

Кафедра «Промышленная теплоэнергетика»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«Математическое моделирование интенсификации тепломассообменных процессов и аппаратов»

для студентов специальностей

Напрямок підготовки	0506	Теплоэнергетика
Спеціальність	8.05060101	Теплоэнергетика – ТП
	8.05060103	«Теплові електричні станції»,
	8.05060105	«Енергетичний менеджмент»

Утвержден на заседании кафедры
«Промышленная теплоэнергетика»,
протокол № 1 от 30.08.2013 г.

Утвержден на заседании учебно –
методической комиссии направления
подготовки «Теплоэнергетика»,
протокол № 1 от 05.09.2013 г.

УДК 536.24: 536.423: 532.5: 621.565.9

Конспект лекций по курсу **«Математическое моделирование интенсификации тепломассообменных процессов и аппаратов»** предназначается для студентов очной и заочной формы обучения специальностей 8.05060103 «Тепловые электрические станции», 8.05060101 – «Теплоэнергетика» и 8.05060105 – «Энергетический менеджмент» / Гридин С.В. - Донецк: ДонНТУ, 2013. - 50 с.

Курс лекций рекомендован для студентов любой формы обучения специальностей направления «Теплоэнергетика» и может быть полезен инженерно-техническим работникам занимающимся проблемами интенсификации тепломассообменных процессов.

В курсе рассматриваются особенности интенсификации передачи тепла различными методами. Особенное внимание обращено на развитие теплообменных поверхностей за счет ребер и шипов.

Автор – Гридин С.В., к.т.н., доц.

Рецензент Бирюков А.Б., к.т.н., доц.

© Гридин С.В.

© Донецкий национальный технический университет, 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

Возрастающая потребность в сокращении затрат энергии и материалов приводит к необходимости проведения исследований по созданию более эффективного теплоэнергетического оборудования.

Целью таких исследований является уменьшение габаритов агрегатов либо увеличение их тепловой производительности.

Более эффективная теплоотдача может понадобиться для предотвращения перегрева либо разрушения систем при заданной интенсивности тепловыделения, поэтому интенсификация теплоотдачи в настоящее время является важной областью в изучении теплообмена.

Приемы интенсификации теплоотдачи подразделяются на пассивные (не требующие затрат извне), и активные.

Пассивные методы включают в себя:

- физико-химическую обработку поверхности;
- использование шероховатых и развитых поверхностей;
- использование устройств для перемешивания и закручивания потока;
- способы воздействия на поверхностное натяжение теплоносителя;
- добавление примесей в теплоноситель.

Активные методы включают в себя:

- механические воздействия;
- вибрацию поверхностей;
- пульсацию потока жидкостей;
- вдув или отсос теплоносителя,
- использование электрических и электромагнитных полей.

ОСНОВЫ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ТЕПЛООБМЕНА

Система уравнений, описывающая явление теплоотдачи, включает: дифференциальные уравнения энергии (для теплоносителя), теплоотдачи, массообмена, движения и сплошности. Для процессов, в которых перенос вещества имеет второстепенное значение, уравнение массообмена не рассматривается.

Поэтому в систему, описывающую математическую постановку задачи исследования конвективного теплообмена, необходимо включить:

- дифференциальное **уравнение энергии** (на основе закона сохранения энергии и закона Фурье для плотности теплового потока $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{n=0}$) в сжимаемых под-

вижных средах при $\lambda = \lambda_{(t,x,y,z)}$:

$$\rho C_p \left[\frac{\partial t}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial t}{\partial x} + W_y \frac{\partial t}{\partial y} + W_z \frac{\partial t}{\partial z} + t \frac{\partial W_x}{\partial z} + t \frac{\partial W_y}{\partial z} + t \frac{\partial W_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \pm q_v$$

, Вт/м³

- дифференциальное **уравнение энергии** (на основе закона сохранения энергии и

закона Фурье для плотности теплового потока $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{n=0}$) в несжимаемых подвижных средах:

$$\rho C_p \left[\frac{\partial t}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial t}{\partial x} + W_y \frac{\partial t}{\partial y} + W_z \frac{\partial t}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \pm q_v, \quad \text{Вт/м}^3$$

- дифференциальное уравнение Фурье для стенки ($W_x=0, W_y=0, W_z=0$):

$$\rho C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \pm q_v$$

- дифференциальное **уравнение массообмена** (на основе закона сохранения вещества и закона Фика для массового потока вещества $j = -D_C \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{n=0}$) в подвижных средах при мощности внутренних источников вещества $j_v \neq 0$:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + W_y \frac{\partial C_i}{\partial y} + W_z \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_C \left[\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right] \pm j_v, \quad \text{кг} \cdot \text{м}^3 / \text{сек}$$

- **уравнение изотермического движения Навье-Стокса** для вязкой несжимаемой жидкости при постоянном коэффициенте динамической вязкости $\mu = \text{const}$ (получено на основе 2-го закона Ньютона) для проекции скорости W

на ось X

$$\rho \left(\frac{\partial W_x}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial z^2} \right), \quad \text{кг/м}^2 \text{сек}^2$$

$$\text{или} \quad \rho \frac{D\ddot{W}}{d\tau} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 \ddot{W} \quad (\text{при } g_x=0);$$

на ось Y

$$\rho \left(\frac{\partial W_y}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial W_y}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial y} + W_z \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 W_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{или} \quad \rho \frac{D\ddot{W}}{d\tau} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 \ddot{W} \quad (\text{при } g_y=0);$$

на ось Z (параллельна массовой силе $F = \rho g$)

$$\rho \left(\frac{\partial W_z}{\partial \tau} + W_x \frac{\partial W_z}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_z}{\partial y} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 W_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{или} \quad \rho \frac{D\ddot{W}}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 \ddot{W} \quad (\text{при } g=g_z);$$

- **уравнение неразрывности** (сплошности, на основе закона сохранения массы):

$$\text{- для сжимаемой среды: } \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho W_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{D\rho}{d\tau} = -\rho \operatorname{div} \vec{W}$$

$$\text{- для несжимаемой среды: } \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{W} = 0$$

- для всех уравнений требуется сформулировать условия однозначности

- **уравнение связи** (дифференциальное уравнение теплоотдачи):

$$\alpha = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_{n=0} / (t_{cp} - t_{cm});$$

Количество тепла, участвующее в конвективном теплообмене, составляет

$$Q = k \cdot \Delta t \cdot F;$$

где k – коэффициент теплопередачи, для плоской стенки $k = 1 / \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$.

Математическая формулировка задач теплообмена и виды краевых условий

Дифференциальные уравнения описывают целый класс физических явлений одинаковой природы. Решение дифференциальных уравнений содержит константы интегрирования и потому не является однозначным. Для оценки этих констант необходимо задать частные особенности изучаемого явления. Математическую формулировку частных особенностей явления называют краевыми условиями или условиями однозначности.

Различают четыре вида условий однозначности: геометрические, физические, граничные и временные.

Геометрические условия отражают форму и размеры тел или поверхностей соприкосновения теплоносителя с телом, участвующих в теплообмене.

Физические условия характеризуют физические свойства участвующих в теплообмене тел (теплопроводность, вязкость и др.).

Граничные условия определяют особенности протекания явлений (распределение скоростей, температур и концентраций) на границах изучаемой системы.

Временные условия (начальные) определяют начальное состояние системы и изменение граничных условий во времени. Временные условия задаются только при нестационарном режиме теплообмена.

Математическая формулировка задачи теплопроводности включает дифференциальное уравнение энергии для неподвижного тела ($W_x = W_y = W_z = 0$). В этом случае геометрические условия однозначности определяют форму и размеры тела, участвующего в процессе, а физические условия — коэффициенты его теплопроводности и температуропроводности.

Граничные условия для этой задачи могут быть заданы в трех различных вариантах.

Граничные условия *первого рода* состоят в задании *температуры* на поверхностях тела, участвующего в теплообмене, и ее изменения во времени.

Граничные условия *второго рода* состоят в задании распределения *плотности теплового потока* на поверхностях тела и ее изменения во времени.

Граничные условия *третьего рода* состоят в задании *температуры сред*, омывающих поверхности тела, *и условий теплообмена* между средами и поверхностями (коэффициенты теплообмена).

Уравнения переноса в ортогональной системе координат

Введем в рассмотрение произвольные ортогональные координаты ξ_1, ξ_2 и ξ_3 , которые связаны с декартовыми координатами выражениями:

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \quad (1)$$

Например, для цилиндрической системы координат имеем:

$$\xi_1 = r; \quad \xi_2 = \varphi; \quad \xi_3 = z; \quad x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z \quad (1.1)$$

для сферической системы координат это будут соотношения:

$$\xi_1 = r; \quad \xi_2 = \theta; \quad \xi_3 = \varphi; \quad x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta \quad (1.2)$$

При переходе из одной системы в другую всегда находятся параметры, величины которых будут сохраняться (*инварианты*). Например, таким инвариантом может быть *расстояние между двумя точками, элементарный объём или площадь выделенной поверхности*.

Если пространство отнесено к декартовой системе координат $Oxyz$, то

$$r = ix + jy + kz, \quad dr = idx + jdy + kdz.$$

Значит, *квадрат линейного элемента в декартовых координатах* выражается как:

$$dr^2 = i^2 dx^2 + j^2 dy^2 + k^2 dz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

т.к. координатные орты i, j, k имеют модули, равные единице, то $i^2 = 1, j^2 = 1, k^2 = 1$.

Скалярные произведения ортов:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Рассмотрим расстояние между двумя точками в системе x, y, z

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Выразим расстояние между двумя точками: $dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (2)

Найдем дифференциал каждой координаты (выражения (1)) в новой системе, учитывая, что полный дифференциал функции $f(x, y, z)$ можно представить

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz, \text{ и получим:}$$

$$dx = (\partial x / \partial \xi_1) d\xi_1 + (\partial x / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial x / \partial \xi_3) d\xi_3$$

$$dy = (\partial y / \partial \xi_1) d\xi_1 + (\partial y / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial y / \partial \xi_3) d\xi_3 \quad (3)$$

$$dz = (\partial z / \partial \xi_1) d\xi_1 + (\partial z / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial z / \partial \xi_3) d\xi_3.$$

Подставим полученные выражения в зависимость (2), учитывая, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc),$$

получим:

$$\begin{aligned} dL^2 = & (\partial x / \partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial x / \partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial x / \partial \xi_3)^2 d\xi_3^2 + \\ & 2((\partial x / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial x / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial x / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial x / \partial \xi_3) d\xi_3 + (\partial x / \partial \xi_2) d\xi_2 (\partial x / \partial \xi_3) d\xi_3) + \\ & (\partial y / \partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial y / \partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial y / \partial \xi_3)^2 d\xi_3^2 + \\ & 2((\partial y / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial y / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial y / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial y / \partial \xi_3) d\xi_3 + (\partial y / \partial \xi_2) d\xi_2 (\partial y / \partial \xi_3) d\xi_3) + \\ & (\partial z / \partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial z / \partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial z / \partial \xi_3)^2 d\xi_3^2 + \\ & 2((\partial z / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial z / \partial \xi_2) d\xi_2 + (\partial z / \partial \xi_1) d\xi_1 (\partial z / \partial \xi_3) d\xi_3 + (\partial z / \partial \xi_2) d\xi_2 (\partial z / \partial \xi_3) d\xi_3). \end{aligned}$$

Скалярным произведением векторов \vec{A} и \vec{B} называется число

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \quad \text{где } \vec{A} = \vec{A}\{X_1, Y_1, Z_1\} \text{ и } \vec{B} = \vec{B}\{X_2, Y_2, Z_2\}$$

Два вектора называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. С учётом этих условий:

$$\partial x/\partial \xi_i \partial x/\partial \xi_j + \partial y/\partial \xi_i \partial y/\partial \xi_j + \partial z/\partial \xi_i \partial z/\partial \xi_j = 0 \quad (4)$$

Скалярные произведения ортов: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

получим

$$\begin{aligned} dL^2 &= (\partial x/\partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial x/\partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial x/\partial \xi_3)^2 d\xi_3^2 + \\ &(\partial y/\partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial y/\partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial y/\partial \xi_3)^2 d\xi_3^2 + \\ &(\partial z/\partial \xi_1)^2 d\xi_1^2 + (\partial z/\partial \xi_2)^2 d\xi_2^2 + (\partial z/\partial \xi_3)^2 d\xi_3^2. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} dL^2 &= ((\partial x/\partial \xi_1)^2 + (\partial y/\partial \xi_1)^2 + (\partial z/\partial \xi_1)^2) d\xi_1^2 + \\ &((\partial x/\partial \xi_2)^2 + (\partial y/\partial \xi_2)^2 + (\partial z/\partial \xi_2)^2) d\xi_2^2 + \\ &((\partial x/\partial \xi_3)^2 + (\partial y/\partial \xi_3)^2 + (\partial z/\partial \xi_3)^2) d\xi_3^2. \end{aligned}$$

$$dL^2 = H_1^2 d\xi_1^2 + H_2^2 d\xi_2^2 + H_3^2 d\xi_3^2, \quad (5)$$

где H_i – метрические коэффициенты, или коэффициенты Лямэ, определяемые выражением:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\right)^2} \quad (6)$$

Коэффициенты Лямэ можно определить и через элементарный объём:

$$dV = dx dy dz \quad dV = H_1 H_2 H_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

Определим коэффициенты **ЛЯМЭ** для некоторых систем координат.

Например, для **прямоугольной декартовой системы координат** имеем:

$$\xi_1 \equiv x; \quad \xi_2 \equiv y; \quad \xi_3 \equiv z;$$

$$x \equiv x; \quad y \equiv y; \quad z \equiv z \text{ тогда коэффициенты Лямэ } H_1=1, \quad H_2=1, \quad H_3=1.$$

Для **цилиндрической системы координат**, учитывая, что

$$\xi_1 = r; \quad \xi_2 = \varphi; \quad \xi_3 = z$$

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z \text{ имеем коэффициенты Лямэ}$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial(r)}{\partial r} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial(r)}{\partial r} \sin \varphi\right)^2} + 0 = 1$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{-(r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2}$$

$$= \sqrt{r^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = r$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0+0+1} = 1$$

$$\text{т.е. } H_1=1, \quad H_2=r, \quad H_3=1.$$

Для **сферической системы координат** можно получить:

$$H_1=1, \quad H_2=r, \quad H_3=r \sin \theta.$$

Для любой другой криволинейной ортогональной системы координат коэффициенты Лямэ можно определить аналогичным способом.

Основные дифференциальные операторы
для скалярной величины $P = P(x, y, z)$ -

градиент

$$\nabla P = \text{grad } P = \ddot{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \ddot{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \ddot{k} \frac{\partial P}{\partial z};$$

дивергенция вектора $\nabla \cdot \ddot{A} = \text{div } \ddot{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

где $\ddot{A} = \ddot{i} A_x + \ddot{j} A_y + \ddot{k} A_z$

$$\text{ротор вектора } \ddot{\nabla}_x \ddot{A} = \text{rot } \ddot{A} = \begin{vmatrix} \ddot{i} & \ddot{j} & \ddot{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

предстанут в виде - градиент от скалярной величины

$$\text{grad } P = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{H_j} \frac{dP}{dx_j} \ddot{i}_j;$$

дивергенция $\text{div } \ddot{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H_2 H_3 A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_3 H_1 A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 A_z) \right];$

лаплассиан $\Delta P = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right]$

... получим уравнения неразрывности, количества движения и энергии в криволинейной ортогональной системе координат в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_{\sigma}} \left(\frac{\rho V_{\sigma} H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} \right) = 0 \quad ()$$

$$\frac{\partial \rho \ddot{V}}{\partial \tau} = \rho \ddot{F} - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left(\frac{\rho \ddot{V} V_{\sigma} H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} \right) + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left[(\ddot{\tau}_{\sigma} - p \ddot{e}_{\sigma}) \frac{H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} \right]; (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \varepsilon + \rho \ddot{F} \cdot \ddot{V} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left\{ \frac{H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} \left[-\rho V_{\sigma} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) + q_{\sigma}^T - p V_{\sigma} + \right] \right\} \quad ()$$

где $\ddot{\tau}_{\sigma} \cdot \ddot{V} = \tau_{\sigma 1} \cdot V + \tau_{\sigma 2} \cdot V + \tau_{\sigma 3} \cdot V$

С учетом (12) уравнения (13) и (14) можно заменить следующим образом:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \ddot{V}}{\partial \tau} + \frac{V_{\sigma}}{H_{\sigma}} + \frac{\partial \ddot{V}}{\partial q_{\sigma}} \right\} = \rho \ddot{F} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left[(\ddot{\tau}_{\sigma} - p \ddot{e}_{\sigma}) \frac{H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} \right] \quad ()$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} + \frac{V_{\sigma}}{H_{\sigma}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\sigma}} \right\} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \ddot{F} \cdot \ddot{V} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\sigma}} \left\{ \frac{H_1 H_2 H_3}{H_{\sigma}} (q_{\sigma}^T + \ddot{\tau}_{\sigma} \cdot \ddot{V}) \right\} + \rho \varepsilon$$

где $H = U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = h + \frac{V^2}{2}$ - где полная энтальпия единицы массы жидкости

Уравнение энергии можно представить еще и так:

$$\rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{V_\sigma}{H_\sigma} \frac{\partial h}{\partial q_\sigma} \right\} = \frac{\partial p}{\partial \tau} + \ddot{V} \cdot \nabla p + \frac{l}{H_1 H_2 H_3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{H_1 H_2 H_3}{H_j} q_j^\tau + \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\tau_\sigma^{\dot{V}_0}}{H_\sigma} \cdot \frac{\partial \ddot{V}}{\partial q_\sigma} \quad ()$$

где

$$\sum_{\sigma=1}^3 \frac{\tau_\sigma^{\dot{V}_0}}{H_\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial q_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^3 \left(\frac{\tau_{\sigma 1}}{H_\sigma} \frac{\partial V_1}{\partial q_\sigma} + \frac{\tau_{\sigma 2}}{H_\sigma} \frac{\partial V_\sigma}{\partial q_\sigma} + \frac{\tau_{\sigma 3}}{H_\sigma} \frac{\partial V_3}{\partial q_\sigma} \right) +$$

$$\sum_{\sigma=1}^3 \frac{\tau_\sigma^{\dot{V}_0}}{H_\sigma} \frac{\partial \bar{V}^0}{\partial q_\sigma} = \sum_{\sigma} \sum_i \frac{V_i}{H_i H_\sigma} \frac{\partial H_\sigma}{\partial q_i} \tau_\sigma - \sum_{\sigma} \sum_i \frac{V}{H_i H_\sigma} \frac{\partial H_\sigma}{\partial q_i} \tau_\sigma$$

$$\sum_{\sigma} \sum_i \frac{V_i}{H_i H_\sigma} \frac{\partial H_\sigma}{\partial q_i} \tau_\sigma - \sum_{\sigma} \sum_i \frac{V}{H_i H_\sigma} \frac{\partial H_\sigma}{\partial q_i} \tau_\sigma \quad ()$$

Для записи уравнений движения в проекции на оси координат q_1, q_2 и q_3 необходимо знать производные от единичных векторов \ddot{e}_i . Как следует из векторного анализа // и как это сделано в работе //

$$\nabla = \frac{\ddot{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\ddot{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\ddot{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (19)$$

$$\text{ротор} \quad \text{rot } \ddot{a} = \frac{\ddot{e}_1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right\} + \frac{\ddot{e}_2}{H_1 H_3} \left\{ \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right\} + \quad (20)$$

$$\frac{\ddot{e}_3}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right\}$$

$$\text{дивергенция} \quad \text{div } \ddot{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left(\frac{G_\sigma}{H_\sigma} H_1 H_2 H_3 \right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \ddot{e}_i}{\partial q_i} = - \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\ddot{e}_\sigma}{H_\sigma} \frac{\partial H_i}{\partial q_\sigma} + \frac{\ddot{e}_i}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial q_i} \quad (22)$$

$$\text{А если } i \neq j, \text{ то} \quad \frac{\partial \ddot{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\ddot{e}_j}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \quad (23)$$

Поэтому уравнения движения в проекции на оси координат можно применять в виде:

$$\rho \frac{dV_i}{d\tau} = \rho \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{V_k}{H_k} \frac{\partial V_i}{\partial q_k} - \frac{V_k^2}{H_i H_k} \frac{V_k V_i}{H_k H_i} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \right] \right\} =$$

$$= \rho F_i - \frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \tau_{ik} \right) - \tau_{kk} \frac{\partial l H_k}{\partial q_i} \right\} \quad (24)$$

При $i=1, 2, 3$ – всего будет 3 уравнения.

Левую часть последнего уравнения можно придать вид:

$$\rho \frac{dV_i}{d\tau} = \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\rho V_i V_k}{H_k} + \sum_{k=1}^3 \frac{\rho V_i V_k}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \ln(H_1 H_2 H_3) - \sum_{k=1}^3 \frac{\rho V_k^2}{H_k} \frac{\partial \ln H_k}{\partial q_i}$$

В случае вязкой ньютоновской жидкости составляющие тензора напряжения трения в криволинейных координатах можно записать в следующем виде:

$$\tau_{ik} = \mu \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial V_k}{\partial \xi_i} - \frac{1}{H_i H_k} \left[V_i \frac{\partial H_i}{\partial \xi_k} + V_k \frac{\partial H_k}{\partial \xi_i} \right] + 2\delta_{ik} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{V_\sigma}{H_\sigma} \frac{\partial \ln H_i}{\partial \xi_\sigma} \right\} + \delta_{ik} \xi' \operatorname{div} \ddot{V} \quad (26)$$

где символ Кронекерра $\delta_{ik}=0$ при $i \neq k$; и $\delta_{ik}=1$, если $i=k$.

Составляющие тензора теплового потока в соответствии с законом Фурье:

$$q_i^T = \frac{\lambda}{H_i} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \quad (27)$$

Перевод уравнения ФУРЬЕ из прямоугольной системы координат в ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ

Двухмерное уравнение ФУРЬЕ в прямоугольной системе координат имеет вид

$$\rho C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) \quad (1)$$

Предполагается, что искомая функция зависит $t = t(x, y, \tau)$.

Требуется представить это уравнение в цилиндрической системе координат, так что искомая функция будет зависеть $t = t(r, \varphi, \tau)$.

Известно, что соотношения между координатами

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \\ r &= r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} & \varphi &= \varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \tau' &= \tau'(\tau) \end{aligned}$$

Для перевода в цилиндрическую систему координат необходимо каждый оператор уравнения (1) перевести в эту систему.

Найдем производные первого порядка в предположении, что искомая функция зависит от r и φ следующим образом $t = t(r(x, y), \varphi(x, y), \tau)$:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t(r(x, y), \varphi(x, y), \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t(r(x, y), \varphi(x, y), \tau)}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (3)$$

которые можно представить в виде операторов А и В

$$A[.] = \frac{\partial[.]}{\partial x} = \frac{\partial[.]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial[.]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad B[.] = \frac{\partial[.]}{\partial y} = \frac{\partial[.]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial[.]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4)$$

Это облегчает получение производных. Чтобы определить первую производную по X необходимо в скобки оператора А поместить температуру.

$$A[t] = \frac{\partial[t]}{\partial x} = \frac{\partial[t]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial[t]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Аналогично, для получения второй производной требуется подставить в скобки $A[t]$.

$$A[\lambda A] = \frac{\partial[\lambda A]}{\partial x} = \frac{\partial[\lambda A]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial[\lambda A]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5)$$

1 2 3 4

Рассмотрим подробно каждое отмеченное слагаемое этого выражения

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \quad (6)$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \quad (7)$$

$$3. \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8)$$

$$4. \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (9)$$

Определим выражения $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2r \cos \varphi}{2r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 = \cos^2 \varphi \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (\cos \varphi) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\sin \varphi}{r^2}$$

(16)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = -\sin \varphi \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) = -\frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\cos \varphi}{r} \quad (18)$$

Подставим полученные зависимости в выражения (6) - (9), имеем

$$1. \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \cos^2 \varphi + 0;$$

$$2. \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$3. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} (-\sin \varphi) \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{r} \right)$$

$$4. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

Поэтому вторая производная по X примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \cos^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \cos^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right) \quad (19)$$

Применим оператор В к самому оператору и получим вторую производную

по Y от температуры.

$$B[.] = \frac{\partial[.]}{\partial y} = \frac{\partial[.]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial[.]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial[\lambda B]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda B]}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial[B]}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (20)$$

5 6 7 8

Элементы этого равенства предстанут в виде

$$5. \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right] \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} \quad (21)$$

$$6. \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} \quad (22)$$

$$7. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (23)$$

$$8. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (24)$$

Определим выражения $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$, $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$.

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2r \sin \varphi}{2r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 = \sin^2 \varphi \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{r \cos \varphi}{r^2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r} \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (\sin \varphi) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \varphi}{r} \right) = -\frac{\cos \varphi}{r^2} \quad (31)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \left(\frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \right) + \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right] + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right)$$

Теперь уравнение Фурье в цилиндрической системе координат будет иметь вид

$$\rho C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right]$$

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

Пассивные методы

Влияние шероховатости поверхности на теплоотдачу вертикальной обогреваемой пластины приводит к увеличению теплоотдачи от 5 до 200%, добавка примеси (например, ввод пузырьков пара) может увеличить теплоотдачу при свободной конвекции в несколько раз.

Активные методы

При вибрации горизонтальных цилиндров в горизонтальных и вертикальных направлениях коэффициенты теплоотдачи увеличиваются до 10 раз как для малых частот и больших амплитуд, так и для больших частот и малых амплитуд. Свободная конвекция малоэффективна для теплообмена и необходимо переходить к вынужденной конвекции. Вибрация плохо сказывается на работе оборудования.

Вибрация жидкости

В промышленном оборудовании сложно заставить вибрировать теплообменные поверхности, поэтому используют вибрацию жидкости. При этом используют различные устройства, от механических прерывателей потока до пьезоэлектрических преобразователей, с помощью которых удастся охватить диапазон частот $1-10^6$ Гц. Увеличение коэффициента теплоотдачи наблюдали до $100\div 200\%$ при колебании около горизонтальных цилиндров, газ с интенсивностью 10дБА.

С помощью ультразвукового преобразователя также можно увеличить теплоотдачу от пористых нагревателей основным механизмом при этом является кавитация. Увеличение коэффициента теплоотдачи достигает 500%.

Электрические поля

В условиях свободной конвекции увеличение коэффициента теплоотдачи возможно при использовании электрических полей. Электростатические силы вызывают лучшее перемешивание жидкости вблизи поверхности.

Для охлаждения режущего инструмента иногда используют коронный разряд. При этом используют параллельные проволочные электроды.

Вдув

Вдув газа в жидкость через пористую обогреваемую пластину также можно рассматривать как интенсификацию теплообмена.

ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

Шероховатая поверхность

Шероховатая поверхность может быть получена с помощью механической обработки, штамповки, литья или сварки. Выступы на поверхности могут быть образованы с помощью различных вставок. При ламинарном течении и использовании витых труб и поперечных ребер в кольцевом канале наблюдалось увеличение коэффициента теплоотдачи на 100%.

При турбулентном течении наблюдалась сильная зависимость между коэффициентом теплоотдачи и коэффициентом сопротивления (коэффициент теплоотдачи увеличивается в 4 раза, при этом коэффициент сопротивления трения увеличивается до 50 раз).

В последние годы наметился выпуск труб с внутренней шероховатостью, со спиральным рифлением и т.д.

Развитые поверхности

Наиболее старым методом интенсификации теплообмена можно считать использование развитых поверхностей – это оребрение труб, оребрение плоских поверхностей. При ламинарном режиме течения теплоотдача практически не изменяется за исключением случая, когда используются поверхности с большим числом маленьких отверстий с диаметром 0,08 см при площади перфорации 20% от общей площади пластины. На перфорированных пластинах наблюдается ускоренный переход к турбулентному режиму течения при $Re=500\div 1000$, в тоже время при не перфорированных поверхностях пластинчатых теплообменников переход достигается при $Re=1000\div 5000$.

Перемешивание жидкости

Это различные виды мешалок, предназначенных для того, чтобы преобразовать поток жидкости вблизи поверхности и направить его в поперечном направлении. Такие устройства увеличивают теплоотдачу при ламинарном течении в несколько раз.

Если использовать вставки и расположить их по всей длине трубы, при этом можно повысить теплоотдачу почти в 10 раз. В коротких каналах при больших тепловых нагрузках и турбулентном теплообмене для интенсификации использовали сеточные или спиральные щеточные вставки. При этом коэффициент теплоотдачи увеличивался почти в 9 раз, но перепады давления возрастали почти в 3 тыс. раз.

Для перемешивания жидкости в пристенных областях и в ядре потока используют дисковые вставки.

При течении воздуха в трубах, обогреваемых электрическим током, происходило увеличение локальных коэффициентов теплоотдачи. Но на расстоянии более 10 калибров вниз по потоку, увеличения коэффициента теплоотдачи обнаружено не было. В среднем коэффициент теплоотдачи на этом участке увеличился примерно на 100%, а коэффициенты сопротивления больше чем на 50%.

Закручивание потока жидкости

Такие устройства включают завихрители потока на входе в канал, вставки в виде витых лент, вставки с завихрителями шнекового типа, которые располагаются вдоль оси в ядре потока. Можно сказать, что коэффициент сопротивления трения увеличивается незначительно, а число Нуссельта (Nu) увеличивается в несколько раз.

Добавки в жидкость

Ввод твердых частиц или пузырьков газа приводит к умеренному увеличению теплоотдачи. При инъекции пузырьков в воду теплоотдача увеличивается на 50 %, при введении шариков полистирола в нефть наблюдалось увеличение теплоотдачи на 40 %.

Теплоотдачу с газовой стороны теплообменника можно интенсифицировать, добавляя небольшую долю твердых частиц. Частицы увлекаются потоком и могут циркулировать в системе, если она замкнута или сепарироваться для повторного использования. Это приводит к увеличению теплоотдачи в 4 раза по сравнению с чистым газом за счет увеличения толщины вязкого подслоя и повышения его теплопроводности.

Во многих промышленных конструкциях используется псевдосжиженный слой. Коэффициент теплоотдачи от труб, помещенных в такой слой, возрастает в 20 раз. Теплообменники такой конструкции могут использоваться для отбора тепла от уходящих газов.

Добавление капель жидкости в газовый поток приводит к увеличению теплоотдачи. Интенсификация объясняется разрушением пограничного слоя, а так же, за счет подогрева двухфазной смеси и испарения жидкости. Если на обогреваемой поверхности образуется сплошная пленка жидкости, то коэффициент теплоотдачи можно увеличить в 30 раз.

При размещении в центральной части теплообменника разбрызгивателя жидкости наблюдается увеличение теплоотдачи на 40%.

Механические воздействия

Влияют на теплоотдачу из-за удаления поверхностных слоев жидкости. С помощью скребков можно интенсифицировать теплоотдачу при вынужденной конвекции, так, при ламинарном обтекании плоской поверхности наблюдалось десятикратное увеличение теплоотдачи.

Для интенсификации теплообмена используют вращение поверхности. Увеличение коэффициентов теплоотдачи при ламинарном режиме происходило как в прямой трубе, вращающейся относительно собственной оси (или параллельной ей), так и во вращающейся круглой изогнутой трубе.

Кроме того, следует использовать естественные процессы, в которых интенсификация теплоотдачи является следствием основного процесса. Например: ок-

лаждение вращающихся обмоток электрических машин; охлаждение лопаток газовых турбин.

Вибрация поверхности

Вибрация поверхности усиливает теплоотдачу при любом режиме течения жидкости.

В теплообменных аппаратах типа «труба в трубе» при поперечных вибрациях внутренней трубы увеличение теплоотдачи достигает 200%.

Сложность конструкции оборудования создающего вибрацию и большие затраты энергии ограничивают применение этого метода.

Вибрация жидкости

Вибрация теплоносителя широко применяется для воздуха. Для жидкости применяются ультразвуковые преобразователи, пульсаторы, прерыватели потока.

Сам эффект состоит в установлении развитого турбулентного течения при переходных числах Рейнольдса, при этом для газа требуются колебания более 120 дБА.

При акустических колебаниях на газовой стороне компактного теплообменника коэффициент теплоотдачи увеличивался на 30 %.

В потоке жидкости с невысокой скоростью относительно просто вызвать вибрацию, причем коэффициенты теплоотдачи увеличиваются в несколько раз. Механизмом интенсификации является турбулизация потока и кавитация.

Электрические поля

Хорошие результаты были получены при использовании электрического поля в ламинарном течении трансформаторного масла. Теплообмен увеличивается в 2 раза при напряжении в 1000 В.

В круглой трубе с концентрическим внутренним электродом улучшение теплоотдачи исчезает по мере перехода к турбулентному режиму течения даже при больших напряжениях электрического поля.

При коронном разряде теплоотдача увеличивается на 60%.

Вдув и отсос

Теплоотдачу к однофазному теплоносителю можно интенсифицировать путем вдува газа в жидкость. Вдув газа осуществляется через пористую обогреваемую поверхность. При этом получают пятикратное увеличение локальных коэффициентов теплоотдачи. Влияние исчезает на расстоянии более 10 калибров.

Увеличение коэффициента теплоотдачи для любого режима наблюдается и при отсосе через поверхность, однако отсос трудновыполним в промышленном оборудовании.

Комбинированные методы

Наиболее обнадеживающими, с точки зрения практических приложений, является применение комбинированных методов, т.к. увеличение коэффициента теплоотдачи значительно выше, чем при использовании каждого из способов интенсификации в отдельности. Такими примерами могут быть: труба с шероховатыми стенками и ленточным завихрителем, шероховатый цилиндр под воздействием акустических колебаний, труба с внутренним оребрением и ленточным завихрителем, оребренные трубы в псевдосжиженном слое, взвесь твердых частиц в газе в электрическом поле, псевдосжиженный слой с пульсацией воздуха.

КИПЕНИЕ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Обработка поверхностей

К обработанным поверхностям относят поверхности со специально создаваемыми свойствами.

Было обнаружено, что пятна тефлона или другого не смачиваемого вещества, наносимые на обогреваемую поверхность, способствуют образованию зародышей пузырьков пара. Такие покрытия способствуют увеличению интенсивности переноса тепла при кипении, когда температура нагревателя является определяющим параметром. Если в обычных условиях температура поверхности будет соответствовать области пленочного кипения, то нанесение тонкой пленки политетрафторэтилена снижает температуру поверхности до уровня соответствующему переходному или пузырьковому кипению.

Можно изготавливать поверхности с высокой плотностью углублений резервуарного типа, которые служат активными центрами парообразования даже в условиях сильного нагрева.

Шероховатые поверхности

Известна технология получения поверхностей с крупномасштабными центрами образования зародышей пара (по поверхности наносят глубокие канавки, а затем весь материал деформируют таким образом, чтобы создать углубление резервуарного типа). Кроме того, используют трубы с небольшими ребрами, которые затем прокатывают и получают кольцевые углубления резервуарного типа.

Развитые поверхности

Кипение на оребренном трубчатом участке с прямыми ребрами происходило при уменьшенной разности температур при пузырьковом кипении и при низких тепловых потоках. Первая критическая плотность потока увеличивается на поверхностях с крупномасштабным оребрением. Ребра способствуют достижению высоких тепловых потоков, если температура их корневых сечений соответствует области пленочного кипения, при этом ребра можно располагать друг от друга на расстоянии, равном отрывному диаметру пузырька (для пузырькового кипения).

При кипении фреона на поверхностях труб с ребрами небольшой высоты достигали таких же критических потоков, как и для гладких трубах. Такое явление можно объяснить взаимодействием пузырей в межреберном пространстве.

Перемешивание жидкости

На большой плоской горизонтальной пластине первую критическую плотность теплового потока увеличивали, размещая на вертикальных стенах над пластиной, структуры типа яйцевидных углублений. Эта идея возникла из анализа гидродинамической неустойчивости, по которой следует, что увеличение критической тепловой нагрузки происходит, если размер нагревателя становится меньше длины волны возмущения. При использовании этого метода критическая тепловая нагрузка возрастает примерно в 2 раза.

Изменение поверхностного натяжения

Способ интенсификации, основанный на действии капиллярных сил состоит в том, что обогреваемая поверхность фитильного материала контактирует с пористым материалом. В системах охлаждения электронного оборудования летательных аппаратов совершающих резкие маневры или комических аппаратах работающих в условиях близких к нулевой гравитации установлено, что первая критическая плотность теплового потока возрастает почти на 200%, если фитиль не слишком плотный и в его верхней части существует узкий канал для отвода пара.

Жидкие добавки

Малые концентрации добавок позволяют обеспечить увеличение коэффициента теплоотдачи до 40% (добавка 4-х процентного бутана к воде увеличивает коэффициент теплоотдачи на 80%; добавки полимеров растворяемых в воде увеличивает коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении).

Механические воздействия

При вращении обогреваемых цилиндров с большой угловой скоростью коэффициенты конвективной теплоотдачи становятся настолько большими, что быть подавлено. В паровом котле с вращающимся барабаном, когда парообразование происходит на внутренней поверхности вращающегося кольцевого слоя жидкости первая критическая плотность теплового потока возрастает. При соответствующих условиях подачи жидкости к обогреваемой поверхности выход пара превышал 99%.

Вибрация поверхности

Кипение при больших тепловых потоках интенсифицируется благодаря большой скорости движения поверхности, но изменение кривой кипения очень мало при полностью установившемся движении.

Вибрация жидкости

Пульсация жидкости увеличивает коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении почти в 2 раза (акустическое воздействие – это способ интенсификации кипения за счет уменьшения времени разрушения паровой пленки).

Электростатические поля

Сильное влияние полей на теплоотдачу при кипении обнаружено в отдельных экспериментах на установке состоящей из резервуара заполненного диэлектрической жидкостью, в которой размещена нагреваемая проволока маленького диаметра заключенная в проводящий цилиндр большого диаметра. Оказалось, что на полностью развитое пузырьковое кипение электрическое поле не действует. Критическая плотность теплового потока может возрасти до 6 раз, теплоотдача при пленочном кипении может быть увеличена в 2 раза.

Отсос

Коэффициенты теплоотдачи при пленочном кипении можно увеличить путем непрерывного удаления пара через пористую обогреваемую поверхность. Перегревы стенки для воды могут поддерживаться низкими, вплоть до высоких тепловых нагрузок.

КИПЕНИЕ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Обработка поверхности

Влияние обработанной поверхности на кипение в условиях вынужденной конвекции гораздо слабее, чем при кипении в большом объеме. Несмачиваемые пятна на поверхности не приводят к заметному изменению кривой кипения. Это объясняется начальной активацией и последующим воздействием естественных центров кипения и парообразования.

Пористые поверхности кипения не усиливают кипения при больших тепловых нагрузках, однако с их помощью можно ликвидировать гистерезис кривых кипения, т.е. сблизить первый критический поток со вторым. При этом для фтористых углеводородов отмечено существенное возрастание коэффициентов теплоотдачи при парообразовании.

Шероховатые поверхности

Шероховатость увеличивает критическую плотность теплового потока при кипении с недогревом приблизительно на 10%. При использовании больших поперечных ребер в кольцевом участке, обнаружено снижение критической тепловой нагрузки на 15-30%. Для испарительных труб разработаны различные виды

шероховатости, например трубы двойного диаметра, винтовые вставки с прорезями, спиральные ребра жесткости, механически наносимые неровности.

Развитые поверхности

Поверхности с повышенной площадью теплоотдачи широко используются в вертикальных трубчатых испарителях. Трубы с деформированными стенками с двойным или спиральным гофрированием способствуют возрастанию коэффициента теплоотдачи при испарении жидкости внутри трубы до 10 раз.

Перемешивание потока жидкости

Модификация формы канала проводилась так, чтобы нарушить структуру течения вблизи обогреваемой поверхности и тем самым увеличить критический тепловой поток. Тепловыделение в пучке стержней можно увеличить путем создания шероховатости на оболочке для большего контакта количества жидкости с обогреваемой поверхностью. При кипении с подогревом в условиях вынужденного движения использование сеточных и щеточных вставок увеличивает критический тепловой поток до 100% с увеличением температуры стенки. Для создания в двухфазном потоке закрученного течения используют трубы разных геометрических форм. Змеевиковые трубы парогенераторов эффективны в смысле увеличения критических тепловых нагрузок при кипении насыщенной жидкости. Значение коэффициентов теплоотдачи при этом не изменяется. Завихрители потока выполняются в виде спирального входа в канал или в виде щели для тангенциального пуска теплоносителя в трубу, используется для очень высоких тепловых нагрузок. Плотность теплового потока достигает $1,7 \times 10^8 \text{ Вт/м}^2$.

Закрутка потока на входе в кольцевые каналы позволяет увеличивать критические тепловые нагрузки при кипении с недогревом.

Витые ленты распространены благодаря своей простоте и возможностью использования в существующем тепловом оборудовании. Для ликвидации локальных перегревов они являются идеальным средством. Характеристики пузырькового кипения при использовании витых лент улучшаются. Критические тепловые потоки увеличиваются почти на 50%. Критические тепловые нагрузки в закрученном в 2 раза лучше, чем в незакрученном при той же мощности затрат на прокачку теплоносителя. Витые ленты увеличивают массу и скорость движения жидких сред. Свободновкладываемые ленточные завихрители используются в вертикальных трубчатых испарительных опреснителях морской воды.

Добавки в жидкость

Результаты противоречивые. Некоторые добавки интенсифицируют пузырьковое кипение, а другие снижают теплоотдачу.

Вибрация поверхности

При пузырьковом кипении при вибрации поверхности наблюдается небольшой рост коэффициента теплоотдачи. Для малых тепловых нагрузок при вибра-

ции парогенерирующих труб в поперечном направлении наблюдается незначительное уменьшение критических тепловых потоков.

Вибрация потока жидкости

Вибрация жидкости не оказывает значительного влияния на кипение в условиях вынужденного течения.

Электрические поля

При вынужденном течении изопропана деионизированной воды в кольцевом канале с обогреваемой внутренней стенкой наложение поперек зазора разности потенциалов приводит к увеличению пленочного кипения. Критический тепловой поток увеличивается более чем в 2 раза.

Комбинированные методы

Полные коэффициенты теплоотдачи могут быть удвоены путем добавления поверхностноактивных веществ в воду. При этом вода испарялась в трубах с двойным или спиральным гофрированием (вертикально восходящее течение).

КОНДЕНСАЦИЯ ПАРА В ОБЪЕМЕ

Интенсификация конденсации представляет собой интерес для паров органических веществ теплофикационные свойства, которых таковы, что при их конденсации достигаются сравнительно низкие коэффициенты теплоотдачи. При использовании жидкости с хорошими теплоотдающими свойствами, например воды, возможна ситуация когда при увеличении холодной стороны теплообменника приводит к тому, что термическое сопротивление на этой стороне составляет большую часть общего термического сопротивления.

Специально обработанные поверхности

Обработка поверхностей широко используется для создания капельной конденсации. Она выгодна т.к. при этом коэффициенты теплоотдачи водяного пара на порядок выше, чем при пленочной конденсации. Для этой цели применяют гидрофобизаторы. Их периодически вводят в поток пара направляемого в конденсатор. Гидрофобизатор затем оседает на поверхности труб образуя необходимое покрытие.

Недостаток: гидрофобизаторы вымываются из труб за относительно короткий срок. Постоянные покрытия из благородных металлов или тефлонов значительно дороже.

Средние коэффициенты теплоотдачи при пленочной конденсации на горизонтальных трубах увеличиваются на 20% за счет за счет нанесения тефлона по окружности труб.

Шероховатые поверхности

Шероховатость увеличивает конденсацию за счет появления в пленке турбулентности при малых массовых скоростях движения. Элементы шероховатости не играют роли т.к. они погружены в ламинарный подслои. При конденсации пара на внешней поверхности вертикальных труб при использовании шероховатости коэффициент теплоотдачи увеличивается.

Развитые поверхности

Для этого используют спиральное рифление горизонтальных труб конденсаторов водяного пара. При опреснении воды используются поверхности с повышенной теплоотдачей при вертикальном расположении трубок. Стенкам придается такая форма, чтобы интенсифицировать конденсацию на основе эффекта Грегори, а внутренняя поверхность деформируется для увеличения коэффициента теплоотдачи.

Механические воздействия

При конденсации на вращающихся цилиндрах, дисках, трубах квадратного сечения коэффициенты теплоотдачи для воды в несколько раз превышали коэффициенты теплоотдачи для неподвижных поверхностей.

Вибрация поверхности

При вибрации горизонтальных труб конденсаторов максимальное увеличение коэффициента теплоотдачи наблюдалось порядка 10-15%.

Электрические поля

Электрические поля использовали для увеличения конденсации фреона. Поле способствует перемешиванию пленки конденсата.

Отсос

Коэффициенты теплоотдачи могут быть увеличены в несколько раз если толщина пленки конденсата уменьшается в результате отвода жидкости.

Комбинированная интенсификация

Примеры применения комбинированных методов интенсификации в объеме пара это использование вращающихся оребренных труб, вращающегося диска с

радиальными канавками и вращающегося диска с отсосами.

КОНДЕНСАЦИЯ В ТРУБАХ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Шероховатые трубы

В трубах с шероховатыми внутренними поверхностями, в трубах с внутренней нарезкой и накаткой наблюдается существенное увеличение коэффициента теплоотдачи при конденсации паров.

Развитые поверхности

В трубах с внутренним оребрением установленных горизонтально в котлах, подогревателях наблюдалось увеличение коэффициента теплоотдачи в 4 раза по сравнению с гладкими. При конденсации паров фреона 12 в горизонтальных трубах с внутренним оребрением коэффициент теплоотдачи увеличивался примерно в 3 раза. При конденсации водяного пара в трубах со спиральными вставками и прямыми ребрами наблюдалось увеличение средних коэффициентов теплоотдачи при полной конденсации на 50-100%. При конденсации фреона 12 с небольшими добавками нефти в трубах с внутренним оребрением (площадь поверхности на 175% больше номинальной) коэффициент теплоотдачи увеличивался в 4 раза.

Устройства, обеспечивающие перемешивание потока

Существенное увеличение коэффициента теплоотдачи происходит в трубах имеющих неподвижные вставки для перемешивания жидкости, причем эти вставки выполнены в виде левой или правой спирали. В этом случае резко возрастает перепад давления.

Устройства, закручивающие поток

Конденсация в змеевиках, в гибких трубах происходит более интенсивно по сравнению с прямыми трубами. Ленточные завихрители улучшают конденсацию в трубах примерно на 30%.

Механические воздействия

При конденсации азота внутри пучка труб при высоких ускорениях направленных перпендикулярно оси вращения коэффициенты теплоотдачи увеличивались более чем в 4 раза.

Вибрация жидкости

Влияние акустических колебаний на конденсацию паров изопропильного спирта с интенсивностью 186 дБА при частоте от 50 до 330 Гц увеличивает теплоотдачу почти на 60%.

Электрические поля

При конденсации фреона 12 на внешней поверхности торцевого канала при радиального электрического поля коэффициент теплоотдачи увеличивался почти в 2 раза при напряжении 30кВ.

Комбинированные методы

При конденсации азота во вращающихся трубах с пористым покрытием изнутри, позволило увеличить коэффициент теплоотдачи по сравнению с конденсацией азота во вращающейся гладкой трубе.

Предложения и перспективы

В настоящее время во всем мире наблюдается активизация исследований по интенсификации теплообмена. Большинство упомянутых исследований было проведено в лабораторных условиях. Для каждого типа переноса тепла существует специфический метод его интенсификации. Окончательное решение об использовании того или иного метода требует учета многих факторов: увеличение мощности теплообмена, уменьшение капитальных затрат и эксплуатационных расходов и т.д.

ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ РЕБРИстую СТЕНКУ

Наличие ребер на стенке позволяет увеличить поверхность ее соприкосновения с теплоносителем и тем самым уменьшить внешнее термическое сопротивление. При этом уменьшится общее термическое сопротивление и увеличится тепловой поток, а температура поверхности такой стенки приблизится к температуре омывающей ее среды. Поэтому наличие ребер может использоваться как средство интенсификации процесса теплопередачи или как средство снижения температуры стенки [3].

Рассмотрим теплопередачу через ребристую стенку, изображенную на рис. 1.1.

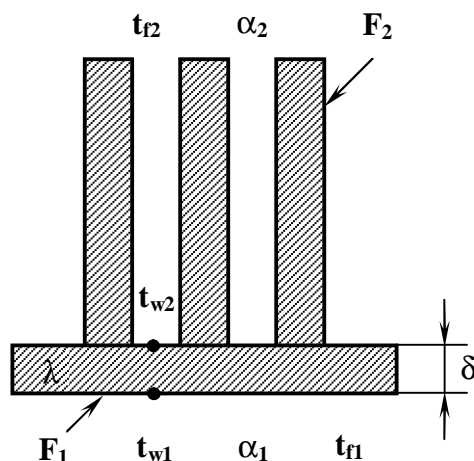


Рисунок 1.1 – Плоская стенка с односторонним оребрением.

Температура ребра изменяется по его длине. При $t_{f1} > t_{f2}$ температура ребра, равная у его основания температуре поверхности между ребрами t_{w2} , будет уменьшаться к их концу. Температуру среды t_{f2} , можно считать неизменной для всей поверхности, и поэтому участки поверхности ребра, удаленные от основания, будут передавать меньше теплоты, чем участки, расположенные вблизи основания ребра. Отношение теплоты, передаваемой поверхностью ребер в окружающую среду Q_p , к теплоте, которую эта поверхность могла бы передать при постоянной температуре стенки, равной температуре у основания ребер Q'_p , называется коэффициентом эффективности ребер:

$$\eta_p = Q_p / Q'_p \quad (1.1)$$

Все поверхности ребра могут иметь одинаковую температуру только при бесконечной теплопроводности материала, поэтому в реальных условиях $\eta_p < 1$. Чем резче меняется температура вдоль ребра, тем меньше коэффициент его эффективности. Для коротких ребер, выполненных из материала с большим коэффициентом теплопроводности, коэффициент эффективности близок к единице.

Определим тепловой поток через стенку, гладкая поверхность которой имеет площадь F_1 , а ребристая поверхность – F_2 . Площадь F_2 складывается из площади боковой поверхности ребер F_p и площади межреберных участков F_m . При стационарном режиме передача теплоты от горячей среды к стенке, через стенку и от стенки к холодной среде при одинаковом коэффициенте теплообмена для всей поверхности F_2 выразится формулами:

$$Q = \alpha_1 \cdot (t_{f1} - t_{w1}) \cdot F_1 \quad (1.2)$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot F_1 \quad (1.3)$$

$$Q = Q_p + Q_m \quad (1.4)$$

Тогда, $Q_p = \eta_p \cdot Q'_p = \eta_p \cdot \alpha_2 \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \cdot F_p$ и $Q_m = \alpha_2 \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \cdot F_m$, то уравнению (1.4) можно придать вид:

$$Q = \alpha_2 \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \cdot (F_m + \eta_p \cdot F_p). \quad (1.5)$$

Исключив из уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) температуры t_{w1} и t_{w2} , найдем:

$$Q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1} + \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot (F_m + \eta_p \cdot F_p)}} \quad (1.6)$$

Этому уравнению удобно придать вид:

$$Q = K_p \cdot (t_{f1} - t_{f2}) \cdot F_1, \quad (1.7)$$

где K_p – коэффициент теплопередачи ребристой стенки, который определяется формулой:

$$K_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{F_1}{F_m + \eta_p \cdot F_p}} \quad (1.8)$$

Для удобства анализа влияния ребер на интенсивность теплопередачи упростим формулу (1.6) в предположении, что внутренним термическим сопротивлением стенки можно пренебречь, т.е. принять $\eta_p = 1$ и $(\delta/\lambda) = 0$. В этих условиях:

$$Q = \frac{\Delta t}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot F_2}}. \quad (1.9)$$

Сравним теплопередачу через стенку, условия теплообмена которой с теплоносителями заданы коэффициентами $\alpha_1 = 100$ Вт/(м²·°С) и $\alpha_2 = 10$ Вт/(м²·°С), с ребрами и без ребер.

Для стенки без ребер $F_1 = F_2 = 1$ м² в соответствии с формулой (1.9) $Q' = 9 \cdot \Delta t$. Пусть теперь со стороны, где $\alpha_1 = 100$ Вт/(м²·°С), площадь поверхности из-за ребер увеличена в 10 раз, т.е. $F_1 = 10$ м², а вторая поверхность стенки осталась без изменения ($F_2 = 1$ м²). Тогда по формуле (1.9) получается $Q = 9,9 \cdot \Delta t$, или $(Q/Q') = 1,1$.

Если сохранить площадь первой поверхности, а вторую поверхность увеличить в 10 раз за счет ребер (т. е. $F_1 = 1$ м², а $F_2 = 10$ м²), то по формуле (1.9) найдем, что $Q = 50 \cdot \Delta t$, т. е. $(Q/Q') = 5,5$.

Неодинаковый эффект от постановки ребер на первой и второй поверхностях получился из-за различных величин коэффициентов теплообмена. Если коэффициенты теплообмена с двух сторон стенки неодинаковы, то для интенсификации теплообмена надо стенку сделать ребристой с той стороны, где коэффициент теплообмена имеет наименьшее значение.

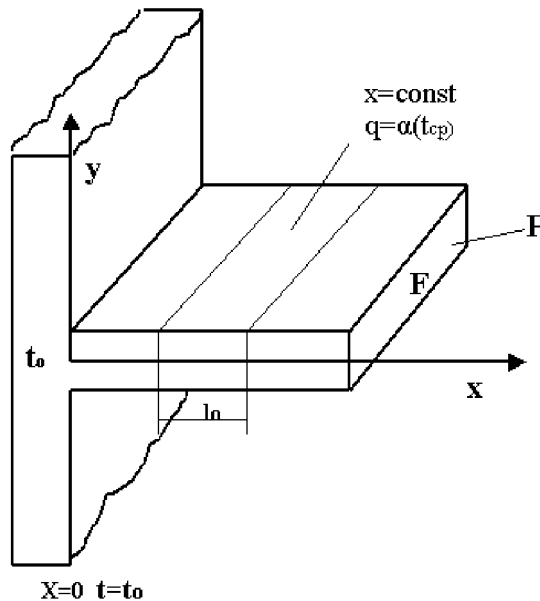
Анализ уравнения распространения теплоты в прямом ребре постоянной толщины показывает, что ребра уменьшают общее термическое сопротивление при условии:

$$\frac{2 \cdot \lambda}{\alpha \cdot \delta} > 5, \quad (1.10)$$

где δ и λ – толщина ребра и коэффициент его теплопроводности;
 α – коэффициент теплообмена ребра с окружающей средой.

ПЕРЕНОС ТЕПЛА В РЕБРАХ

При конвективном теплообмене количество тепла, отдаваемое в среду, пропорционально поверхности. Интенсивность теплообмена с этой поверхностью можно повысить, увеличив ее поверхность (площадь). Это достигается при помощи ребер. Рассмотрим ребро постоянного поперечного сечения.



Предположим, что в основании тепла известна температура. Все ребро помещено в среду. Между этой средой и поверхностью ребра происходит конвективный теплообмен. В направлении x существует поток тепла, так как существует перепад температур. Тепло подводится через боковую поверхность, это значит, что существует градиент температур относительно y . Таким образом, поле температур в ребре зависит от двух переменных x и y . И в точной постановке необходимо рассматривать двумерное уравнение теплопроводности.

Для упрощения сформулированной задачи, введем следующие допущения:

1). так как толщина ребра значительно меньше его длины, то изменением температуры по направлению y мы будем пренебрегать $\frac{\partial t}{\partial y} = 0$;

2). количество тепла, которое подводится к элементу ребра с длиной L_0 , будет распределяться в его объеме равномерно.

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\tau} = \alpha(t_{cp} - t)PL_0 \quad \text{или} \quad q_v = \frac{\bar{Q}}{V} = \frac{\alpha(t_{cp} - t)PL_0}{FL_0} = \frac{\alpha(t_{cp} - t)P}{F}$$

С учетом принятых допущений, уравнение сохранения энергии (уравнение Фурье) будет одномерным с внутренним источником тепла.

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{\alpha P}{\lambda F}(t_{cp} - t) = 0$$

С граничными условиями на левой границе при $x = 0$: $t = t_0$, а на правой границе рассмотрим три варианта граничных условий:

1. случай $x \Rightarrow \infty$: $t \Rightarrow t_{cp}$;

2. случай $x \Rightarrow L$: $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$; 3) случай $x \Rightarrow L$: $-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t_{cp} - t)$

Для простоты дальнейшего изложения введем новую переменную $\vartheta = t_{cp} - t$, тогда уравнение Фурье преобразуется к виду

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda F}\vartheta = 0, \text{ а граничные условия : слева } x=0 : t=t_o, \text{ а}$$

справа

$$1. \text{ случай } x \Rightarrow \infty : \vartheta \Rightarrow 0; 2. \text{ случай } x \Rightarrow L : \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0; 3. \text{ случай } x \Rightarrow L : -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \alpha \vartheta$$

Решение линейного дифференциального уравнения можно найти с помощью характеристического: $k^2 - m^2 k^0 = 0, (*)$ где $m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda F}$

Если корни характеристического уравнения $(*)$ $k_{1,2} = \pm m$ являются различными и действительными, то в этом случае общее решением исходного дифференциального уравнения будет выражение:

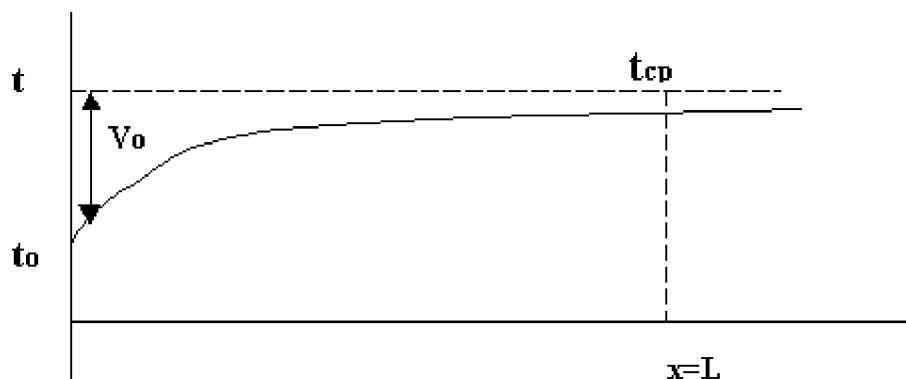
$$\vartheta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий.

Для $x = x_o : \vartheta = \vartheta_o$, откуда получаем $\vartheta_o = c_1 + c_2$.

Второе уравнение для определения констант интегрирования получим из второго граничного условия.

1. Первый случай: $x \Rightarrow \infty : \vartheta \Rightarrow 0$ соответствует очень длинному ребру



$$x = x_o : \vartheta = \vartheta_o = t_{cp} - t_o \quad x \Rightarrow \infty : \vartheta \Rightarrow 0$$

как показано на выше приведенном рисунке

Для этого случая будем иметь

$x \Rightarrow \infty : \vartheta \Rightarrow 0$ или $0 = c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty}$ Откуда $c_1 = 0$ $c_2 = \vartheta_o$. Поэтому решение сформулированной задачи будет $\vartheta = \vartheta_o e^{-mx}$ или

$$\vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta_o} = \exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda F}} x\right], \text{ а переходя к исходным переменным, будем иметь}$$

$$\frac{t_{cp} - t}{t_{cp} - t_o} = \exp(-mx) \quad \text{или} \quad t = t_{cp} - (t_{cp} - t_o) \exp(-mx)$$

Количество тепла и тепловой поток в основании ребра при $x=0$ определим как:

$$\theta = -\lambda F \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda m F (t_{cp} - t_o) \exp(-mx) \quad \theta = -\lambda m F (t_{cp} - t_o)$$

2. Второй случай $x = L$: $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$, соответствует ребру конечных раз-

меров и с изоляцией на конце.

В этом варианте общее решение будет то же

$$\vartheta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad \text{с граничными условиями}$$

$$\text{при } x = 0: \vartheta = \vartheta_0$$

$$\text{и при } x = L: \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0.$$

Из первого получим $\vartheta_0 = c_1 + c_2$ откуда $c_2 = \vartheta_0 - c_1$

Из второго граничного условия $0 = c_1 m e^{mL} - c_2 m e^{-mL}$ или $0 = c_1 e^{mL} - c_2 e^{-mL}$

$$0 = c_1 e^{mL} - (\vartheta_0 - c_1) e^{-mL} \quad c_1 e^{mL} - \vartheta_0 e^{-mL} + c_1 e^{-mL} = 0$$

И так, константы интегрирования будут: $c_1 = \frac{\vartheta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$ $c_2 = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$

Подставляем их в общее решение $\vartheta = \frac{\vartheta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{-mx}$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \left(1 - \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{-mx} \right)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \left(\frac{e^{mL} + e^{-mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{-mx} \right)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} e^{mx} + \left(\frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{-mx} \right)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-mL} e^{mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} + \frac{e^{mL} e^{-mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) \quad \vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-mL} e^{mx} + e^{mL} e^{-mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right)$$

После несложных преобразований получим

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right), \text{ учитывая, что } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \text{ будем иметь}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{ch[m(L-x)]}{ch(ml)} \quad \vartheta = \vartheta_0 \frac{ch(mL(1-x/L))}{ch(mL)}$$

3. Случай третий (ребро, на конце которого есть конвективный теплообмен)

В этом варианте общее решение будет точно такое же

$$\vartheta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad \text{при } x = 0: \vartheta = \vartheta_0 \quad x = L: -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = \alpha \vartheta$$

Из первого граничного условия получим $\vartheta_0 = c_1 + c_2$

Во втором граничном условии требуется брать производную

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d}{dx} (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) = m c_1 e^{mx} - m c_2 e^{-mx}$$

$$-\lambda m (c_1 e^{mL} - c_2 e^{-mL}) = \alpha (c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL}) \quad -\lambda m c_1 e^{mL} + \lambda m c_2 e^{-mL} = \alpha c_1 e^{mL} + \alpha c_2 e^{-mL}$$

$$-\alpha c_2 e^{-mL} + \lambda m c_2 e^{-mL} = \alpha c_1 e^{mL} + \lambda m c_1 e^{mL} \quad (\lambda m - \alpha) c_2 e^{-mL} = (\lambda m + \alpha) c_1 e^{mL}$$

Учтем, что $m + \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{m\lambda + \alpha}{\lambda}$ $m - \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{m\lambda - \alpha}{\lambda}$ получим выражение

$$(m - \alpha / \lambda) c_2 e^{-mL} = (m + \alpha / \lambda) c_1 e^{mL}$$

в которое подставим C_2 выраженное через C_1 $c_2 = \vartheta_0 - c_1$, получим

$$\begin{aligned} (m - \alpha / \lambda) (\vartheta_0 - c_1) e^{-mL} &= (m + \alpha / \lambda) c_1 e^{mL} \\ (m - \alpha / \lambda) \vartheta_0 e^{-mL} - (m - \alpha / \lambda) c_1 e^{-mL} &= (m + \alpha / \lambda) c_1 e^{mL} \\ (m - \alpha / \lambda) \vartheta_0 e^{-mL} &= c_1 \left((m + \alpha / \lambda) e^{mL} + (m - \alpha / \lambda) e^{-mL} \right) \\ c_1 &= \frac{(m - \alpha / \lambda) \vartheta_0 e^{-mL}}{(m - \alpha / \lambda) e^{-mL} + (m + \alpha / \lambda) e^{mL}} \quad c_1 = \frac{\vartheta_0}{\frac{(m + \alpha / \lambda) e^{mL}}{(m - \alpha / \lambda) e^{-mL}} + 1} \end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель на $m + \frac{\alpha}{\lambda} e^{-mL}$ и обозначим $B = \frac{m\lambda}{\alpha}$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\vartheta_0}{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1} \quad c_2 = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0}{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1} \\ c_2 &= \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1} \right) \\ c_2 &= \vartheta_0 \left(\frac{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1 - 1}{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1} \right) \quad c_2 = \vartheta_0 \frac{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL}}{\frac{(B+1)}{(B-1)} e^{2mL} + 1} \\ c_1 &= \vartheta_0 \frac{1}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \\ C_2 &= \vartheta_0 - \vartheta_0 \frac{1}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} = \vartheta_0 \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \right) = \\ &= \vartheta_0 \frac{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL}}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \\ \vartheta &= \vartheta_0 \left(\frac{e^{mx}}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} + \frac{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} e^{-mx}}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \right) \\ q &= -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_{x=0} \\ x=0: q &= \frac{-\lambda \vartheta_0}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \left[\frac{me^{mx}}{1} - me^{-mx} \left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} \right] = \\ q &= -\frac{\lambda \vartheta_0}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \left[m - m \left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} \right] = \\ q &= -\frac{\lambda \vartheta_0 m}{\left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} + 1} \left[1 - \left(\frac{(B-1)}{(B+1)} \right) e^{2mL} \right] \end{aligned}$$

2. ПРОДОЛЬНОЕ РЕБРО ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Предположим, что ребро отдает тепло в окружающую среду [2], [4].

Пусть профиль ребра ограничен (см. рис. 2.1) двумя симметричными кривыми $y = f_2(x)$ и $y = -f_2(x)$, где x - продольная координата, b - высота ребра, L - его длина, δ_0 - толщина у основания.

Площадь поперечного сечения ребра $f_1(x)$ - схематично показана на рис.2.2б. Определим ее величину на единицу длины ребра следующим образом:

$$f_1(x) = 2L f_2(x) / L = 2 f_2(x) \quad (2.1)$$

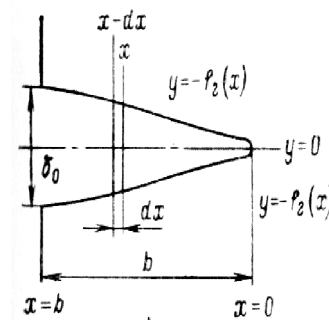


Рисунок 2.1 - Ребро произвольного профиля

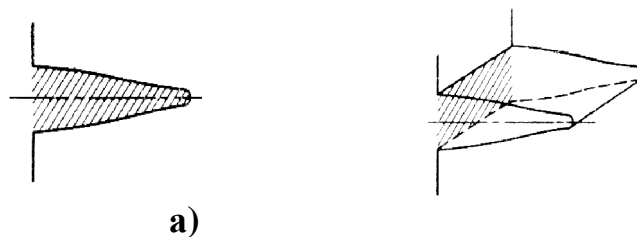


Рисунок 2.2 - Площади профильного а) и поперечного сечения б)

В связи с тем, что толщина ребра мала по сравнению с его высотой, можно допустить отсутствие (потоков) градиентов температуры поперек ребра (по толщине). Кроме того, принимаем, что поступающее с боковой поверхности тепло распределяется внутри ребра равномерно.

В этом случае уравнение Фурье будет иметь вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda f_1(x) \frac{dt}{dx} \right) - 2\alpha (t - t_{cp}) = 0 \quad (2.2)$$

Во всех вариантах заданий рассматриваются граничные условия: при $x=0$ граничные условия 2-го рода $x=0: dt/dx=0$, а на поверхности $x=b$ - граничные условия 1-го рода $x=b: t=t_0$. Эффективный коэффициент $\alpha = \alpha_k + \alpha_l$ может включать как конвективную, так и лучистую составляющую.

Обобщенная функция профиля для продольных ребер записывается в виде:

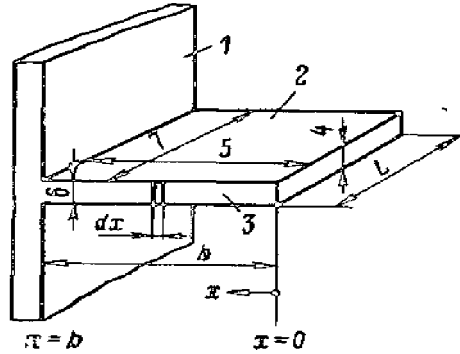
$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{(1-2n)/(1-n)}, \quad (2.3)$$

где δ_0 - толщина ребра в основании.

Таким образом, изменяя величину n в показателе степени этой функции можно получить профиль большого количества ребер.

Для ребра прямоугольного профиля (см. рис. 2.3) показатель степени в выражении (2.3) $n = 0.5$, поэтому функция профиля в этом случае примет вид:

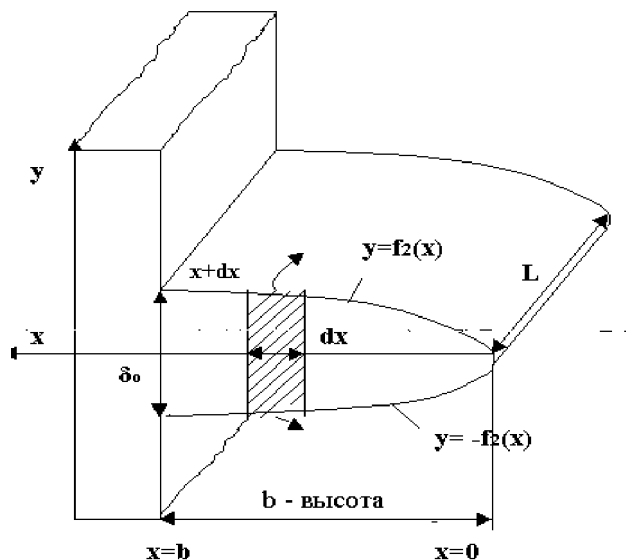
$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \quad (2.4)$$



ВВОДИМЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

1. Тепловой поток и распределение температуры в ребре постоянны во времени.
2. Коэффициент теплопроводности материала ребра однороден, одинаков во всех направлениях (изотропен) и постоянен.
3. Коэффициент теплоотдачи постоянен и однороден по всей поверхности ребра.
4. Температура окружающей среды однородна.
5. Толщина ребра мала по сравнению с ее высотой, в связи с чем температурными градиентами поперек ребра (по толщине) можно пренебречь.
6. Температура у основания ребра однородна.
7. Источники и стоки тепла внутри ребра отсутствуют.
8. Контактное термическое сопротивление между ребрами и основной поверхностью отсутствуют.

Рассмотрим продольное ребро произвольного профиля.



Предположим, что ребро отдает тепло в окружающую среду. Пусть площадь поперечного сечения ребра:

$$A(x) = f_1(x)$$

Профиль ребра ограничен функцией f_2 .

$$f_1(x) = 2f_2(x)L$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1(x) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v = 0$$

Тепло отдается верхней и нижней поверхностью.

$$q_v = 2\alpha(t - t_{cp}) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{2\alpha}{\lambda}(t - t_{cp})$$

$$f_1 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{2\alpha}{\lambda}(t - t_{cp})$$

Введем новую переменную:

$$\vartheta = t - t_{cp} \quad t = \vartheta + t_{cp}$$

$$f_1 \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{df_1}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

Так как $f_1 = 2f_2$, то $f_2 \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{df_2}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$

Введем обобщенную функцию профиля f_2 .

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{\frac{1-2n}{1-n}}$$

Пусть $n = \frac{1}{2}$, тогда $f_2(x) = \frac{\delta_0}{2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ -ребро прямоугольное.

Пусть $n = 0$, тогда $f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\delta_0}{2b}$ -треугольное.

Пусть $n = \infty$, разделим степень на n :

$$\frac{\frac{1}{n} - 2}{\frac{1}{n} - 1}; f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \frac{\delta_0}{2} \frac{x}{b} \text{ -вогнутый параболоидный профиль.}$$

Пусть $n = \frac{1}{3}$, тогда $f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\delta_0}{2 \cdot 2\sqrt{x/b}}$ -выпуклый параболоид.

Гамма функция и функция Бесселя

Гамма функция

$$n! = (n-1) * \dots * 4 * 3 * 2 * 1 \quad \Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

По определению это есть Гамма функция, где n -любое число, в том числе и нецелое. $n > 0$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} u = x^n \\ dv = e^{-x} dx \\ du = nx^{n-1} dx \\ v = -e^{-xk} \end{array} \right| = -x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x} nx^{n-1} dx = \left((-\infty^n e^{\infty}) - 0^n e^{-0} \right) + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} - (-e^{-0}) = 1$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 * 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3! \quad \Gamma(5) = 4! \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Функции Бесселя

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

Это уравнение с переменными коэффициентами, называется уравнением Бесселя для функции n-го порядка. Если это уравнение II-го порядка, оно должно иметь два независимых решения.

Общее решение для нецелых параметров n будет иметь вид:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \quad , \text{ если } n\text{-нецелое.}$$

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad , \text{ если } n\text{-целое,}$$

где c_1 и c_2 -произвольные постоянные,

$J_n(x)$ -функция Бесселя I-го рода n-го порядка от аргумента x,

$Y_n(x)$ -функция Бесселя II-го рода n-го порядка от аргумента x.

Найдем решение уравнения (1).

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$

$$\frac{dy}{dx} = px^{p-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + x^p (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= (p-1)px^{p-2} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + \\ &+ px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + x^p (2a_2 + 6a_3 x + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 [(p-1)px^{p-2} (a_1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + 2px^{p-1} (a_1 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + x^p (2a_2 + 6a_3 x + \dots)] + \\ + x [px^{p-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + x^p (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots)] \end{aligned}$$

$$+ (x^2 - n^2) [x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)] = 0$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях x :

	x^p	x^{p+1}	x^{p+2}	x^{p+3}	x^{p+4}
x^2	$(p-1)pa_0$	$p(p-1)a_1 + 2pa_1$	$p(p-1)a_2 + 4pa_2 + 2a_2$	$p(p-1)a_3 + 6pa_3 + 6a_3$	$p(p-1)a_4 + 8pa_4 + 12a_4$
$x \frac{dy}{dx}$	pa_0	$pa_1 + a_1$	$pa_2 + 2a_2$	$pa_3 + 3a_3$	$pa_4 + 4a_4$
$x^2 y$	-	-	a_0	a_1	a_2
$-n^2 y$	$-n^2 a_0$	$-n^2 a_1$	$-n^2 a_2$	$-n^2 a_3$	$-n^2 a_4$

$$\begin{aligned} & (p(p-1) + p - n^2)a_0 x^p + (p(p-1) + 2p + p + 1 - n^2)a_1 x^{p+1} + \\ & + ((p(p-1) + 4p + 2 + p + 2 - n^2)a_2 + a_0)x^{p+2} + ((p(p-1) + 6p + 6 + p + 3 - n^2)a_3 + a_1)x^{p+3} + \\ & + ((p(p-1) + 8p + 12 + p + 4 - n^2)a_4 + a_2)x^{p+4} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение справедливо, когда коэффициенты при всех степенях x равны нулю.

$$\text{При } x^p : (p(p-1) + p - n^2)a_0 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Пусть } a_0 \neq 0 : p^2 - p + p - n^2 = 0, \text{ тогда } p = \pm n$$

Рассмотрим первый случай, когда $p = \pm n$, тогда можно определить коэффициент, стоящий перед

$$\begin{aligned} x^{p+1} : (p(p-1) + 3p + 1 - n^2)a_1 &= 0 \\ (n^2 - n + 3n - n^2 + 1)a_1 &= 0, \\ (1 + 2n)a_1 &= 0 \end{aligned}$$

так как $1 + 2n \neq 0$, то

$$a_1 = 0$$

$$\begin{aligned} x^{p+2} : (p(p-1) + 5p + 4 - n^2)a_2 + a_0 &= 0 \\ (n^2 - n + 5n + 4 - n^2)a_2 + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$4(n+1)a_2 + a_0 = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(n+1)}$$

$$\begin{aligned} x^{p+3} : (p(p-1) + 7p + 9 - n^2)a_3 + a_1 &= 0 \\ (n^2 - n + 7p + 9 - n^2)a_3 + a_1 &= 0 \\ (6n + 9)a_3 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_3 = 0$$

$$\begin{aligned} x^{p+4} : (p^2 - p + 9p + 16 - n^2)a_4 + a_2 &= 0 \\ (n^2 - n + 9n + 16 - n^2)a_4 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$8(n+2)a_4 + a_2 = 0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2n+4)}$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+4)} \quad \text{для} \quad k = 2, 4, 6, 8, \dots$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)} = -\frac{a_0}{4n+4} = -\frac{a_0}{4(n+1)} = -\frac{a_0}{2^2 1!(n+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = -\frac{a_0}{8(n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 1! 2^3 (n+1)(n+2)} = -\frac{a_0}{2^4 2!(n+1)(n+2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_4}{12(n+3)} = -\frac{a_0}{2^6 3!(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k/2} a_0}{2^k \left(\frac{k}{2}\right)! \left(n + \frac{k}{2}\right) \dots (n+3)(n+2)(n+1)}$$

Введем $k = 2m$, тогда

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+m)\dots(n+2)(n+1)}$$

Умножим числитель и знаменатель на 2^m

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 2^m}{2^{2m} m!(n+m)\dots(n+2)(n+1)2^m} \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m 2^n a_0}{2^{2m+n} m!(n+m)(n+m-1)(n+2)(n+1)}$$

Умножим и разделим дробь на $n!$ $a_{2m} = \frac{(-1)^m 2^n a_0 n!}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$

Из-за того, что n – необязательно целое, будем использовать Гамма функцию.

$\Gamma(n+1) = n!$, тогда $a_{2m} = \frac{(-1)^m 2^n a_0 n!}{2^{2m+n} m! \Gamma(n+m+1)}$

Возьмем $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ $a_{2m} = \frac{(-1)^m 2^n a_0 \Gamma(n+1)}{2^{2m+n} m! \Gamma(n+m+1)}$

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

$$y = x^n \left(\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^{2+n} 1! \Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^{n+4} 2! \Gamma(n+3)} \right) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} = J_n(x)$$

Это и есть функция Бесселя I-го рода n -го порядка.

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ - это дифференциальное уравнение I-го порядка с двумя независимыми решениями.

Будем искать, полагая, что $p = -n$. Для этого проверим, является ли $J_{-n}(x)$ решением уравнения Бесселя.

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! (m-n+1)}$$

Если n не является целым числом, то функция $J_{-n}(x)$ является решением дифференциального уравнения. Тогда общим решением дифференциального уравнения будет

$$y = C_1 J_n(x) - C_2 J_{-n}(x)$$

Когда n – целое число, то $J_{-n}(x)$ не может быть решением дифференциального уравнения, так как Гамма функция не определена. В этом случае мы введем следующее выражение

$$y = f(x)J_n(x) \text{ и определим эту функцию } f(x)$$

Для этого найдем y' по x

$$y' = f'(x)J_n(x) + f(x)J'_n(x)$$

$$y'' = f''(x)J_n(x) + f'(x)J'_n(x) + f'(x)J'_n(x) + f(x)J''_n(x)$$

$$y'' = f''(x)J_n(x) + 2f'(x)J'_n(x) + f(x)J''_n(x)$$

Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение (1)

$$x^2[f''(x)J_n(x) + 2f'(x)J'_n(x) + f(x)J''_n(x)] + x[f'(x)J_n(x) + f(x)J'_n(x)] + (x^2 - n^2)f(x)J_n(x) = 0$$

$$x^2 J_n(x)f''(x) + f'(x)(2J'_n(x)x^2 + xJ_n(x)) + f(x)[x^2 J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)]$$

$$f(x)[x^2 J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 + n^2)J_n(x)] = 0$$

$$x^2 J_n(x) + f'(x)[2J'_n(x)x^2 + xJ_n(x)] = 0$$

$$x^2 J_n(x) \frac{df'(x)}{dx} + [2x^2 J'_n(x) + xJ_n(x)]f'(x) = 0$$

Разделим выражение на $\frac{dx}{x^2 J_n(x)f'(x)}$, получим:

$$\frac{df'(x)}{f'(x)} + \left[\frac{2J'_n(x)}{J_n x} + \frac{1}{x} \right] dx = 0$$

После интегрирования, получим:

$$\ln f'(x) + 2 \ln J_n(x) + \ln x = \ln A$$

Откуда находим, что $f'(x) = \frac{A}{xJ_n^2(x)}$

$$f(x) = \int \frac{A}{xJ_n^2(x)} dx + B$$

$$y = f(x)J_n(x)$$

$$y = AJ_n(x) \int \frac{dx}{xJ_n^2(x)} + BJ_n(x) - \text{II-е независимое решение.}$$

Функция Бесселя второго рода n -го порядка и обозначается $Y_n(x)$, тогда наше решение будет иметь вид:

$$\text{для нечетных: } y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$$

$$\text{для четных: } y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

В зависимости от выбора A и B , можно получить разные виды записи функции Бесселя II-го рода n -го порядка.

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} - \text{формула Вебера, ее используют для различных}$$

значений n .

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0$ (1) – модифицированное уравнение Бесселя.

Вынесем знак “+”: $+(-x^2 - n^2)$

Введем i^2 , где $i = \sqrt{-1}$, тогда:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (i^2 x^2 - n^2)y = 0$$

Для нецелых n : $y = C_1 J_n(ix) + C_2 J_{-n}(ix)$

Для целых n : $y = C_1 J_n(ix) + C_2 Y_n(ix)$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)}$$

$$J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ix)^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i^2)^m (ix)^{2m+n} (x)^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{4m} i^n x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)}$$

$$I_n(x) = \frac{J_n(ix)}{i^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} \quad (2) \text{ – модифицированная функция Бесселя}$$

I-го рода 1-го порядка.

Таким образом, для не целых n решение уравнения (1), можно записать в следующем виде:

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x)$$

Для целых n - функция $J_{-n}(x)$ не определена, это следует из выражения (2), поскольку знаменатель первых n -членов разложения обращается в бесконечность. В этом случае эти члены опускают и разложение или суммирование для функции Бесселя начинают не с нуля, а с $m=n$, т.е.

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! \Gamma(m-n+1)}$$

Если ввести параметр $L = m - n$, то $m = L + n$ и тогда:

$$J_{-n}(x) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(-1)^{L+n} x^{2(L+n)-n}}{2^{2(L+n)-n} (L+n)! (L+n-n+1)} = (-1)^n \frac{(-1)^L x^{2L+n}}{2^{2L+n} L! \Gamma(L+n+1)}, \text{ где}$$

$$2^{2L+n} L! \Gamma(L+n+1) = J_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Кроме того $J_{-n}(ix) = (-1)^n J_n(x)$

Умножим левую и правую часть на i^{-n}

$$i^{-n} J_{-n}(ix) = (-1)^n J_n(ix) i^{-n}$$

$$i^{-2n} i^n J_{-n}(ix) = (-1)^n i^{-n} J_n(ix)$$

$$i^{-2n} I_{-n}(x) = (-1)^n I_n(x)$$

Т.е. $I_{-n}(x) = I_n(x)$

Определим второе линейное независимое решение модифицированного уравнения.

Предполагаем, что оно будет пропорционально функции

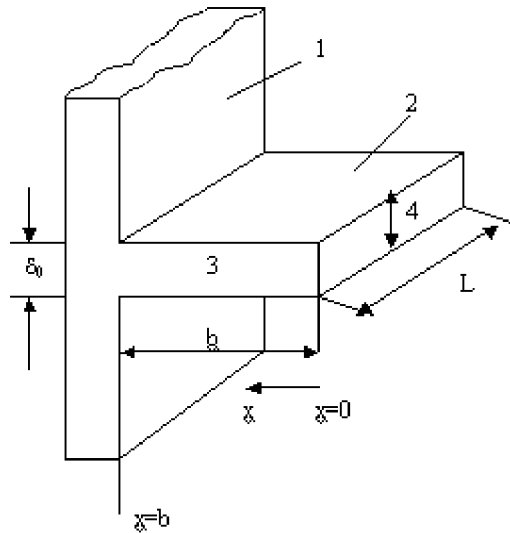
$$y(x) = f(x)I_n(x)$$

Получим, что

$$y(x) = AI_n(x) \int \frac{dx}{x(I_n(x))^2} + BI_n(x) = K_n(x) - \text{модифицированная функция Бесселя}$$

второго рода первого порядка $K_n(x)$. Может иметь различный вид.

ПРОДОЛЬНОЕ РЕБРО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ



1- основная поверхность 2. боковая поверхность 3 концевая поверхность 4 торец ребра
 b -высота ребра δ_0 – толщина ребра у основания L – длина ребра

$$2f_2(x) \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{2df_2(x)}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0, \text{ где } f_2 - \text{обобщенная функция профиля ребра.}$$

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{\frac{1-2n}{1-n}} \quad \text{При } x=0: \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0 \quad x=b: \vartheta = \vartheta_0$$

$$\text{При } n = \frac{1}{2}: f_2 = \frac{\delta_0}{2} \quad \frac{df_2}{dx} = 0 \quad 2 \frac{\delta_0}{2} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta_0} \vartheta = 0 \quad m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}$$

$$\vartheta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \quad \vartheta = \vartheta_0 \frac{ch(mx)}{ch(mb)}$$

$$q_0 = -\lambda A \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \lambda\delta_0 m\vartheta_0 \frac{sh(mx)}{ch(mx)} \Big|_{x=b} = \lambda\delta_0 m\vartheta_0 th(mb), \text{ где } A - \text{площадь площадки.}$$

Введем понятие - эффективность ребра.

Эффективность ребра определяется отношением теплового потока, передаваемого ребром к тепловому потоку, которое передало бы идеально-проводящее ребро, когда $\lambda \Rightarrow \infty$ с однородной температурой равной температуре основания.

$$q_{идеал} = \alpha P b \vartheta_0 - \text{идеальный поток}$$

P - периметр ребра.

ϑ_0 – перепад температур между средой и основанием.

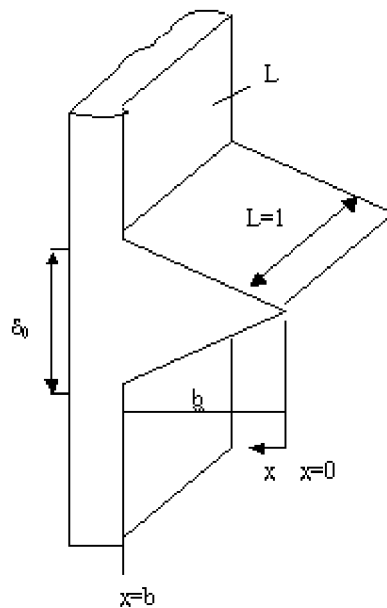
Для прямоугольного профиля

$$q_{уд} = 2b\alpha\vartheta_0$$

$$q = \alpha P \int_0^b \vartheta(x) dx$$

$$\eta = \frac{\lambda \delta_0 m \vartheta_0 th(mb)}{2\alpha b \vartheta_0} = \frac{m th(mb)}{m^2 b} = \frac{th(mb)}{mb} \text{ - эффективность ребра.}$$

ПРОДОЛЬНОЕ РЕБРО ТРЕУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ



$$2f_2(x) \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

$$\begin{cases} x=0: \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ x=b: \vartheta = \vartheta_0 \end{cases}$$

$$n=0: f_2 = \frac{\delta_0}{2b}$$

$$2 \frac{\delta_0}{2b} x \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{2\delta_0}{2b} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

Умножим выражение на $\frac{b}{\delta_0}$

$$x \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{b}{\delta_0} \frac{2\alpha}{\delta_0 \lambda} \vartheta = 0$$

$$x \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - m^2 b \vartheta = 0$$

Общее решение можно представить в виде:

$$\vartheta = C_1 I_0(2m\sqrt{bx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{bx})$$

При $x=0$: $K_0 \rightarrow \infty$ Поэтому у нас $C_2 = 0$, тогда $\vartheta = C_1 I_0(2m\sqrt{bx})$, при $x=b$

$$\vartheta_0 = C_1 I_0(2mb) \quad C_1 = \frac{\vartheta_0}{I_0(2mb)}$$

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0 I_0(2m\sqrt{bx})}{I_0(2mb)}$$

$$q_0 = -\lambda \delta_0 \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=b} \quad q_0 = \frac{-\lambda \delta_0 \vartheta_0 I_0(2m\sqrt{bx})}{I_0(2mb)}$$

Эффективность определяется аналогично – это отношение действующего теплового потока к тепловому потоку, который передается идеальным ребрам $q_{ид}$.

ПРОДОЛЬНОЕ РЕБРО ВОГНУТОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Для такого ребра показатель обобщенной функции:

$$2f_2(x) \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + 2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

$$n = \infty : f_2 = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x^2}{b} \right)$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{2\delta_0 x}{2b^2} = \frac{\delta_0 x}{b^2}$$

$$2 \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2 \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + 2 \frac{\delta_0}{b^2} x \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{2\alpha}{\lambda} \vartheta = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + 2x \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{2\alpha b^2}{\lambda \delta_0} \vartheta = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + 2x \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 b^2 \vartheta = 0 \text{ - уравнение Эйлера}$$

Сделаем замену $x = e^v$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

$$\ln x = v$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v^2} \right)$$

$$x^2 \left[\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right] + 2x \frac{1}{x} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - m^2 b^2 \vartheta = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - m^2 b^2 \vartheta = 0$$

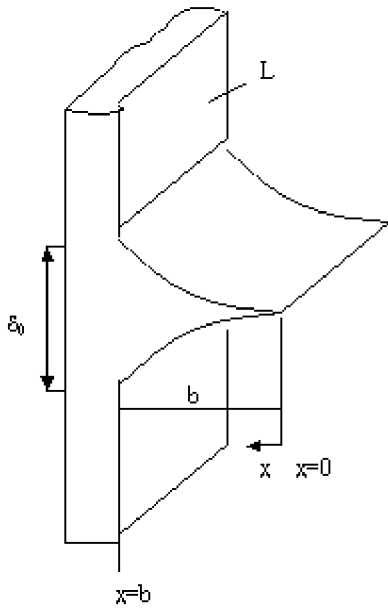
$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - m^2 b^2 \vartheta = 0$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$\vartheta = C_1 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4m^2 b^2} \right) z \right] + C_2 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4m^2 b^2} \right) z \right]$$

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4m^2 b^2} \right); P_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4m^2 b^2} \right); -P_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4m^2 b^2} \right)$$

Тепловой поток, передающийся через основание: $q_0 = \frac{\lambda \delta_0 \vartheta_0 P_1}{b}$



$$\text{Эффективность ребра: } \eta = \frac{q_0}{q_{\lambda \rightarrow \infty}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}}$$

Рисунок 2.3 - Ребро прямоугольного профиля

Для продольного ребра треугольного профиля (см. рис. 2.4) показатель степени в выражении (2.3) n равен нулю, поэтому функция профиля имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right) \quad (2.5)$$

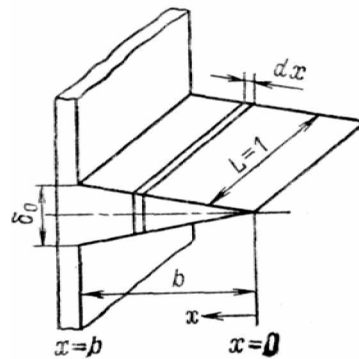


Рисунок 2.4 - Ребро треугольного профиля

Для продольного ребра вогнутого параболического профиля показатель степени в выражении (2.3) удовлетворяет указанной геометрии, когда $n = \infty$. Контур функции профиля в этом случае записывается в виде:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2 \quad (2.6)$$

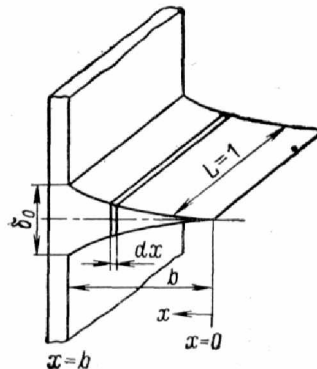


Рисунок 2.5 - Продольное ребро вогнутого параболического профиля

Для ребра выпуклого параболического профиля, (см. рис. 2.6) найдем, что показатель степени обобщенной функции профиля ребра (2.3) удовлетворяет этой геометрии, когда $n = 1/3$. Контур профиля такого ребра имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

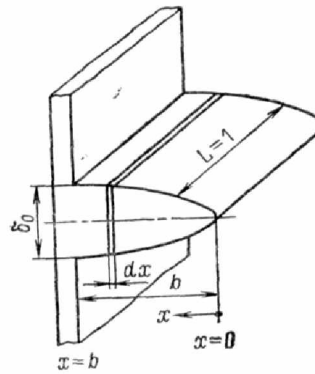


Рисунок 2.6 - Продольное ребро выпуклого параболического профиля

3. РАДИАЛЬНОЕ РЕБРО ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Предположим, что эти ребра отдают тепло в контактирующую с ними среду. Профиль ребра также ограничен двумя симметричными кривыми $y = f_2(r)$ и $y = -f_2(r)$, r - продольная координата, r_e - радиус высоты ребра, $f_1(r)$ - площадь поперечного сечения ребра, которую определим следующим образом:

$$f_1(x) = (2\pi r) 2 f_2(r). \quad (3.1)$$

В этом случае уравнение Фурье будет иметь вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda f_1(r) \frac{dt}{dr} \right) - 2\alpha (t - t_{cp}) = 0 \quad (3.2)$$

Будем использовать вариант граничных условий, как и для продольного ребра.

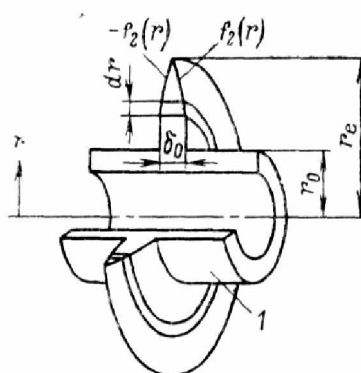


Рисунок 3.1 - Радиальное ребро произвольного профиля

Для радиального ребра прямоугольного профиля (см. рис. 3.2) функция профиля имеет вид:

$$f_2(r) = \frac{\delta_0}{2} \quad (3.3)$$

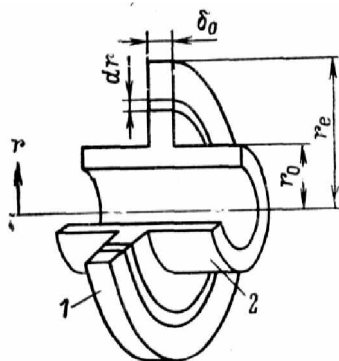


Рисунок 3.2 - Радиальное ребро прямоугольного профиля

Для радиального ребра гиперболического профиля (см. рис. 3.3) функция профиля имеет вид:

$$f_2(r) = \frac{\delta_0}{2} \frac{r_0}{r} \quad (3.4)$$

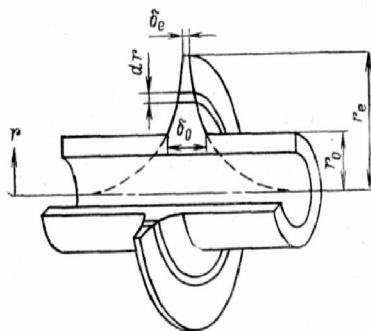


Рисунок 3.3 - Радиальное ребро гиперболического профиля

Для радиального ребра треугольного профиля функция профиля имеет вид:

$$f_2(r) = \frac{\delta_0}{2} \left(1 - \frac{r - r_0}{r_e - r_0} \right) \quad (3.5)$$

4. ШИП ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Обобщенная функция профиля для шипов отличается от аналогичной функции для ребер. Она имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^{\frac{1-2n}{2-n}} \quad (4.1)$$

На рис. 4.1 показан шип произвольного профиля. Площадь поперечного сечения шипа, нормального к тепловому потоку, контур ограничивающий профиль и периметр шипа являются функциями расстояния X от вершины шипа.

Дифференциальное уравнение передачи тепла (уравнение Фурье) имеет вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda f_1(x) \frac{dt}{dx} \right) - f_3(x) \alpha (t - t_{cp}) = 0, \quad (4.2)$$

где $f_1(x) = \pi f_2^2(x)$ - площадь поперечного сечения,

$f_3(x) = 2\pi f_2(x)$ - боковая поверхность, через которую шип контактирует с окружающей средой.

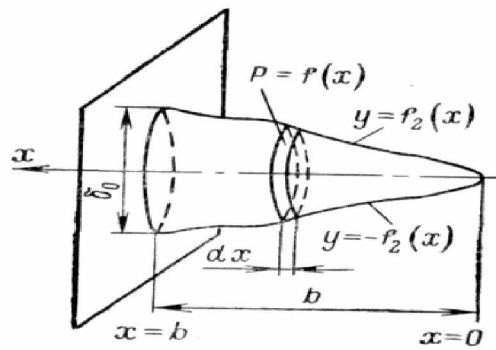


Рисунок 4.1 - Шип произвольного профиля

Для цилиндрического шипа, показанного на рис. 4.2, функция формы имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{d}{2}, \quad (4.3)$$

где d - диаметр шипа. В этом случае показатель степени в выражении (4.1) равен нулю, что соответствует $n=0.5$

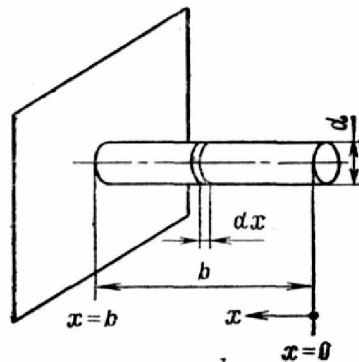


Рисунок 4.2 - Цилиндрический шип

Для шипа с прямоугольным поперечным сечением (см. рис. 4.3) площадь его поперечного сечения равна $f_1(x) = a_1 a_2$, а величина:

$$f_3(x) = 2(a_1 + a_2).$$

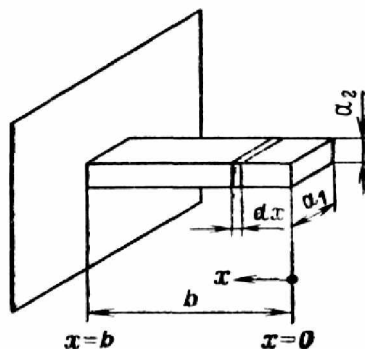


Рисунок 4.3 - Шип прямоугольного поперечного сечения

Для конического шипа, показанного на рис. 4.4, функция профиля определяется уравнением (4.1), при $n=-1$. Следовательно:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \frac{x}{b} \quad (4.4)$$

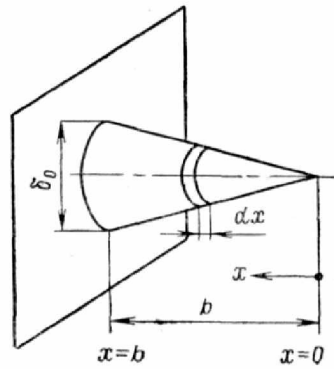


Рисунок 4.4 - Конический шип

Система координат, используемая для описания вогнутого параболического шипа, показана на рис. 4.5. Показатель степени функции профиля (4.1) соответствует $n = \infty$, поэтому она имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2 \quad (4.5)$$

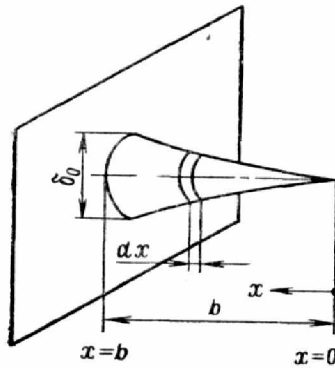


Рисунок 4.5 - Шип вогнутого параболического профиля

Система координат, используемая для анализа шипа выпуклого параболического профиля, приведена на рис. 4.6. Показатель степени функции профиля (4.1) соответствует $n = 0$, поэтому она имеет вид:

$$f_2(x) = \frac{\delta_0}{2} \sqrt{\frac{x}{b}} \quad (4.6)$$

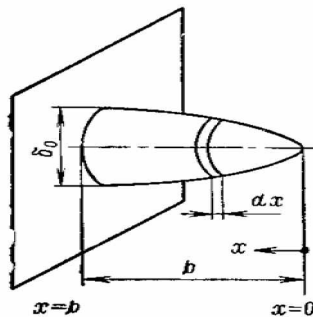


Рисунок 4.6 - Шип выпуклого параболического профиля

5. ПЛОСКАЯ СТЕНКА. СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

В качестве показательного примера решения уравнения теплопроводности рассмотрим одномерную стационарную задачу для плоской стенки толщиной b , на границах которой заданы граничные условия 1-го рода (рис. 5.1) [5].

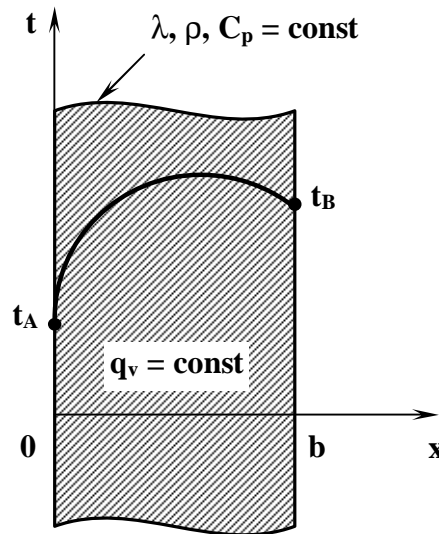


Рисунок 5.1 – Плоская стенка с внутренним источником тепла с граничными условиями 1-ого рода.

Теплофизические свойства материала стенки постоянные величины, кроме того, в каждом элементарном объеме действует постоянная мощность тепловыделения $q_v = \text{const}$.

В этом случае:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (5.1)$$

с граничными условиями: $x = 0 : t = t_A$; $x = b : t = t_B$.

Определим, каким образом распределяется температура внутри стенки. Введем новую переменную $U = \frac{dt}{dx}$ и подставим ее в уравнение теплопроводности (5.1):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad dU = -\frac{q_v}{\lambda} dx$$

Полученное выражение проинтегрируем по x : $U = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1$,

а возвращаясь к искомой переменной, будем иметь $\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1$, которое также проинтегрируем по x .

Получили общее решение дифференциального уравнения:

$$t = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2 \quad (5.2)$$

Константы C_1 и C_2 найдем из граничных условий:

$$x = 0 : t_A = -0 + 0 + C_2$$

$$x = b : t_B = -\frac{q_v b^2}{2\lambda} + C_1 b + C_2$$

Откуда следует, что: $C_2 = t_A$, а $C_1 = \frac{t_B - t_A}{b} + \frac{q_v b}{2\lambda}$.

После подстановки констант в общее решение, будем иметь частное решение исходной задачи:

$$t = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + \left(\frac{t_B - t_A}{b} + \frac{q_v b}{2\lambda} \right) \cdot x + t_A \quad \text{или} \quad t = t_A + (t_B - t_A) \cdot \frac{x}{b} + \frac{q_v}{2\lambda} \cdot (b - x) \cdot x$$

$$t = t_A + (t_B - t_A) \cdot \frac{x}{b} + \frac{q_v}{2\lambda} \cdot \left(1 - \frac{x}{b} \right) \cdot \frac{x}{b} \quad (5.3)$$

Тепловой поток на границах:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \left(\frac{t_B - t_A}{b} + \frac{q_v b}{2\lambda} - \frac{q_v}{2\lambda} \cdot 2x \right) \quad q = \lambda \frac{t_A - t_B}{b} + \frac{q_v}{2} (2x - b) \quad (5.4)$$

На границе $x = 0$ величина теплового потока будет равна:

$$q = \lambda \frac{t_A - t_B}{b} - \frac{q_v b}{2}, \quad \text{а на границе } x = b: \quad q = \lambda \frac{t_A - t_B}{b} + \frac{q_v b}{2}$$

Найдем, в какой точке по координате x , температура имеет максимальное значение. Для этого приравняем нулю производную по x и определим значение x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t_B - t_A}{b} + \frac{q_v b}{2\lambda} - \frac{q_v}{2\lambda} \cdot 2x = 0, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{t_B - t_A}{b} \cdot \frac{\lambda}{q_v} + \frac{b}{2}; \quad \text{при } t_A = t_B \quad x = \frac{b}{2}, \quad (5.5)$$

т.е. симметричное распределение температуры.

Таким образом, мы получили аналитическое выражение для распределения температуры от координаты x , которое подразумевает, что любой точке по оси x будет соответствовать одно значение температуры. В этом случае говорят о **непрерывном** континууме...

Следует отметить, не любое дифференциальное уравнение можно решить аналитически. В основном это относится к нелинейным задачам, когда теплофизические параметры зависят от искомой величины. В этом случае такая нелинейность называется «внутренней».

Различают и «внешнюю» нелинейность, когда граничные условия нелинейным образом зависят от искомой величины, например, при лучистом теплообмене с внешней средой [6].

В этом случае практически единственным методом решения задач являются численные, например конечно-разностные. Они подразумевают замену непрерывного континуума дискретным, с заменой непрерывных дифференциальных операторов – дискретными. В результате дискретизации получают систему алгебраических уравнений, которые относительно легко решаются с помощью компьютера или калькулятора.

Существует много способов дискретизации дифференциальных уравнений. Мы остановимся на методе контрольного объема.

Разобьем область исследования (толщину стенки) на N участков (необязательно равных) вдоль оси x (рис. 5.2). В точках деления получим узлы. Расстояние между соседними узлами называют шагом по пространственной переменной. В каждом узле будем иметь значения искомой величины, температуры t_w, t_M, t_E (или t_{i-1}, t_i, t_{i+1}). Семейство узлов называют «сеткой», а значения искомой величины в них – сеточной функцией.

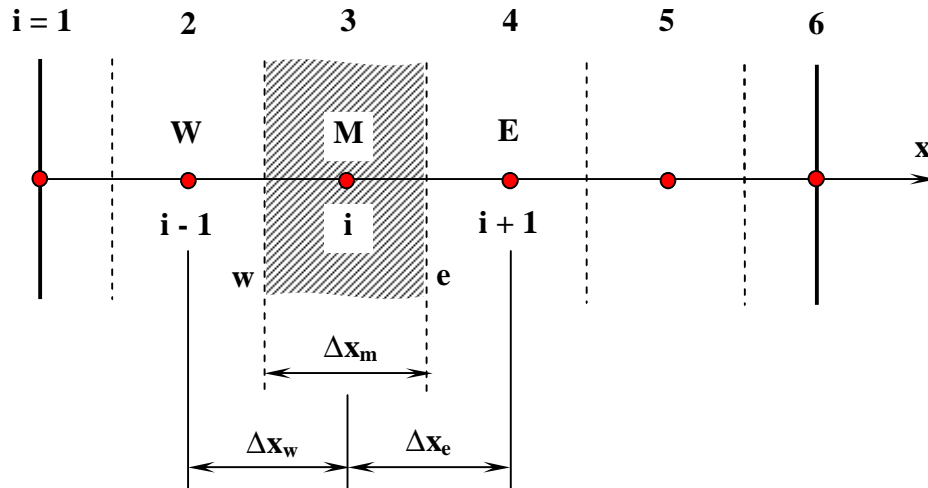


Рисунок 5.2 – Разностная сетка, введенная на исследуемую область.

Участок сетки, ограниченный штриховыми линиями, называют контрольным объемом. Можно получить дискретные уравнения, используя тепловой баланс в контрольном объеме. С этой целью проинтегрируем уравнение (5.1) по контрольному объему, а затем представим результат в виде алгебраических уравнений.

После интегрирования уравнения (5.1) по x в пределах от w до e получим:

$$\left(\lambda \frac{dt}{dx} \right)_e - \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right)_w + q_v \Delta x_m = 0 \quad (5.6)$$

Так как $-\lambda \frac{dt}{dx}$ – представляет собой локальную плотность теплового потока, то уравнение (5.6) является балансом между тепловыми потоками на гранях контрольного объема и количеством тепла, произведенным в контрольном объеме.

Для аппроксимации градиентов температур, предположим, что изменение температуры между узлами является кусочно-линейным. Тогда:

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_e = \frac{t_{i+1} - t_i}{\Delta x_e} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dt}{dx} \right|_w = \frac{t_i - t_{i-1}}{\Delta x_w},$$

подставляя их в (5.6) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_e (t_{i+1} - t_i) - \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w (t_i - t_{i-1}) + q_v \Delta x_m &= 0 \\ \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w t_{i-1} - \left[\left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w + \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w \right] t_i + \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_e t_{i+1} + q_v \Delta x_m &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Введем в уравнении (5.7) коэффициенты:

$$A_i = \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w; \quad B_i = \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_e; \quad C_i = \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_w + \left(\frac{\lambda}{\Delta x} \right)_e = A_i + B_i; \quad F_i = q_v \Delta x_m,$$

тогда уравнение (5.7) может быть записано в виде:

$$A_i t_{i-1} - C_i t_i + B_i t_{i+1} + F_i = 0 \quad (5.8)$$

Получим численное решение уравнения (5.1) для простой ситуации $\lambda = 1$; $q_v = 2$; $b = 5$; $t_A = 0$; $t_B = 15$. Будем использовать равномерную сетку $\Delta x_m = \Delta x_e = \Delta x_w = 1$. Разобьем стенку на 5 участков.

Температуры t_1 и t_6 известны $t_1 = 0$ и $t_6 = 15$. Для внутренних точек исполь-

зуюм дискретный аналог (5.7):

$$i = 2: \quad t_1 - 2t_2 + t_3 + 2 = 0 \quad 2t_2 = 0 + t_3 + 2 \quad t_2 = 0,5 \cdot t_3 + 1 \quad (5.9)$$

$$i = 3: \quad t_2 - 2t_3 + t_4 + 2 = 0 \quad 2t_3 = t_2 + t_4 + 2 \quad 2t_3 = 0,5 \cdot t_3 + 1 + t_4 + 2 \quad t_3 = \frac{2}{3} \cdot t_4 + 2 \quad (5.10)$$

$$i = 4: \quad t_3 - 2t_4 + t_5 + 2 = 0 \quad 2t_4 = t_3 + t_5 + 2 \quad t_4 = \frac{3}{4} \cdot t_5 + 3 \quad (5.11)$$

$$i = 5: \quad t_4 - 2t_5 + t_6 + 2 = 0 \quad 2t_5 = t_4 + 15 + 2 \quad 2 \cdot t_5 = \frac{3}{4} \cdot t_5 + 3 + 17 \quad t_5 = 16 \quad (5.12)$$

Если использовать это значение в уравнении (5.15), то получим t_4 ; затем из выражения (5.14) найдем t_3 , а из выражения (5.9) – t_2 .

Таким образом, численное решение задачи будет выглядеть следующим образом: $t_1 = 0$; $t_2 = 7$; $t_3 = 12$; $t_4 = 15$; $t_5 = 16$; $t_6 = 15$.

Произведем сравнение полученного численного решения с точным. Подставим параметры $\lambda = 1$; $q_v = 2$; $b = 5$; $t_A = 0$; $t_B = 15$ в выражение (5.3):

$$t = t_A + (t_B - t_A) \cdot \frac{x}{b} + \frac{q_v}{2\lambda} \cdot (b - x) \cdot x, \quad t = 0 + (15 - 0) \cdot \frac{x}{5} + \frac{2}{2 \cdot 1} \cdot (5 - x) \cdot x$$

$$t = 8x - x^2 \quad (5.16)$$

Это выражение может быть использовано для нахождения точных значений:

$$t_1 = 0; \quad t_2|_{x=1} = 7; \quad t_3|_{x=2} = 12; \quad t_4|_{x=3} = 15; \quad t_5|_{x=4} = 16; \quad t_6 = 15.$$

В данном случае получилось, что точные значения, найденные по выражению (5.16) совпадают с полученными численно.

В общем случае численное решение, полученное при небольшом числе контрольных объемов, будет давать некоторую погрешность по сравнению с точным решением. Если увеличивать число расчетных точек, то эта погрешность должна уменьшаться [7], [8].

Для многих задач, не имеющих аналитического решения, численное решение можно рассматривать в качестве достаточно точного, в случае, если при дальнейшем измельчении контрольных объемов оно не изменяется.

Перелік рекомендованої літератури:

1. Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена.– М.: Энергия, 1977.- 464 с.
2. Мак-Кракен, Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977.- 584 с.
3. Поляков Д.Б., Круглов И.Ю. Программирование в среде ТУРБО ПАСКАЛЬ (5.5).- М.: МАИ, 1992.- 576 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы.- М.: Наука, 1978._ 512 с.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984.- 152 с.
6. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена .- М.: Высшая школа, 1990.- 207 с.
7. Берглес А. Интенсификация теплообмена // Теплообмен. Достижения. Проблемы. Перспективы: Избранные труды 6-й Межд. конф. по теплообмену. - М., 1981.-С. 145-192.

8. Жукаускас А.А. Проблемы интенсификации конвективного теплообмена // Тепломассообмен-VII: Проблемные докл. VII Всесоюзн. конф. по тепло-массообмену. - Минск, 1985. - Ч. 1. - С. 16-41.
9. Толубинский В.Ч., Михайленко Н.А. Методы интенсификации теплообмена при течении теплоносителей в каналах // Теплоперенос в жидкостях и газах. — Киев, 1984. -С. 135-157.
10. Мильман О.О., Шкловер Г.Г. Интенсификация теплообмена при конденсации водяного пара // Теплообмен в элементах энергетических установок. - Л., 1977.-С 297-300.
11. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Интенсификация теплообмена в каналах. - М.: Машиностроение, 1981. - 265 с.
12. Дубровский Е.В. Интенсификация конвективного теплообмена в пластинчато-ребристых теплообменных поверхностях // Там же. -1978. -№ 6. С. 116-127.
13. Калинин Э.К., Ярхо С.А. Влияние чисел Рейнольдса и Прандтля на эффективность интенсификации теплоотдачи в трубах // Там же. - 1966. - Т. 11, №4.-С. 426-431.
14. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Кузьминов В.А., Неверов А.С. О влиянии высоты и шага размещения турбулизаторов на интенсификацию теплообмена в трубе // Там же. - 1971. - № 3. - С. 31-35.