И.А. Скидан
Н.В. Стребиж
Государственное высшее учебное
заведение “Донецкий национальный
технический университет”
г. Донецк, Украина

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В математике вообще и в геометрии в частности по широте трактовок математических объектов с позиций единого понятия трудно найти конкурента понятию отображения.

В [1, с. 291] отображение определяется как соответствие элементов одного множества элементам другого. Так функцию можно трактовать как отображение области определения функции на область значений функции.

В геометрии к числу отображений относят преобразования, изображения, проекции, например, конформное преобразование, сферическое изображение поверхности, проекция поверхности на плоскость.

Отображаемый объект называют прообразом, объект – результат отображения – образом. Образ и прообраз могут иметь одинаковую и различную размерность, общую и различную координацию, общего и различных носителей. Например, носителем прообраза двумерной поверхности является трёхмерное пространство. Носителем образа – сферического изображения поверхности также является трёхмерное пространство. При этом образ получается в результате произведения двух проецирований: лучами конгруэнции нормалей на несобственную (бесконечно удалённую) плоскость и центральным проецированием из центра единичной сферы на ее поверхность, то есть соответствие между точечными множествами поверхности и её сферического изображения устанавливается посредством промежуточного носителя – несобственной плоскости. Заметим, что двумерное сферическое изображение поверхности в общем случае двумерное, в частном, если поверхность развёртываемая, – одномерное. Аналогично, проекция цилиндра на плоскость (поверхность) может быть линией, которая называется вырожденной проекцией цилиндра.

Особое место в теории отображений имеют параметрические уравнения, в которых роль функций и аргументов играют прямоугольные и криволинейные координаты. Здесь понятия образа и прообраза применимы только к аргументам и функциям.

Параметрические уравнения трёхмерного пространства

$$x = x\ \ u,v,w\ \ ,\ y = y\ \ u,v,w\ \ ,\ z = z\ \ u,v,w \qquad (1)$$

можно трактовать как отображение области определения функций на область их значений. Область определения функций (1) находится из условия неравенства нулю якобиана

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

В этой области возможно разрешение уравнений (1) относительно u, v, w в виде

$$u = u\;\; x, y, z\;\; , v = v\;\; x, y, z\;\; , w = w\;\; x, y, z\;\; . \qquad (2)$$

О свойствах функций (1) и (2) можно сказать, что произведение отображений, которые они выражают, приводит к тождественному преобразованию.

Покажем как оперирование понятиями, связанными с термином “отображение”, может привести к решению неэлементарной с теоретической точки зрения, но важной для практического применения, задачи формообразования поверхности, отнесенной к линиям кривизны.

Рассмотрим конструктивную схему решения этой задачи. Пусть

$$x = u,\; y = v,\; z = w - \qquad (3)$$

тождественное преобразование в виде (1).

Если считать u, v параметрами положения конгруэнции (связки) прямых, параллельных Oz, а $w-$ параметром положения точки на прямой конгруэнции, то форма прямого цилиндра определяется формой направляющей

$$x = u\;\; t\;\; , y = v\;\; t\;\; . \qquad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получим параметрические уравнения цилиндра

$$x = x\;\; t\;\; , y = y\;\; t\;\; , z = w, \qquad (5)$$

в которых $t = const,\; w = const -$ линии кривизны.

Пусть теперь необходимо составить параметрические уравнения складчатой циклической поверхности (условия простоты технологии изготовления), отнесенной к линиям кривизны (условие применимости метода конечных разностей расчета на прочность).

Условия диктуют выбор функций ввода системы координат, удовлетворяющей следующим трём требованиям:

- она должна быть ортогональной;
- она должна содержать координатное семейство $w = const$ сфер (в схеме – горизонтальных плоскостей);
- она должна содержать конгруэнцию координатных $w-$окружностей (в схеме – конгруэнция прямых, параллельных Oz).

Всем этим условиям удовлетворяют циклические координаты, функции ввода которых в виде (1)

$$x = w\varphi\cos u,\; y = w\varphi\sin u,\; z = v\varphi, \tag{6}$$

где $\varphi = \dfrac{w\sqrt{v^2+kc^2}+v\sqrt{w^2-kc^2}}{v^2+w^2}$, $c-$ внутренний параметр.

Функции зависимости w, v, u от x, y, z:

$$\begin{gathered} w = \frac{1}{2z}\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2-kc^2\right)^2+4kc^2z^2}, \\ v = \frac{1}{x^2+y^2}\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2+kc^2\right)^2-4kc^2\left(x^2+y^2\right)}, \\ u = arctg\frac{y}{x}. \end{gathered} \tag{7}$$

На сферах $w = const$ зададим линию.

Зададим w значение w_1 и введем вместо v новый параметр t

$$v = \frac{\sqrt{w_1^2-kc^2}+w_1\sin t}{\cos t}. \tag{8}$$

Свяжем параметры t и u соотношением

$$t = t_0 + h\cos(nu), \tag{9}$$

где $t_0, h, n-$ константы.

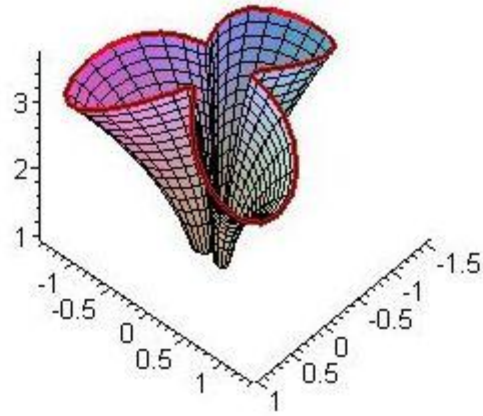
Тогда параметрические уравнения линии на сфере $w = w_1$ будут выражены суперпозицией функций (1) $\leftarrow$ (8) $\leftarrow$ (9), которые, в конечном счете, будут иметь вид

$$xx_i = xx_i \;\; u \;\; ; \;\; i = 1,\ 2,\ 3 \;\; , \qquad (10)$$

а уравнения искомой поверхности – суперпозиция функций (1) ⟵ второе и третье уравнение (7) ⟵ (10) в виде

$$x_i = x_i \;\; u,\ w \;\; . \qquad (11)$$

На рисунке показана поверхность (11) при $c = 1,\ k = 1,\ t_0 = \pi / 3,$ $h = 0.35, n = 3.$



Подчеркнем, что роль формообразующего элемента играет внутреннее уравнение (9).

Литература.

1. Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов / О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И. Соркин, Н.Г. Федин – М.: Просвещение, 1965.