УДК 512.2

КОНГРУЕНЦІЯ ГВИНТОВИХ ЛІНІЙ В НОРМАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Неснов Д. В., к.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел/факс (062) 338-4885

***Анотація* – розглядається утворення конгруенцій гвинтових ліній на основі нормальної циліндричної координації простору.**

***Ключові слова* – спеціальна система координат, конгруенція, координатна сітка, опорний циліндр, нормальні координати, евольвента.**

Постановка проблеми. Розвиток способів формоутворення поверхонь у спеціальних координатах вимагає застосування до такої координації простору вже відомих конструктивних схем та способів. Одними з найбільш поширених в техніці є гвинтові поверхні, що утворюються гвинтовим рухом поданої твірної лінії [1]. Такі поверхні можливо отримати вилученням з конгруенції циліндричних гвинтових ліній, що мають спільну вісь та сталий крок.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [2] вперше подання конгруенції ліній було асоційовано зі спеціальною координацією тривимірного простору. У цій роботі було розглянуто поверхні конгруенцій координатних ліній та їх трансверсальні поверхні для випадку нормальних ортогональних координат. У [3] було розглянуто конгруенції координатних ліній нормальних систем, що утворюються за рахунок зміни однієї з двох сімей ліній координатної сітки опорної поверхні.

Формулювання цілей статті. Розробити аналітичну модель конгруенції координатних ліній нормальної циліндричної системи, що утворюється при зміні однієї з сімей координатної сітки опорного циліндра на сім'ю гвинтових ліній сталого кроку.

Основна частина. Нормальна просторова система циліндричних координат в класичному вигляді визначається функціями:

$$x = (a+v)\cos t,\ y = (a+v)\sin t,\ z = u, \qquad (1)$$

де: t – кут між півплощиною xOz та півплощиною розташування поточної точки; u – відстань між площиною xOy та поточною точкою на поверхні циліндра; v - відстань від поточної на поверхні циліндра до точки простору вздовж нормалі; a – радіус опорного циліндра. Зауважимо, що координати $r = a+v$ та t утворюють полярну систему на площині xOy (при $u=const$), а координати ρ та u – прямокутну систему декартових координат на площині пучка з віссю Oz (при $t=const$).

Координатні поверхні системи: $t=const$ та $u=const$ – площини, що відповідно проходять через вісь циліндра (Oz) та перпендикулярні до неї,

v=const - циліндри, співосні з опорним.

Координатні лінії: конгруенція t - ліній, складається з кіл, що мають центри на осі циліндра з площинами, що перпендикулярні до неї, конгруенція u - ліній, утворюється прямими, які паралельні до осі циліндра та конгруенція v - ліній, утворена нормалями опорного циліндра.

Змінимо нормальну координацію простору (1) за рахунок нової конгруенції координатних ліній. Це можливо зробити замінивши одну з двох сімей координатних ліній на опорному циліндрі на сім'ю гвинтових ліній. Розглянемо послідовно обидва можливих випадки.

В першому випадку координатна сітка на опорному циліндрі буде складатися з його прямолінійних твірних та сім'ї гвинтових ліній, що перетинають їх під сталим кутом – β. Для цього замінимо параметр u за допомогою неперервної диференційованою функції двох змінних

$$u = u(t, w), \tag{2}$$

де: w - параметр сім'ї ліній гвинтових ліній на поверхні - визначнику.

Вираз функцій (2) отримаємо скориставшись рівнянням для знаходження кута між двома напрямками $\frac{du}{dt}$ та $\frac{\partial u}{\partial t}$ на поверхні [1]:

$$\cos j = \frac{Edu\partial u + F(du\partial u + dt\partial t) + Gdt\partial t}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudt + Gdt^2}\sqrt{E\partial u^2 + 2F\partial u\partial t + G\partial t^2}}, \tag{3}$$

де: $E = 1,\ F = 0, G = a^2$ - коефіцієнти першої квадратичної форми опорного циліндра.

Прямолінійні твірні циліндра визначаються напрямком $\partial u = 1, \partial t = 0$. З урахуванням цього та значень коефіцієнтів *E*, *F* та *G* рівняння (3) перетвориться на

$$\cos b = \frac{du}{\sqrt{du^2 + a^2 dt^2}}.$$

Розділивши змінні в останньому рівнянні отримаємо

$$du = \pm a \operatorname{ctg} b \ dt. \tag{4}$$

Розв'язок цього рівняння дає вираз функції (2)

$$u = \pm a \operatorname{ctg} b \ t + w. \tag{5}$$

При цьому додатному значенню подвійного знаку у виразі (5) відповідає правий напрямок гвинтової лінії, а від'ємному – лівий.

Підставляючи вираз з правої частини (5) до (1) замість u будемо мати

$$x = (a + v)\cos t,\ y = (a+v)\sin t, z = \pm a \operatorname{ctg} b\ t + w \tag{6}$$

- рівняння, що визначають подання нової нормальної циліндричної координації простору. У цій координації змінено сім'ю площин *u=const* на сім'ю прямих гелікоїдів (*w=const*), що утворюється нормалями опорного циліндра вздовж гвинтових ліній. Конгруенцію t – ліній в новій координації простору утворюють пари поверхонь *w=const* та *v=const*, які визначають множину гвинтових ліній, що мають згідно з (6) сталий крок $b = a \operatorname{ctg} b$. Внутрішні рівняння поверхні нової конгруенції координатних ліній отримаємо, зв'язавши параметри w та v за допомогою неперервної

диференційованої функції

$$v = v(w), t = t \text{, або } w = w(v), t = t. \qquad (6)$$

Підставляючи праву частину рівнянь (7) до (6) отримаємо параметричні рівняння поверхні конгруенції. При цьому зауважимо, що оскільки кожному значенню параметра t у (6) відповідає півплощина пучка з віссю Oz, функції $w = w(v)$, або $v = v(w)$ визначають деяку плоску лінію, яка лежить у цій півплощині.

В другому випадку координатну сітку на циліндрі складатимуть сім'я кіл із центрами на осі циліндра, що належать площинам ортогональним до неї, та сім'я гвинтових ліній, які утворюють сталий кут $g = p/2 - b$ з цими площинами.

Запишемо рівняння (4) відносно dt, враховуючи значення γ

$$dt = \pm \frac{du}{a \operatorname{tg} g}.$$

Його розв'язок

$$t = \pm \frac{u}{a \operatorname{tg} g} + w. \qquad (8)$$

Підставляючи праву частину (8) замість t до (1) отримаємо

$$x = (a+v)\cos(\pm \frac{u}{a \operatorname{tg} g} + w),\ y = (a+v)\sin(\pm \frac{u}{a \operatorname{tg} g} + w),\ z = u. \qquad (9)$$

На відміну від першого випадку, в другому випадку параметризації опорного циліндра збережено сім'ю площин $u=const$, а сім'ї $w=const$ відповідає однопараметрична множина співосних прямих гелікоїдів. Конгруенцію гвинтових ліній в цьому випадку утворюють u – лінії. Внутрішні рівняння поверхні конгруенції гвинтових ліній в другому випадку визначають функції

$$v = v(w), u = u \text{, або } w = w(v), u = u. \qquad (10)$$

Звернемо увагу на те, що координатну сітку на поверхні конгруенції складатимуть, окрім гвинтових ліній, плоскі лінії, які знаходяться в площинах перпендикулярних осі опорного циліндра та відповідають поточному значенню параметра u.

Отже, попередні результати вказують на можливість асоціювання з функціями (6) та (10) занурення до конгруенції гвинтових деякої плоскої лінії. Ця лінія буде здійснювати гвинтовий рух у напрямку осі опорного циліндра та знаходитись: у випадку координації (6) – в півплощині, що проходить через вісь циліндра; у випадку координації (10) – в площині, ортогональної до зазначеної осі. Дослідимо цю обставину, розглянувши конкретні приклади.

Приклад 1. Скласти рівняння поверхні, утворену гвинтовим рухом лівого напрямку кола, що знаходиться в площині, яка проходить через вісь обертання.

Шукану поверхню отримаємо занурюючи кола до конгруенції (6) гвинтових ліній. Нехай півплощина кола визначається значенням параметра $t=$

t_0. Параметричні рівняння (6) матимуть вигляд

$$x=(a+v)\cos t_0,\ y=(a+v)\sin t_0,\ z=-a\operatorname{ctg} b\ t_0+w \qquad (11)$$

та будуть визначати плоску систему прямокутних координат, осі якої *v*, *w* паралельні осям системи $r=\sqrt{x^2+y^2}$, *z* із початком O', що має координати $r_0=a,\ z=-a\operatorname{ctg} b\ t_0$ відносно неї. Підставляючи в рівняння поданого кола

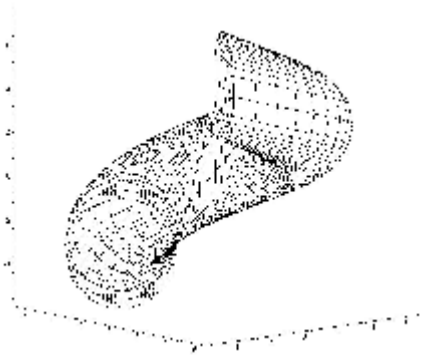

Рис 1. Поверхня до прикладу 1

$$\begin{cases} y/x=\operatorname{tg} t_0; \\ (r-r_c)^2+(z-z_c)^2=R^2, \end{cases}$$

замість *x*, *y*, *z* праву частину (11) та враховуючи, що $r=a+v$, перетворимо ці рівняння на

$$\begin{cases} t=t_0; \\ (a+v-r_c)^2+(-a\operatorname{ctg} b\ t_0+w-z_c)^2=R^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи останнє з рівнянь системи відносно *w* будемо мати

$$w=z_c\pm\sqrt{R^2-(a+v-r_c)^2}+a\operatorname{ctg} b\ t_0$$

- внутрішнє рівняння поверхні. На рис.1 зображена поверхня отримана за цим внутрішнім рівнянням.

Приклад 2. Скласти внутрішнє рівняння теоретичної бічної поверхні циліндричного косозубого колеса евольвентного профілю.

Теоретичною поверхнею косозубого евольвентного колеса є поверхня дотична до гвинтової лінії. Перерізом такої поверхні площиною, перпендикулярною до осі циліндра гвинтової лінії, є евольвента кола перетину циліндра з цією площиною. Отже, таку поверхню можна отримати гвинтовим рухом евольвенти відносно осі циліндра, або зануренням евольвенти до конгруенції гвинтових лінії сталого кроку. Розглянемо цей випадок утворення поверхні.

Рис 2. Поверхня до прикладу 2

Сумістимо одну з торцевих площин колеса з площиною *xOy* просторової системи, вісь його основного циліндра направимо вздовж осі *Oz*. Тоді рівняннями конгруенції гвинтових ліній, що є траєкторіями руху точок евольвентного профілю, будуть рівняння (9). Точки профілю, що знаходяться в площині *xOy*, визначаються значенням параметра $u=u_0$ та полярними координатами $r=a+v$, *w* з полярною віссю *Ox*. Отже, внутрішньому рівнянню шуканої поверхні буде відповідати полярне рівняння евольвенти кола основного циліндра, яке можливо отримати із загальних параметричних рівнянь евольвенти кола радіуса *a*:

$$x=a(\cos j+(j-j_0)\sin j),\ y=a(\sin j-(j-j_0)\cos j), \qquad (12)$$

де: φ, φ_0 – відповідно кутовий параметр поточної точки кола, що розгортається, та кутовий параметр початкової точки евольвенти. Підставимо праву частину рівнянь (12) до формул переходу від прямокутної до полярної сис-

теми

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm a\sqrt{(j - j_0)^2 + 1},$$

$$w = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin j - (j - j_0)\cos j}{\cos j + (j - j_0)\sin j}\right).$$

Розв'язавши перше з рівнянь відносно φ з огляду на те, що $r = a + v$, та підставляючи до другого отримаємо

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(j_0 \pm \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1}) \mp \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1}\cos(j_0 \pm \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1})}{\cos(j_0 \pm \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1})_0 \pm \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1}\sin(j_0 \pm \sqrt{\frac{(v+a)^2}{a^2} - 1})}\right)$$

- внутрішнє рівняння евольвентного гелікоїда. Додатне чи від'ємне значення подвійного знаку визначає напрямок розгортання кола. На рис. 2 дано зображення бічної поверхні зуба разом із основним циліндром.

Висновки. Отримані результати вказують на те, що вибір першого чи другого випадку координації простору впливає на схему утворення гвинтової поверхні: рівняннями (6) зручніше користуватись при гвинтовому русі плоскої лінії, площина якої проходить через вісь руху, рівняннями (9) – коли її площина перпендикулярна до цієї осі.

Література

1. *Норден А. П.* Дифференциальная геометрия.- М.: Учпедгиз, 1948.- 245 с.

2. *Коломієць О. А.* Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах. // Автореф. дис… канд. техн. наук: 05. 01. 01.- Донецьк, 2000 - 18 с.

3. *Неснов Д. В., Фролов О. В.* Теорія поля в нормальних конічних координатах. // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2001, - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т.14 - с.91-98.

THE HELIX LINES CONGRUENCE IN NORMAL CILINDRICAL COORDINATES

D. Nesnov

Summary

Formation of helix lines congruence on the basis of normal cylindrical coordinate system is considered.