УДК 515.2

ГАЙДАР О.Г., к.т.н.; ХАЛЕЦЬКА О.О. (ДонНТУ)

ЗВ'ЯЗОК ІНВЕРСІЇ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Дано визначення інверсії як кругового геометричного перетворення. Приведені властивості інверсії. Зазначено зв'язок інверсії з іншими поширеними геометричними перетвореннями

В математиці важливу роль грають геометричні перетворення. Геометричним перетворенням називається переходити від будь-якої фігури до іншої так, що другу фігуру можна побудувати якщо задана перша і навпаки. Перетворення здійснюються відповідно якомусь визначеному правилу, по якому вони і відрізняються. До числа найбільш вживаних геометричних перетворень окрім паралельного перенесення, перетворення подібності, повороту фігури, проектування належить також інверсія. Що ж таке інверсія та який зв'язок вона має с другими перетвореннями.

Нехай на площині α дано коло k радіуса r з центром O і відмінна від O точка *A*. Виберемо на напівпрямій OA точку A′ таку, що добуток відрізків OA та OA′ дорівнює квадрату радіуса кола k:

$$OA \cdot OA' = r^2. \qquad (1)$$

Вважатимемо що точки A та A′ симетричні відносно кола k.

Якщо одна з точок A, A′ лежить поза колом k, то інша лежить всередині k, і навпаки; наприклад з нерівності $OA>r$ робимо висновок, враховуючи умову (1), що $OA'<r$. Якщо точка A чи A′ лежить на колі k, то A та A′ співпадають.

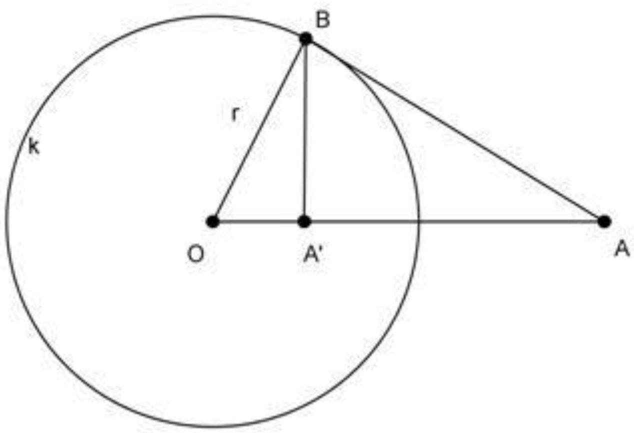


Рис. 1

Розглянемо рис. 1, де AB – дотична до кола k, BA′ – перпендикуляр до OA. Так як OA′ – проекція катета OB прямокутного трикутника OAB на гіпотенузу OA, то

$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

Відповідно, точки A і A′ симетричні відносно k. Звідси стає зрозумілим спосіб побудови точки A′, якщо дана точка A і побудови точки A, якщо дана точка A′.

Розглянемо тепер перетворення площини α, що полягає в наступному: кожні дві точки цієї площини, симетричні відносно кола k, міняються місцями. Таке перетворення називається інверсією, коло k називається колом інверсії, його центр – полюсом інверсії. Якщо інверсія відносно k перетворює фігуру F в фігуру F′, а F′ – симетрична з F відносно кола k.

Зауважимо, що не існує точки, симетричної з полюсом інверсії відносно кола інверсії

З означення інверсії випливають такі її властивості:

1. Кожній точці M площини, крім точки O– центра інверсії, відповідає одна точка M′, також відмінна від точки O. Різним точкам M і N відповідають різні точки M′ і N′.

Цей факт випливає з того, що при зміні положення точки M на промені OM довжина відрізка збільшується або зменшується. Тоді повинна відповідно зменшуватись або збільшуватись і довжина відрізка OM′. Можна сказати, що інверсія є однозначним перетворенням площини, «проколотої» в точці O.

2. Якщо точка M інверсна точці M′, то і точка M′, інверсна точці M відносно того самого кола інверсії. Тому точки M і M′називають взаємно інверсними. Отже, інверсія є взаємно оберненим перетворенням.

3. Фігура F′, утворена з точок, інверсних точкам фігури F, називається інверсною фігурі F. Якщо фігура F′ інверсна фігурі F, то і, навпаки, фігура F інверсна фігурі F′, тобто має місце властивість взаємності.

4. Кожна точка кола інверсії інверсна сама собі (OM=OM′=R). Отже, точки кола інверсії є нерухомими, подвійними.

5. Точки, які лежать усередині кола інверсії, переходять у точки, які лежать зовні кола інверсії. Справді, для внутрішньої точки M $OM<R$, тому, щоб $OM \cdot OM' = R^2$, необхідно щоб $OM'>R$.

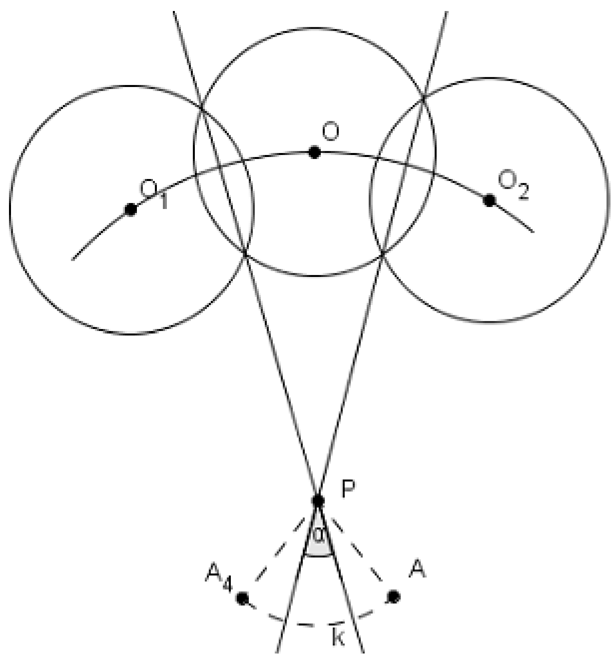
6. Відкритий промінь, що виходить з центра інверсії, переходить при інверсії, сам у себе, при цьому частина променя, що лежить усередині кола інверсії, переходить у його зовнішню частину і навпаки.

7. Пряма, що проходить через центр інверсії і проколота в ньому, перетворюється в себе.

8. Якщо точка, що лежить усередині кола інверсії, необмежено наближається до центра інверсії (довжина OM прямує до 0), то інверсна їй точка необмежено віддаляється від кола інверсії, і навпаки.

Зазначимо зв'язок інверсії з другими перетвореннями

Інверсії і обертання. Відомо, що послідовність симетрій відносно двох осей (прямих), які перетинаються під кутом α, можна замінити обертанням навколо точки перетину осей на кут 2α, а зв'язок між інверсією і осьовою симетрією дає можливість стверджувати, що послідовність чотирьох інверсій еквівалентна обертанню. Справді, побудуємо кола K, K_1 і K_2 так, щоб останні два проходили через центр O кола K.



Нехай радикальні осі кіл K, K_1 і K, K_2 перетинаються в точці P і утворюють кут α. Нехай також інверсія відносно кола K, перетворює точку A в точку A_1, а інверсія відносно кола K_1 перетворює A_1 в A_2, інверсія відносно кола K_2 перетворює A_2 в A_3 і, нарешті, інверсія відносно кола

К перетворює точку A_3 в точку A_4. Тоді кола K_1 і K_2 будуть відповідно інверсні радикальним осям, а точки, інверсні відносно кіл, будуть симетричними відносно радикальних осей, тобто відносно двох осей симетрії.

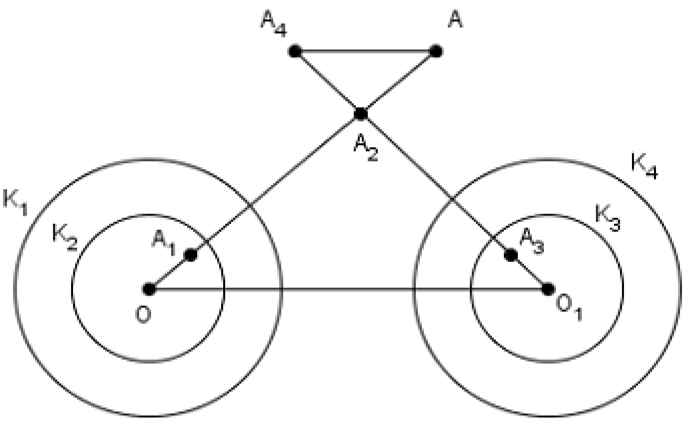
Зазначимо, що інверсія має більш загальний характер порівняно з гомотетією і рухами, бо кожне з цих перетворень можна одержати як результат композиції декількох інверсій, тоді як інверсію не можна дістати як композицію гомотетій і рухів (бо композиція гомотетій і рухів завжди пряму відображає на пряму і не може пряму перетворювати в коло).

Інверсія і паралельне перенесення. Відомо, що паралельне перенесення можна одержати внаслідок двох послідовних симетрій відносно двох паралельних осей. Крім того, паралельне перенесення можна розглядати як граничний випадок гомотетії.

Розглядаючи зв'язок між інверсією і гомотетією, ми припускали, що кола K_1 і K_2 не мали спільної точки. Нехай тепер K_1 і K_2 мають спільну точку, наприклад точку зовнішнього дотику, нехай точка А інверсна точці A_1 відносно кола K_1, а A_2 - інверсна А відносно K_2.

Виберемо спільну точку K_1 і K_2 за полюс інверсії з довільним степенем. Кола K_1 і K_2 перетворяться в дві паралельні прямі, інверсні колам K_1 і K_2, а точки А, A_1 і A_2, А – в точки A', A'_1 і A'_2, A', симетричні відносно утворених в результаті інверсії прямих. Оскільки точки A_1 і A'_2 одержуються одна з одної за допомогою двох осьових симетрій, то вони лежать на спільному до цих прямих перпендикулярі.

Доведемо тепер, що послідовність чотирьох інверсій переміщує кожну точку площини, яка визначається колами інверсії, паралельно до лінії центрів.



Для доведення припустимо, що нам дано коло K_1 і K_2 з радіусами r_1, r_2 і спільним центром О та кола K_3 і K_4 з радіусами r_3, r_4 і спільним центром O_1.

Нехай інверсія відносно K_1 перетворює точку А в A_1, інверсія відносно K_2 перетворює точку A_1 в A_2, інверсія відносно K_3 перетворює A_2 в A_3 і, нарешті, інверсія відносно K_4 перетворює A_3 в A_4. З рівностей

$$OA \cdot OA' = r_1^2,\ OA' \cdot OA'' = r_2^2,\ \frac{OA}{OA''} = \frac{r_1^2}{r_2^2};$$

$$OB \cdot OB' = r_1^2,\ OB' \cdot OB'' = r_2^2,\ \frac{OB}{OB'} = \frac{r_1^2}{r_2^2};$$

$$\frac{OA}{OA''} = \frac{OB}{OA''} = \frac{AB}{A''B''} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Дістаємо

$$\frac{OA}{OA_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2},\ \frac{O_1A_2}{O_1A_4}=\frac{r_2^2}{r_1^2},$$

звідки

$$\frac{AA_2}{OA_2}=\frac{A_4A_2}{O_1A_2}=\frac{\left|r_1^2-r_2^2\right|}{r_2^2}=k,$$

де k — коефіцієнт гомотетії.

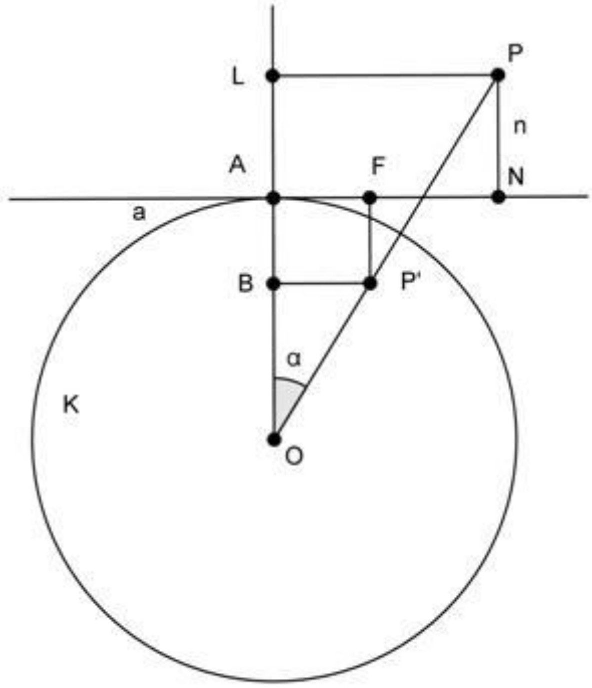
Отже, трикутники OA_2O_1, AA_2A_4 подібні, а відрізок AA_4 паралельний відрізку $O_1O=d$ і дорівнює $d\cdot\frac{\left|r_1^2-r_2^2\right|}{r_2^2}$.

Цей вираз підтверджує той факт, що внаслідок чотирьох інверсій точки площини переміщуються паралельно лінії центрів на відстань

$$d\cdot\frac{\left|r_1^2-r_2^2\right|}{r_2^2};$$

причому, якщо останній вираз додатний, то переміщення відбувається в напрямі від O_1 до O, а якщо цей вираз від'ємний, то переміщення відбувається в напрямі від O до O_1.

Інверсія і осьова симетрія



Відомо, що осьову симетрію можна розглядати як дзеркальне відображення. Це означає, що будь-які фігури, симетричні відносно осі, можна розглядати як два різних положення на площині тієї самої фігури. Для суміщення симетричних фігур потрібно повернути одну з фігур на 180° навколо осі симетрії. Інверсію називають круговим відображенням внаслідок схожості її з відображенням у сферичному дзеркалі. Інакше кажучи, при інверсії фігура в певному розумінні також перевертається, але відносно кола, а не осі, як це було при симетрії. Можна сказати, що в граничному випадку, коли коло інверсії перетворюється в пряму (як коло нескінченно великого радіуса), то інверсія перетворюється в осьову симетрію. Це можна довести такими міркуваннями.

Нехай коло інверсії K(O;R) проходить через точку A, тобто OA=R. Проведемо через точку Aдотичну до кола K. Візьмемо довільну точку P, їй інверсною відносно кола Kє точка P′.

Уявимо, що центр Окола інверсії нескінченно віддаляється від точки А вздовж променя АО, так що радіус кола інверсії нескінченно збільшується. При цьому коло K(O;R) як завгодно близько наближається до прямої α, «вироджується в пряму α». Виявляється, що при цьому точка P´буде переміщуватись на площині, як завгодно близько наближаючись до точки P_1, симетричної точці Р відносно прямої α. Спробуємо це довести.

Нехай точка Р і точка О лежать по різні боки від прямої α. Опустимо з точки Р перпендикуляр PN на пряму α і перпендикуляр PL на пряму OA. Нехай PN=n, PL=m. З точки P´, інверсної точці Р відносно кола K´(O;R), також опустимо перпендикуляри P´F на пряму α і P´B на пряму OA.

Треба довести, що P´F за величиною наближається до n, а P´B– до m, якщо радіус R стає нескінченно великим.

Справді,

$$P'F = BA = R - OP'\cdot\cos\alpha = R - \frac{R^2\cdot\cos\alpha}{OP\cdot\cos\alpha} = R - \frac{R^2\cdot\cos^2\alpha}{R+n} = \frac{nR+R^2\cdot\sin^2\alpha}{R+n}$$

.Але $tg\,\alpha = \dfrac{m}{R+n}$, тому

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{R+n}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{m^2+(R+n)^2}.$$

Отже,

$$P'F = \frac{nR+\dfrac{R^2m^2}{m^2+(R+n)^2}}{R+n} = \frac{n+\dfrac{m^2}{\left(\dfrac{m^2}{R^2}+\left(1+\dfrac{n}{R}\right)^2\right)\cdot R}}{1+\dfrac{n}{R}}.$$

Звідси видно, що P´F наближається до n, якщо R→∞.

З іншого боку,

$$P'B = OP\cdot\sin\alpha = \frac{R^2\cdot\sin^2\alpha}{OP\cdot\sin\alpha} = \frac{m^2}{m^2+(R+n)^2}\cdot\frac{R^2}{m} = \frac{m}{\dfrac{m^2}{R^2}+\left(1+\dfrac{n}{R}\right)^2}.$$

Звідси маємо, що P´B наближається до m, якщо R→∞.

Отже, осьову симетрію можна розглядати як окремий випадок інверсії відносно кола нескінченно великого радіуса, тобто коли коло інверсії перетворюється в пряму.

Перелік літератури:

1. Жижилкин И. Д. Инверсия.—М.: Изд-во МЦНМО, 2009.—72 с.
2. Р.Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?—3-е изд., испр. и доп.—М.: МЦНМО, 2001.—568 с.
3. Заславский А.А. Геометрические преобразования.—М.:МЦНМО, 2004.—86 с.