УДК 515.2

ГАРМАШ Н.С., к.т.н. (ДонНТУ)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ОБРАЗУЮЩИХ ОТСЕКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Розглядається визначення довжин твірних відсіку гіперболічного параболоїда, заданого в плані довільним контуром.

В практике архитектурного проектирования широкое распространение получили поверхности второго порядка, в частности, гиперболический параболоид [1, 2]. При этом возникает необходимость определения длин стержней арматуры, тросов, брусьев, сварных швов, расположенных по прямолинейным образующим.

Поэтому представляется интересным определение длин образующих отсека гиперболического параболоида, заданного в плане произвольным контуром. Этот контур может быть вписан в некоторый пространственный четырехугольник ABCD: состоящий из отрезков, образующих двух семейств.

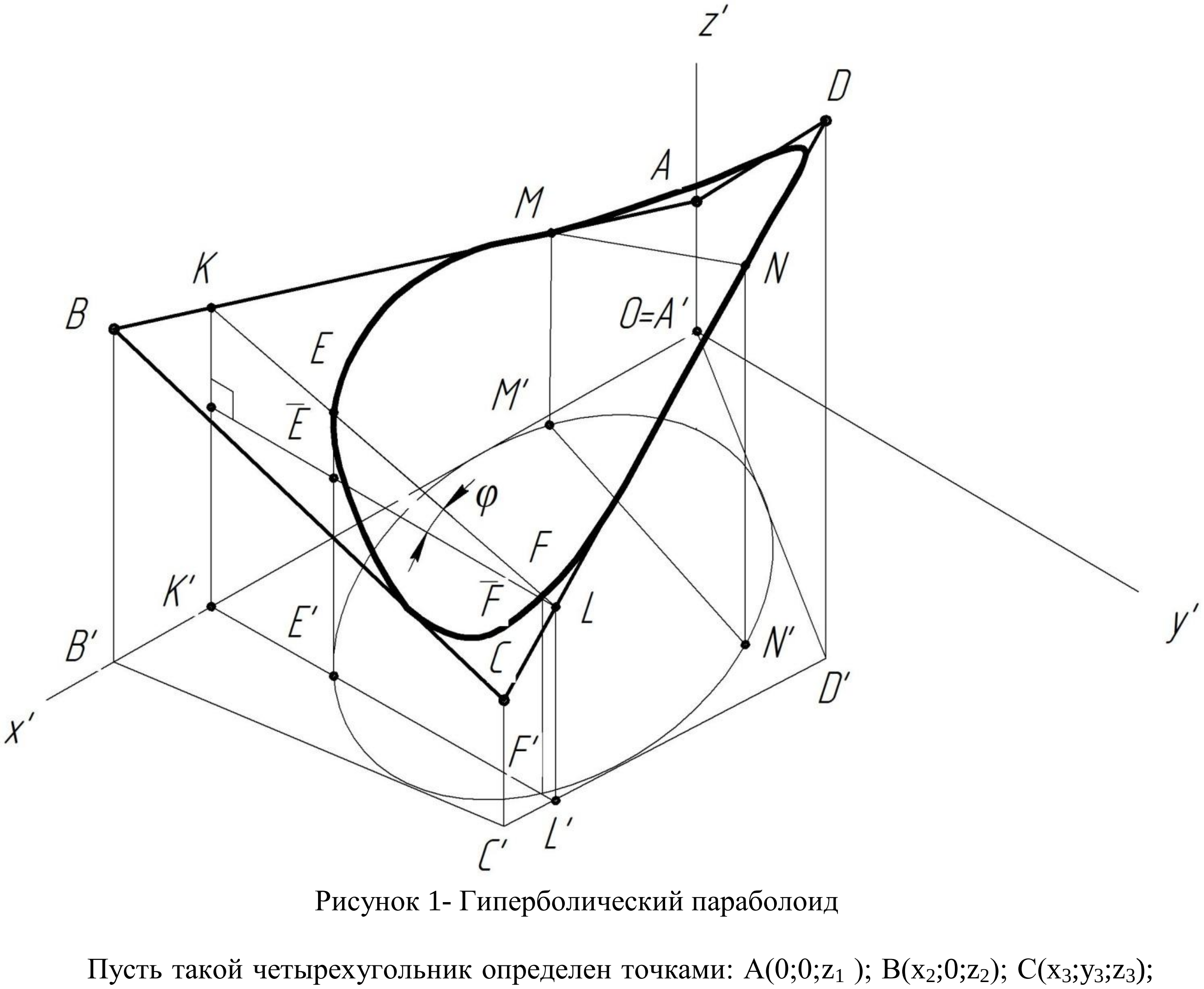

Рисунок 1- Гиперболический параболоид

Пусть такой четырехугольник определен точками: $A(0;0;z_1)$; $B(x_2;0;z_2)$; $C(x_3;y_3;z_3)$; $D(x_4;y_4;z_4)$.

Натуральная величина отрезка образующей EF равна

$$EF = \frac{\bar{E}\bar{F}}{\cos\varphi} \qquad (1)$$

где φ -угол наклона образующей к плоскости xOy , т.е. к заданному плану.

$$\bar{E}\bar{F} = E'F' = \sqrt{(x_{E'} - x_{F'})^2 + (y_{E'} - y_{F'})^2} \tag{2}$$

длина отрезка образующей на плане.

Координаты точек $E'(y_{E'}, x_{E'})$ и $F'(x_{F'}, y_{F'})$

определятся как точки пересечения проекции образующей K'L' с заданной кривой в плане.

Определим угол наклона произвольной образующей к плоскости xOy.

Разделим отрезки AB и CD точками K и L в одном и том же отношении λ, в том же отношении разделятся и проекции этих отрезков, т.е A'B' и C'D' .

Подсчитаем координаты точек K и L :

$$K\left(\frac{\lambda x_2}{1+\lambda}; 0; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right) L\left(\frac{x_4 + \lambda x_3}{1+\lambda}; \frac{y_4 + \lambda y_3}{1+\lambda}; \frac{z_4 + \lambda z_3}{1+\lambda}\right)$$

Составим уравнение прямой KL

$$\frac{x(1+\lambda) - \lambda x_2}{x_4 + \lambda(x_3 - x_2)} = \frac{y(1+\lambda)}{y_4 + \lambda y_3} = \frac{z(1+\lambda) - z_1 - \lambda z_2}{z_4 - z_1 + \lambda(z_3 - z_2)}$$

Зная уравнение прямой KL, можно определить угол ее наклона к плоскости xOy из формулы

$$\sin\varphi = \frac{z_4 - z_1 + \lambda(z_3 - z_2)}{\sqrt{[x_4 + \lambda(x_3 - x_2)]^2 + (y_4 + \lambda y_3)^2 + [z_4 - z_1 + \lambda(z_3 - z_2)]^2}}$$

Или отсюда

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \frac{[z_4 - z_1 + \lambda(z_3 - z_2)]^2}{[x_4 + \lambda(x_3 - x_2)]^2 + (y_4 + \lambda y_3)^2}} \tag{3}$$

Значение параметра λ можно определить как

$$\lambda = \frac{m-1}{n-m} \tag{4}$$

где n - число образующих; m =1,2 … ,n-1 – порядковый номер образующей.

Подставляя (4) в порядковый номер m образующей, длину отрезка который определяем, вычислим λ. Для полученного λ из (3) находим величину $\frac{1}{\cos\varphi}$, а, из (2) – величину отрезка образующей в плане. Подставив полученные данные в (1), найдем натуральную величину отрезка образующей.

В случае, если отсек поверхности гиперболического параболоида будет определен только пространственным четырехугольником ABCD , то натуральная величина отрезка образующей MN равна

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} \tag{5}$$

Определяя координаты точек M и N аналогично координатам точек K и L, из (5) получим

$$MN = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{[x_4 + \lambda(x_3 - x_2)]^2 + (y_4 + \lambda y_3)^2 + [z_4 - z_1 + \lambda(z_3 - z_2)]^2} \tag{6}$$

Таким образом, по формуле (1) определяются натуральные величины отрезков образующих гиперболического параболоида, заданного в плане произвольным контуром, а по формуле (6) определяются натуральные величины отрезков образующих гиперболического параболоида, заданного пространственным четырехугольником.

Список литературы

1. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник /В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скідан; За ред. В. Є. Михайленка.– 3-є вид., перероб. і допов. - К.: Видавничий Дім «Слово», 2011. – 352 с.: іл.

2. Фиников С.П. Теория поверхностей /С.П.Фиников –М. : ДомКнига, 2010. - 208 с.