивность (среднюю частоту) потоков включений или отключений.

Одним из распространенных методов имитации случайной величины является функциональное преобразование [7] равномерно распределенной величины ξ , которая получается от генератора случайных чисел (ГСЧ) ПЭВМ в диапазоне ее значений от 0 до 1. Случайную величину t , распределенную от 0 до ∞ по экспоненциальному закону с плотностью распределения

$$f(t) = ae^{-at} \quad (4)$$

можно получить путем преобразования

$$t = -(1/a)\ln(1 - \xi) \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) длительность теоретически может принимать значения от 0 до ∞ . Одним из преимуществ имитации по ансамблю является то, что такая неограниченность справа принципиально не сказывается на практической реализации метода, поскольку имитация прекращается при достижении t_n . Для эргодических же процессов реализовать бесконечную длительность невозможно. При моделировании максимальная и минимальная длительности

были ограничены в соответствии с принципом практической уверенности [1] при граничной вероятности $E_t = 0,05$.

Для имитации входного процесса каждая реализация записывается в виде последовательности пар значений моментов возникновения импульсов со скачком +1 вверх и пауз со скачком -1 вниз. Для импульсных процессов такая форма описания графика по сравнению с традиционной [3], когда фиксируются значения нагрузки с определенным шагом по времени, не искажает исходный процесс, более экономична и ускоряет решение задачи.

Результаты имитации. Задача о телеграфном сигнале была решена методом имитационного моделирования для случая с известным решением ($k_b = 0,5$) с целью тестирования. Найденные экспериментально плотности распределения квадратичного инерционного процесса $y(t)$ на рисунке показаны в виде гистограмм, теоретическая кривая плотности распределения – сплошной линией. Для описания закона распределения инерционного процесса, в том числе и при $k_b \neq 0,5$ хорошо подходит бета-распределение [8] с параметрами γ_β и η_β , плотность вероятности которого, выраженная через гамма-функцию, для $0 \leq x \leq 1$ имеет вид

$$f(x, \gamma_\beta, \eta_\beta) = \frac{\Gamma(\gamma_\beta + \eta_\beta)}{\Gamma(\gamma_\beta)\Gamma(\eta_\beta)} x^{\gamma_\beta} (1-x)^{\eta_\beta-1} \quad (6)$$

Переход к другому диапазону x не вызывает затруднений.

Математическое ожидание m и дисперсия D бета-распределения

$$m = \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\beta + \eta_\beta}, \quad D = \frac{\gamma_\beta \eta_\beta}{(\gamma_\beta + \eta_\beta)^2 (\gamma_\beta + \eta_\beta + 1)}$$

Отсюда получим формулы для определения параметров бета-распределения по опытным значениям математического ожидания \tilde{m} и дисперсии \tilde{D} .

$$\gamma_\beta = \left[\frac{(1-\tilde{m})\tilde{m}}{\tilde{D}} - 1 \right] \tilde{m}, \quad \eta_\beta = \gamma_\beta \left(\frac{1}{\tilde{m}} - 1 \right)$$

На рисунке 1 кривые плотности бета-распределения показаны пунктиром.

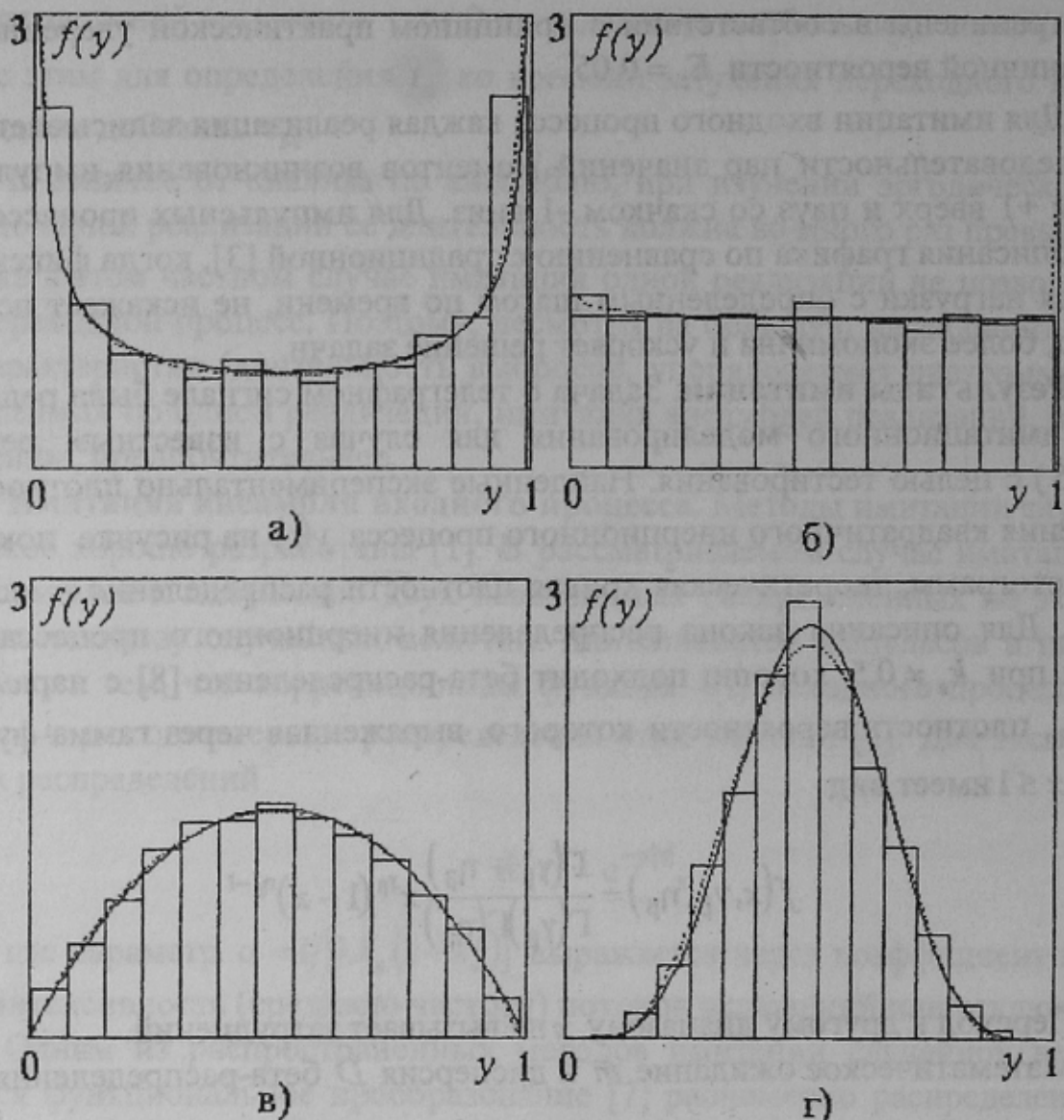


Рисунок – Кривые плотностей распределения инерционного процесса при импульсном входном процессе с экспоненциальной КФ и $k_v = 0,5$:

а) $\lambda T = 0,25$; б) $\lambda T = 0,5$; в) $\lambda T = 1$; г) $\lambda T = 3$

Проверка соответствия опытного закона распределения теоретическому, выполненная по критерию Колмогорова, для аналитически найденной плотности распределения (2) и бета-распределения дала положительный результат.

Выводы. 1. Для задач, не имеющих аналитического решения целесообразно применение имитационных методов с моделированием ансамбля реализаций. Расчет вероятностных характеристик выполнять по сечению ансамбля. Количество реализаций следует определять исходя из точности воспроизведения характеристик случайного процесса.

2. Метод имитации позволил получить решение задачи о нагреве проводника последовательностью прямоугольных импульсов с экспоненциальными длительностями импульсов и пауз в виде бета-распределения (6).

Автор благодарит научного руководителя доктора технических наук, профессора Куренного Эдуарда Григорьевича за постановку задачи.

Список литературы

1. Шидловский А.К., Куренный Э.Г. Введение в статистическую динамику систем электроснабжения. – Киев: Наукова думка, 1984. – 273 с.
2. Куренный Э.Г., Погребняк Н.Н. “Эстафетный” метод имитации случайных электроэнергетических процессов // Техническая электродинамика. – 1990. – №3. – с. 3-6.
3. Шидловский А.К., Вагин Г.Я., Куренный Э.Г. Расчеты электрических нагрузок систем электроснабжения промышленных предприятий. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 224 с.
4. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1970. – 597 с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
6. Седякин Н.М. Элементы теории случайных импульсных потоков. – М.: Сов. радио, 1965. – 261 с.
7. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
8. Плескунин В.И., Воронина Е.Д. Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1979. – 231 с.