

## ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЕКЦІЙ ЛІНІЙ ПЕРЕТИНУ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Катькалова О. А., к. т. н.

Бекметова А.

*Донецький національний технічний університет*

Тел. (062) 338-48-85

*Анотація – досліджені геометричні характеристики проєкцій ліній перетину поверхонь обертання другого порядку, які мають спільну площину симетрії, показана методика побудови їхніх геометричних елементів.*

*Ключові слова – лінія перетину, площина симетрії, гіпербола, парабола, пряма, асимптота, еліпс, осі, середня лінія, центр, вершина.*

Криві поверхні широко використовуються в техніці, будівництві, архітектурі та інших сферах діяльності людини. В практиці проектування і виробництва найбільш широко використовуються поверхні обертання. У розв'язанні різних задач на взаємне перетинання поверхонь проєктувальник, як правило, зображує поверхню в найбільш зручному для роботи положенні, наприклад, на площині проєкцій, паралельній площині симетрії, оскільки порядок проєкції лінії перетинання поверхонь зменшується вдвічі. Так, просторові криві 4-го порядку зображуються плоскими кривими 2-го порядку - еліпсами, гіперболами, парабололами. Однак, якщо конструктор не володіє досить глибокими знаннями в області нарисної геометрії, помилки в його розв'язаннях вищезгаданих задач неминучі.

У 50-ті роки минулого століття Глазунов Е.А. провів аналіз проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь обертання зі спільною площиною симетрії в різних сполученнях переважно в окремих положеннях [1]. У цих дослідженнях бракує прикладів перетину поверхонь за умови їхнього довільного розташування.

Ціль статті доповнити попередні дослідження на прикладах перетину конусів, циліндрів та сфер у довільних взаємних положеннях.

Дві алгебраїчні поверхні другого порядку, які мають спільну площину симетрії, перетинаються по кривій четвертого порядку, котра проєкціюється на площину, паралельну площині симетрії, у криву другого порядку, дійсну чи таку, що розпалася [1, с. 35-69]. Для спрощення та уточнення побудови проєкцій такої кривої бажано знати вид кривої і її елементи. Для побудови лінії перетину в таких випадках можуть бути застосовані сфери як поверхні посередники.

У перетині конічної поверхні обертання зі сферою, центр якої належить осі конуса, утворюється два кола, котрі проєкціюються на площину, паралельну осі конуса, відрізками двох паралельних прямих (рис. 1). Ці відрізки перпендикулярні до проєкції осі конуса. Якщо опустити перпендикуляр із центра сфери на твірну конуса, то матимемо точку, че-

рез яку пройде пряма, паралельна вище названим відрізкам, і на однакових відстанях від них. Ця лінія називається середньою лінією для побудованих відрізків. Вона слугує середньою лінією для будь-якої пари прямих, в які проєкціюються кола, що утворюються у перетині конуса зі сферою іншого радіуса, за умови, що центр її розташований у тій самій точці на осі конуса.

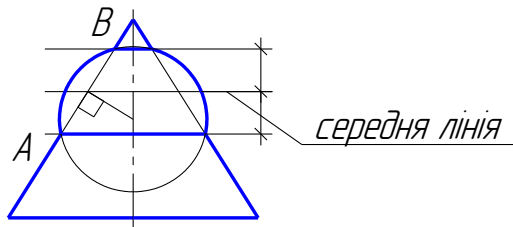


Рис. 1

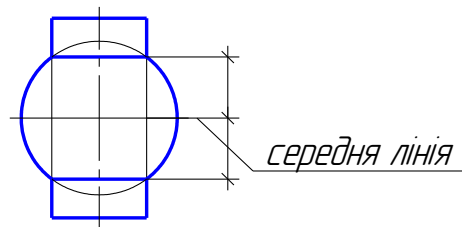


Рис. 2

Середні лінії надають можливість побудови для проєкції лінії перетину поверхонь обертання другого порядку вісь, якщо вона проєкціюється параболою, або центр, якщо вона проєкціюється еліпсом чи гіперболою. Середня лінія у перетині циліндра обертання зі сферою проходить через центр сфери, перпендикулярно до осі та твірних циліндра (рис. 2).

Якщо перетинаються два конуси обертання зі спільною площиною симетрії, паралельними осями і однаковими кутами при вершинах, то лінія перетину зображується еліпсом, гіперболою, подвійною прямою чи колом (якщо осі збігаються) і невласним колом. На спільну площину симетрії лінія перетину проєкціюється у пряму лінію.

У разі перетину двох конусів обертання зі спільною площиною симетрії, паралельними осями і різними кутами при вершинах лінія перетину зображується біквратною кривою або двома колами (якщо осі збігаються). На спільну площину симетрії ці криві проєкціюються, відповідно параболою або двома прямими. Лінія перетину конуса і циліндра обертання зі спільною площиною симетрії та паралельними осями зображується біквратною кривою або двома колами (якщо осі збігаються). На спільну площину симетрії лінія перетину проєкціюється відповідно параболою або відрізками паралельних прямих.

Лінія перетину двох поверхонь обертання другого порядку зі спільною площиною симетрії та осями, що перетинаються, проєкціюється на цю площину [1]:

1. *Гіперболою*, якщо перетинаються поверхні обертання у будь-якій комбінації: циліндричних, конічних, параболоїдів, гіперболоїдів та еліпсоїдів (розтягнених чи стиснених). Рівносторонньою гіперболою лінія перетину проєкціюється, якщо перетинаються: два циліндри; два параболоїди; циліндр з параболоїдом; два конуси, якщо кути при вершинах у них рівні; два гіперболоїди, якщо кути при вершинах їхніх асимптотичних конусів однакові; конус і гіперболоїд, якщо кути при вершинах

конуса і асимптотичного конуса гіперboloїда рівні; два подібні еліпсоїди.

2. *Параболою*, якщо перетинаються сфери з поверхнями циліндрів і конусів, а також з поверхнями параболоїда, гіперboloїда чи еліпсоїда.

3. *Еліпсом*, якщо перетинаються стиснений еліпсоїд з поверхнями: циліндра, конуса, параболоїда, гіперboloїда або розтягнутого еліпсоїда.

Встановлено [1], що напрямок асимптот гіперболи (проекції лінії перетину) не змінюється, якщо:

а) змінити діаметр циліндричної поверхні, яка бере участь у перетині, не змінюючи напрямок осі;

б) переміщувати одну із поверхонь, що перетинаються, уздовж її осі;

в) замінювати поверхню параболоїда співвісною циліндричною поверхнею;

г) замінювати поверхню гіперboloїда його асимптотичним конусом.

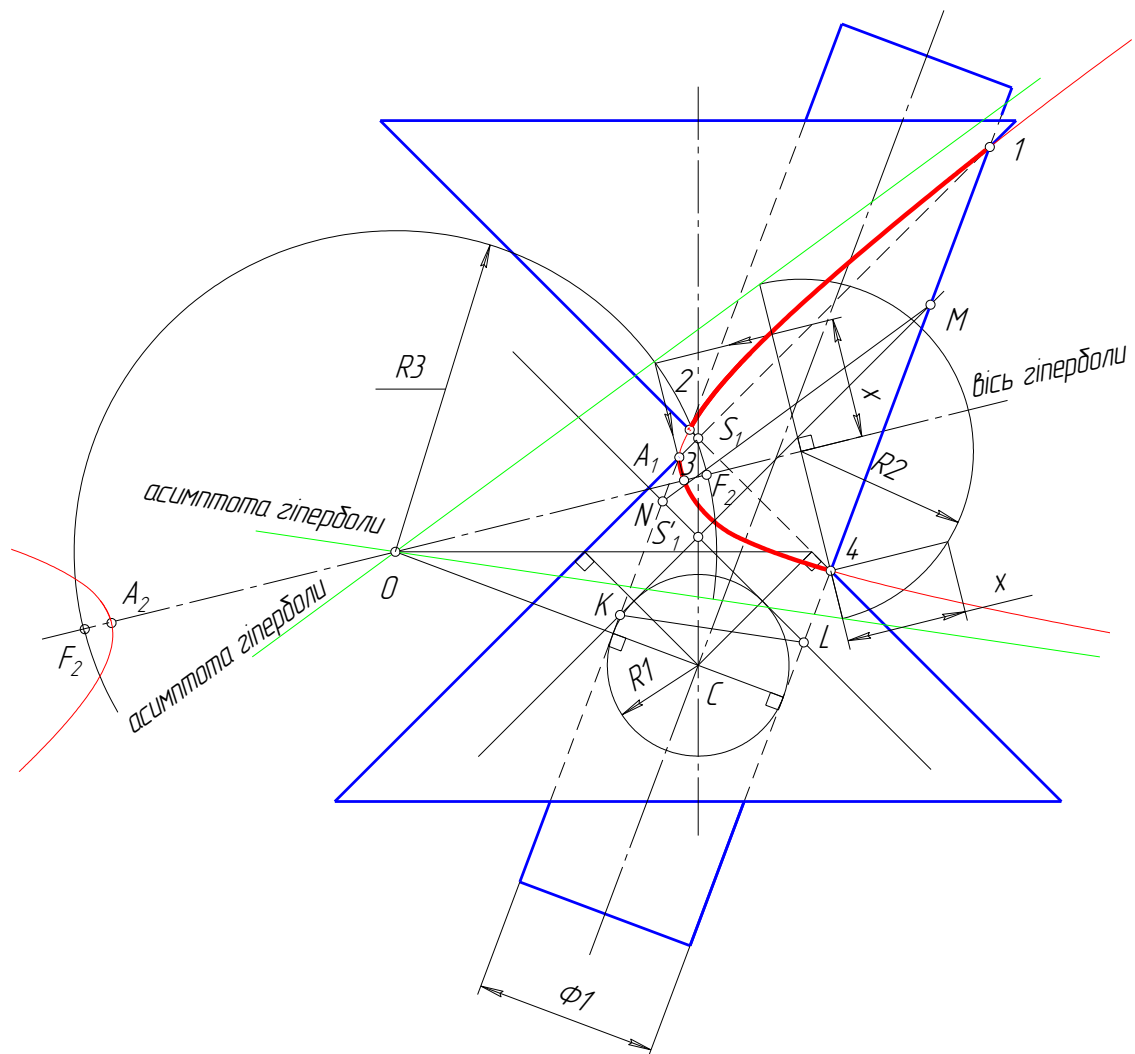


Рис. 3 Побудова лінії перетину конуса і циліндра

Методику аналізу проєкцій ліній перетину поверхонь детальніше

розглянемо на прикладі перетину конуса обертання  $S_1$  з циліндром обертання  $\Phi_1$ , які мають спільну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проєкцій. Їхні осі перетинаються під гострим кутом у точці  $C$  (рис. 3). Точки 1, 2, 3, 4 є вихідними. Вписуємо сферу радіуса  $R_1$  в циліндр з центром  $C$ . Посуваємо конус  $S$  уздовж його осі до положення  $S'_1$ , в якому він буде дотичним до сфери  $R_1$ . Конус  $S'_1$  і циліндр  $\Phi_1$  (описані навколо однієї сфери) перетинаються по плоским кривим другого порядку, котрі проєкціюються прямими  $KL$  і  $MN$ . Ці прямі паралельні асимптотам гіперболи, в котру проєкціюється лінія перетину даних поверхонь.

За середніми лініями циліндра  $\Phi_1$  і конуса  $S_1$  знаходимо центр гіперболи  $O$ . Через нього проводимо асимптоти гіперболи паралельно прямим  $KL$  и  $NM$ . Будуємо вісь гіперболи. За допомогою точки 4 і радіуса  $R_2$  знаходимо вершину  $A_1$  і симетричну їй  $A_2$ . Фокуси гіперболи  $F_1$  і  $F_2$  будуються відомим способом за допомогою кола  $R_3$ . Додаткові точки можна побудувати методом сфер.

Проведений аналіз проєкцій ліній перетину поверхонь сприятиме підвищенню точності розв'язування задач нарисної геометрії у навчальному процесі та конструкторській практиці.

#### Література

1. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. М.: «Советская наука», 1958. – 270 с.: ил.
2. Червоненко А. П., Каткалова Е. А. Геометрические характеристики проекций линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии: Учеб. пособие. ДонНТУ, Донецк: 2006. -28 с.: ил.