УДК 515.2

КОНСТРУЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ З ДВОМА СІМ'ЯМИПЛОСКИХ ЛІНІЙ КРИВИНИ ОТРИМАНИХ ЗА СФЕРИЧНИМ ВІДОБРАЖЕННЯМ

Скидан І. А., д.т.н.
Фролов О.В., к.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-48-85

Анотація **– розглядаються можливості конструктивного подання поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини на основі параметричних рівнянь отриманих за сферичним відображенням поверхні.**

Ключові слова **– лінії кривини, сферичне відображення поверхні, пучок площин, сітка Боне, цикліда Дюпена.**

Постановка проблеми. Клас поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини є класом з відомими загальними властивостями та конструктивними моделями.

Удосконалення існуючих моделей в напрямку розвитку засобів конструювання поверхонь складає проблему, що досліджується.

Аналіз останніх досліджень. Для поверхонь, що мають плоскі лінії кривини, відомі дві схеми формоутворення [1]:

1) Конструктивна схема Дарбу, за якою шукана поверхня отримується як обвідна двохпараметричної множини радикальних площин сфер із центрами на двох фокальних кривих другого порядку;

2) Конструктивна схема, заснована на тангенціальних рівняннях, отриманих за сферичним відображенням поверхонь у вигляді сітки Боне.

Конструюванню поверхонь за першою схемою присвячена роботи [2, 3],в яких були визначені тангенціальні та параметричні рівняння поверхонь для різних випадків фокальних ліній.

Друга конструктивна схема, якій присвячена й дана робота, була досліджена в [4]. Розглянемо детальніше результати цієї роботи. Скориставшись положенням про те, що плоским лініям кривини у сферичному відображені відповідає сітка Боне кіл, в [4] були отримані рівняння одиничної сфери для трьох різних випадків розташування на неї двох кіл, що є визначником зазначеної сітки. На основі цих криволінійних координат було знайдемо тангенціальні та параметричні рівняння поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини, що відповідають трьом можливим випадкам сітки Боне на сфері.

Наведемо рівняння сфери у координатах сітки Боне для найбільш складного випадку, коли цю сітку складають кола, що належать до двох пучків площин із ортогональними мимобіжними осями:

$$x = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{ch\, v + e\cos u}, y = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sh}\, v}{ch\, v + e\cos u}, z = \frac{\cos u + e\, ch\, v}{ch\, v + e\cos u}, \quad (1)$$

де: e–відстань від центра сфери до осі пучка площин кіл з дійсними точками перетину ($0<e<1$, друга ортогональна до неї та знаходиться на відстані $1/e$).

Відповідне (1) тангенціальне рівняння класу поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини [4]:

$$x\sqrt{1-e^2}\sin u - y\sqrt{1-e^2} sh\, v + z(\cos u + ech\, v) = f + \varphi, \quad (2)$$

де: $f = f(u)$ та $\varphi = \varphi(v)$.

Щоб перейти від тангенціального рівняння до параметричних рівнянь поверхні в [3] скористалися алгоритмом, який був запропонований в [2]. Згідно із цим алгоритмом рівняння (2) потрібно продиференціювати по u та v.Таким чином, були отримані рівняння

$$x\sqrt{1-e^2}\cos u - z\sin u = \acute{f} \quad (3)$$

та

$$-y\sqrt{1-e^2} ch\, v + zesh\, v = \acute{\varphi}. \quad (4)$$

де: $\acute{f} = \frac{df}{du}, \acute{\varphi} = \frac{d\varphi}{dv}$ - похідні від функцій f та φ.

Розв'язок системи рівнянь (2), (3), (4) відносно x, y, z дає параметричні рівняння поверхні з двома сім'ями плоских ліній кривини:

$$x = \frac{(f+\varphi)\sin u\,\mathrm{ch}\, v + \acute{f}\,(\cos u\,\mathrm{ch}\, v + e) - \acute{\varphi}\sin u\,\mathrm{sh}\, v}{\sqrt{1-e^2}(\mathrm{ch}\, v + e\cos u)},$$

$$y = \frac{(f+\varphi)\, e\cos u\,\mathrm{sh}\, v - \acute{f}\;\, e\sin u\,\mathrm{sh}\, v - \acute{\varphi}\,(e\cos u\,\mathrm{ch}\, v + 1)}{\sqrt{1-e^2}(\mathrm{ch}\, v + e\cos u)}, \quad (5)$$

$$z = \frac{(f+\varphi)\cos u\,\mathrm{ch}\, v - \acute{f}\sin u\,\mathrm{ch}\, v - \acute{\varphi}\cos u\,\mathrm{sh}\, v}{\mathrm{ch}\, v + e\cos u}.$$

Таким чином, поверхня здвома сім'ями плоских ліній кривини визначається рівняннями (5) з довільністю обрання двох функцій однієї змінної -f та φ, які внутрішньо подають поверхню в (5). У [4] наведено декілька прикладів подання поверхонь функціями $f = f(u)$та $\varphi=\varphi(v)$ з візуалізацією результатів.

Формулювання цілей статті. Запропонувати нові конструктивні засоби подання поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини за загальними рівняннями класу, отриманими за сферичним відображенням.

Основна частина. Звернемо увагу на рівняння (3) та (4), які були отримані диференціюванням тангенціального рівняння. Безпосередньою перевірка доводить, що ці рівняння за геометричним змістом є рівняннями двох сімей площин, у яких знаходяться лінії кривини поверхні. Так, до рівняння (3) можливо прийти визначивши стичні площини ліній *u=const* поверхні (5). Як бачимо, площини сім'ї (3) не залежать від параметра *v* (що вказує на те, що лінії *u=const* плоскі) та паралельні до осі *Oy*. Аналогічно, рівняння (4) визначає сім'ю площин ліній *v=const*, що паралельні до осі *Ox*. До рівнянь (3) та (4) входять тільки похідні функцій f та φ, які відіграють роль вільного члена в рівнянні площини та визначають сім'ї площин ліній *u=const* та *v=const*. Таким чином, подання двох сімей площин поверхні з плоскими лініями кривини визначає цю поверхню з довільністю обрання двох сталих інтегрування.

Нехай, відомі функції похідних $\acute{f} = \acute{f}(u)$та $\acute{\varphi} = \acute{\varphi}(v)$, що визначають сім'ї площин у рівняннях (3) та (4). Тоді відповідні ним функції f та φ, які входять до (5), отримуємо з рівнянь

$$f = \int \acute{f}(u)du + f_0,$$

$$\varphi = \int \acute{\varphi}(v)\, dv + \varphi_0. \tag{6}$$

де: f_0 та φ_0 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Розглянемо конкретні приклади, які демонструють можливості конструктивного подання сімей площин (3) та (4) та отримання на їх основі поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини.

Отримаємо рівняння сімей площин для випадку, коли вони утворюють два пучка площин з осями паралельними *Oy* та *Ox*. Нехай проекцією осі першого пучка буде точка M $(x_M, 0, z_M)$, а проекцією осі другого – точка N $(0, y_N, z_N)$.

Рівняння першого пучка запишемо у вигляді:

$$z = \lambda\, (x - x_M) + z_M, \tag{7}$$

де: λ – параметр пучка (кутовий коефіцієнт), може бути отриманий із рівності [1]:

$$\lambda = \sqrt{1-e^2}\, \mathrm{ctg}(u). \tag{8}$$

Підставляючи (8) до (7) та порівнюючи з рівнянням (3) будемо мати

$$\acute{f} = x_M\sqrt{1-e^2}\cos u - z_M\, \sin u. \tag{9}$$

Із першого з рівнянь (6) отримаємо

$$f = x_M\sqrt{1-e^2}\sin u + z_M\cos u + f_0. \tag{10}$$

Рівняння другого пучка площин

$$z = \mu\, (y - y_N) + z_N, \tag{11}$$

де: μ – параметр другого пучка, може бути отриманий [1]:

$$\mu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\, \mathrm{cth}\, v. \tag{12}$$

Із (11), (12) та (4) маємо

$$\acute{\varphi} = z_N\, e\, \mathrm{sh}\, v - y_N\sqrt{1-e^2}\mathrm{ch}v. \tag{13}$$

Функцію φ отримуємо з другого рівняння (6):

$$\varphi = z_N\, e\, \mathrm{ch}\, v - y_N\sqrt{1-e^2}\mathrm{sh}\, v + \varphi_0\,. \tag{14}$$

Підставляючи f та$\acute{f}$ із (9) та (10), а також φ та $\acute{\varphi}$ із (14) та (13) до параметричних рівнянь (5) отримаємо поверхню. Зауважимо, що ця поверхня відноситься до класу циклід Дюпена, обидві сім'ї ліній кривини якої складаються із кіл. Оскільки, в кожній площині пучків (7), (11), яка перетинає поверхню циклiди, розташуються по два кола кривини отримання поверхні за рівняннями (5) можливе за рахунок зміни параметра u від 0 до 2π та зміни знаку перед сталими f_0 та φ_0. Отже, побудова циклiди за рівняннями (5), (10), (14) складається з двох частин: перша частинаотримується підстановкою рівнянь (10) та (14), а друга за рахунок зміни цих рівнянь на

$$f = x_M\sqrt{1-e^2}\sin u + z_M\cos u - f_0,$$
$$\varphi = z_N\, e\, \mathrm{ch}\, v - y_N\sqrt{1-e^2}\mathrm{sh}\, v - \varphi_0$$

відповідно. Межі зміни параметра v в рівняннях визначаються з умов дотику площини пучка (11) до поверхні циклiди.

На рис. 1 наведена побудована за отриманими рівняннями циклiда Дюпена. При цьому згадана перша частина поверхні на рисунку зображена сірим кольором, а друга частина - білим.

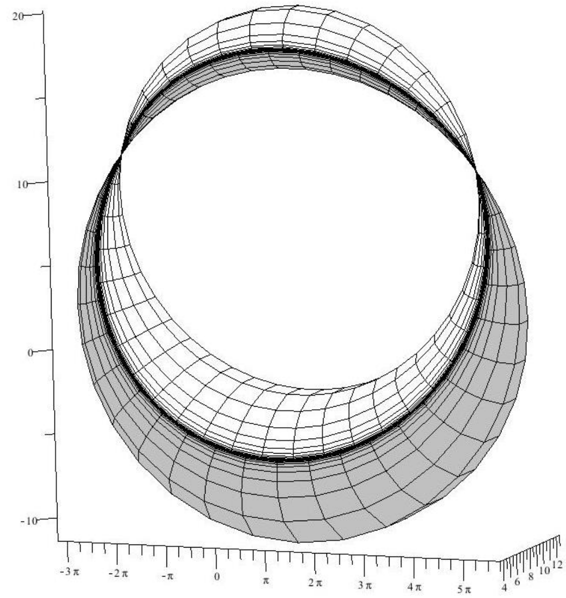

Рис. 1 ЦиклідаДюпена побудована за рівняннями (5), (10) та (14) при $x_M=4$, $z_M=6$, $y_N=8$, $z_N=11$, $f_0=2$, $\varphi_0=10$,$e=0.25$.

Перейдемо до розгляду наступного прикладу. При цьому зауважимо, що конструктивне подання сімей площин поверхні (5) можливо здійснити за допомогою двох напрямних циліндричних поверхонь, які деяким чином пов'язані з двома сім'ями площин. Оскільки сім'ї (3) та

(4) відповідно перпендикулярні до координатних площин *xOz* та *yOz*, згадані циліндричні поверхні проектуються на ці площини у вигляді двох напрямних ліній.

Нехай першу сім'ю площин поверхні (5) визначає циліндрична поверхня, до якої площини сім'ї є дотичними. Площини шуканої сім'ї будуть зображені на площині *xOz* у вигляді дотичних до напрямної лінії циліндра. При параметричному поданні напрямної у вигляді

$$x = x(t), z = z(t),$$

рівняння дотичних до неї:

$$z = \frac{\acute{z}(t)}{\acute{x}(t)}\left(x - x(t)\right) + z(t),$$

де: $\acute{z}\ (t)$та $\acute{x}\ (t)$ – похідні функцій рівнянь напрямної лінії.
Візьмемо в якості напрямної лінії – еліпс із параметричними рівняннями:

$$x = \mathrm{a}\cos t + x_0, \qquad z = b\sin t\,.$$

В цьому випадку рівняння сім'ї дотичних набуває вигляду

$$z = \ -\frac{b}{a}\ \mathrm{ctg}\, t\ (x - a\cos t - x_0) + b\sin t. \tag{15}$$

Порівнюючи кутовий коефіцієнт із виразом (8) будемо мати

$$-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\, t = \sqrt{1 - e^2}\ \mathrm{ctg}\, u.$$

Для спрощення подальшого розв'язку покладемо

$$b = \sqrt{1 - e^2}\ a.$$

Тоді зв'язок між параметрами *t*та*u* набуває вигляду

$$t = \pi - u. \tag{16}$$

Щоб отримати вираз функції $\acute{f}$ підставимо вираз (16) до (15) та покладемо в останньому рівнянні*z=0*. Записавши це рівняння відносно *x*, порівняємо з рівнянням (3) розв'язаним аналогічним чином. Будемо мати

$$\acute{f} = -b + x_0\sqrt{1 - e^2}\cos u.$$

Інтегруючи останнє рівняння будемо мати

$$f = -b\, u + x_o\sqrt{1 - e^2}\sin u + f_0. \tag{17}$$

Другу сім'ю площин поверхні (5)буде визначати сім'я площин, які утворюють нормалі до циліндричної поверхні уздовж її прямолінійної твірної. Оскільки твірні циліндра у другому випадку перпендикулярні до площини *xOz*, сім'я площин буде зображена на цій координатній площині у вигляді нормалей до плоскої ліній.

Нехай цією лінією буде гіпербола з параметричними рівняннями:

$$y = c\ \mathrm{sh}\, t, z = d\ \mathrm{ch}\, t.$$

В цьому випадку рівняння нормалей до плоскої лінії

$$z = \frac{\acute{y}(t)}{\acute{z}(t)}\left(x - x(t)\right) + z(t),$$

перетвориться на

$$z = \frac{c}{d}\operatorname{cth} t\,(x - c\operatorname{sh} t) + d\operatorname{ch} t.$$

Поклавши для спрощення

$$\mathrm{c} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}\,d,$$

отримаємо згідно з(12) $t{=}v$. Тоді вирази $\acute{\varphi}$та φ набувають вигляду

$$\acute{\varphi} = \frac{d^2 - c^2}{2c}\sqrt{1 - e^2}\operatorname{sh} 2v,$$

$$\varphi = \frac{d^2 - c^2}{4c}\sqrt{1 - e^2}ch2v + \varphi_0. \qquad (18)$$

Підставляючи вирази функції (17) та (18) до параметричних рівнянь (5) отримаємо поверхню з двома сім'ями плоских ліній кривини, яка відповідає заданим умовам. На рис. 2 представлено проекції отриманої поверхні на площини *xOz* та *yOz* разом з напрямними лініями, а також довільне наочне зображення поверхні.

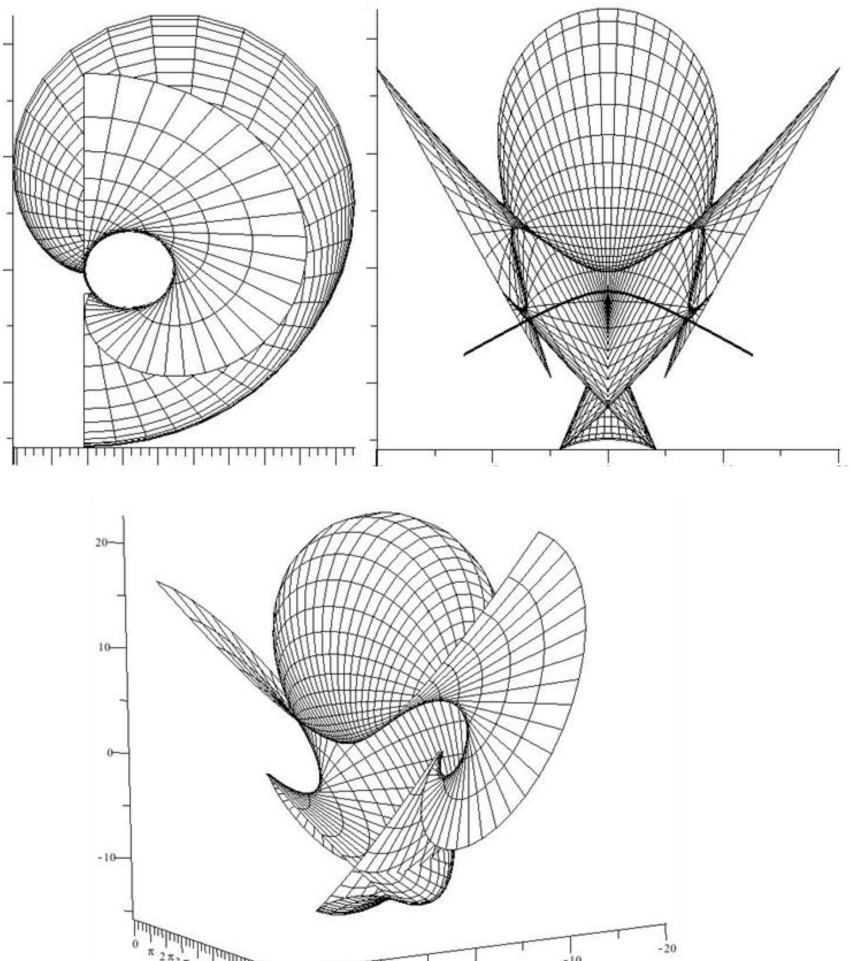

Рис. 2 Поверхня з двома сім'ями плоских ліній кривини побудована за рівняннями (5), (17) та (18) при *a=4, d=2, e=0.5,* $0 \le u \le 2\pi$, $-2 \le v \le 2$.

Висновки. В роботі був запропонований спосіб конструктивного визначення поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини на основі подання двох сімей площин, який дозволяє значно розширити межи застосувань отриманих раніше моделей.

Література

1. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: Гос. изд. физ.- мат. лит., 1963 – 540 с.
2. Скидан І. А., Гайдар О. Г. Шляхи застосування тангенціальних координат у прикладній геометрії // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2000. – Вип. 4 Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 11. – С. 31-38.
3. Гайдар О.Г. Дослідження поверхонь з двома сім`ями плоских ліній кривини засобами комп'ютерної графіки // Зб. праць міжнар. наук. практ. конф. "Сучасні проблеми геометричного моделювання" – Харків, 2001. – С. 152-154.
4. Скидан І. А., Шепелєв В. В. Побудова поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини за сферичним відображенням // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2002. – Вип. 4 Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 17. – С. 91-95.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ ПЛОСКИХ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ СФЕРИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

И. А. Скидан, О. В. Фролов

Аннотация – рассматриваются способы конструктивного задания поверхностей с двумя семействами плоских линий кривизны

CONSTRUCTION OF SURFACES WITH TWO FAMILIES OF PLANE CURVATURE LINES RECEIVED ON THE BASIS OF SPHERICAL REPRESENTATION

I. Skidan, O. Froloff

Summary

The possibilities of a constructive determination of surfaces with two families of flat curvature lines on the basis of the surface parametrical equations received on spherical display are considered.

Скидан І. А. Побудова поверхонь з двома сім’ями плоских ліній кривини за сферичним відображенням/ *І. А Скидан, О. В. Фролов* // Праці Таврійського державного агротехнічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Вип. 4 Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 56. – С. 214-220.