

О ДИНАМИКЕ, СТАТИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ И СРЕДНЕГЕОМЕТРИЧЕСКОМ КОРНЕ В ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЕ С МОДАЛЬНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Акимов Л.В., Марван Мухаммад Хаммуд (Lebanon)

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
klepikov@kpi.kharkov.ua

For a modal control system with a two-mass electromechanical object state observer, choice of geometric mean root is substantiated, the choice bringing about, for required quality of transient processes, absence of static error and a wide range of elastic linkage rigidity change by not less than six along with the mechanism inertia moment change by more than forty.

Интенсификация производства, которой характеризовались 1950 – 1990 годы, требовала повышенного быстродействия электропривода. При этом частота, определяющая быстродействие автоматизированной системы управления, оказывалась соизмеримой с частотой собственных упругих колебаний механизма. Это привело к необходимости при анализе и синтезе систем учитывать упругость, чтобы избежать ошибочных результатов при создании электроприводов, так как известно [1,2], что чем выше быстродействие системы управления, тем больше вероятность влияния упругости кинематических звеньев на ее работу.

В настоящее время ситуация существенным образом изменилась. Темпы производства объективно снижены. Они стали зависеть, главным образом, от рынка, т.е. спроса на продукцию. В этих условиях возможен несколько иной подход к выбору быстродействия системы. Суть этого подхода заключается в том, чтобы за счет его рационального снижения уменьшить проявление упругости кинематики электропривода, добившись при этом увеличения его точностных показателей, связанных с уменьшением статических и динамических ошибок, и расширения области возможных отклонений параметров электроприводов от принятых при расчете.

Целью исследования является анализ точностных характеристик и быстродействия системы модального управления (СМУ) с наблюдателем состояния (НС) полного порядка двухмассовым электромеханическим объектом (ДЭМО), структурная схема которой показана на рис.1.

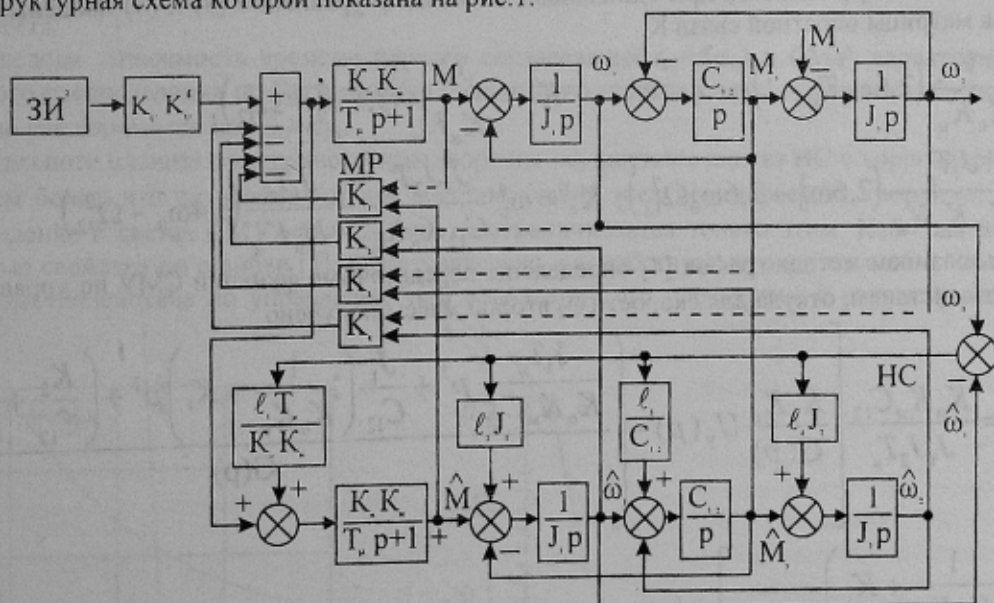


Рисунок 1 – Структурная схема системы модального управления ДЭМО с наблюдателем состояния полного порядка

Можно видеть, что в данном случае использован НС с коррекцией по скорости первой массы (двигателя), так как данный вариант является более предпочтительным в силу традиционного подключения измерителя скорости.

Силовая часть системы рис.1 описывается в пространстве состояний дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = \frac{1}{T_\mu} M + \frac{K_a K_m}{T_\mu} U_y; & \frac{dM_{12}}{dt} = C_{12} \omega_1 - C_{12} \omega_2; \\ \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1} M - \frac{1}{J_1} M_{12}; & \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2} M_{12} - \frac{1}{J_2} M_c \end{cases} \quad (1)$$

и имеет вектор состояния $X = [M \quad \omega_1 \quad M_{12} \quad \omega_2]^T$, выхода $C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$, а также матрицы состояния A ,

управления B_u и возмущения B_m вида:

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 & -\frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & -C_{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{vmatrix}; B_u = \begin{vmatrix} K_u = \frac{K_\alpha K_M}{T_\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; B_m = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_2} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

При условии полной управляемости $\text{Rang}Q_u = n = 4$ и наблюдаемости $\text{Rang}Q_m = n = 4$ силовой части рис.1, для определения коэффициентов модальной обратной связи $K = |K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4|$ вычислим характеристический полином замкнутой по вектору состояния системы

$$G(p) = \det(pI - A + BK) = p^4 + p^3 \frac{1 + K_\alpha K_M K_1}{T_\mu} + p^2 \left(\Omega_{12}^2 + \frac{K_\alpha K_M K_2}{J_1 T_\mu} \right) + p \left(\Omega_{12}^2 \frac{1 + K_\alpha K_M K_1}{T_\mu} + \frac{C_{12} K_\alpha K_M K_3}{J_1 T_\mu} \right) + \frac{C_{12} K_\alpha K_M}{J_1 J_2 T_\mu} (K_2 + K_4), \quad (3)$$

где $\Omega_{12} = \sqrt{C_{12} \gamma / J_2}$ - собственная частота упругих колебаний, с^{-1} .

Придадим системе желаемые (ж) динамические свойства, соответствующие фильтру Баттерворта четвертого порядка

$$G(p)_{\text{ж}} = p^4 + 2,6\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,6\omega_0^3 p + \omega_0^4, \quad (4)$$

где ω_0 (с^{-1}) - среднегеометрический корень, рациональному выбору которого в литературе уделено недостаточно внимания, хотя известно, что он является мерой быстродействия системы [3].

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях p уравнений (3) и (4) найдены зависимости для коэффициентов матрицы обратной связи K :

$$K_1 = \frac{1}{K_\alpha K_M} (2,6\omega_0 T_\mu - 1); \quad K_2 = \frac{J_1 T_\mu}{K_\alpha K_M} (3,4\omega_0^2 - \Omega_{12}^2); \\ K_3 = \frac{J_1 T_\mu}{C_{12} K_\alpha K_M} (2,6\omega_0^3 - 2,6\omega_0 \Omega_{12}^2); \quad K_4 = \omega_0^4 \frac{J_1 J_2 T_\mu}{C_{12} K_\alpha K_M} - \frac{J_1 T_\mu}{K_\alpha K_M} (3,4\omega_0^2 - \Omega_{12}^2). \quad (5)$$

С использованием метода графов [4] определены передаточные функции СМУ по управляющему и возмущающему воздействиям, откуда для скорости ω_2 второй массы получено

$$\omega_2(p) = \frac{K_\alpha K_M C_{12}}{J_1 J_2 T_\mu} \left[\frac{K_u K'_u}{G(p)} U_y(p) - \left(\frac{J_1 T_\mu}{K_\alpha K_M C_{12}} p^3 + \frac{J_1}{C_{12}} \left(\frac{1}{K_\alpha K_M} + K_1 \right) p^2 + \left(\frac{K_2}{C_{12}} + \frac{T_\mu}{K_\alpha K_M} \right) p + \frac{K_3 + \frac{1}{K_\alpha K_M} + K_1}{G(p)} \right) M_c(p) \right], \quad (6)$$

где $G(p)$ - найденный ранее, характеристический полином (3);

$K'_u = \omega_n (K_2 + K_4) / K_u U_{\text{зс}}$ - коэффициент приведения задающего воздействия в СМУ к аналогичной величине $U_{\text{зс}}$ в СПР, имеющий номинальную скорость вращения двигателя ω_n , с^{-1} .

Исходя из (6), для статической ошибки в СМУ будем иметь выражение

$$\Delta\omega_{\text{ст}} = - \frac{K_3 + \frac{1}{K_\alpha K_M} + K_1}{K_2 + K_4} M_c, \quad (7)$$

которое после подстановки значений коэффициентов матрицы К (5) приобретает вид

$$\Delta\omega_{ст} = -\frac{2,6}{J_2\omega_0^3} \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega_{12}^2}{\gamma} \right) M_c, \quad (8)$$

где $\gamma = (J_1 + J_2)/J_1$ – коэффициент соотношения масс.

Из (8) можно видеть, что статическая ошибка $\Delta\omega_{ст}$, как и быстродействие СМУ, определяется величиной среднегеометрического корня ω_0 .

Проведем анализ статических ошибок, включая их характерные значения. Возможны следующие значения ошибок при соответствующей величине среднегеометрического корня ω_0 :

$$1. \omega_0 \gg \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{C_{12}}{J_2}} \quad \Delta\omega_{ст.1} = -\frac{2,6}{J_2\omega_0} M_c; \quad (9)$$

$$2. \omega_0 = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\gamma}} \quad \Delta\omega_{ст.2} = -\frac{2,6}{J_2\Omega_{12}} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} M_c; \quad (10)$$

$$3. \omega_0 = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\gamma}} \quad \Delta\omega_{ст.3} = 0; \quad (11)$$

$$4. \omega_0 < \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\gamma}} \quad \Delta\omega_{ст.4} = \frac{2,6}{J_2\omega_0^3} \left(\frac{\Omega_{12}^2}{\gamma} - \omega_0^2 \right) \cdot M_c; \quad (12)$$

$$5. \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{\gamma}} \Omega_{12} \quad \Delta\omega_{ст.5} = \Delta\omega_{ст.макс} = -\frac{1}{\sqrt{J_2 C_{12}}} M_c. \quad (13)$$

Дополним полученные результаты зависимостью $\Delta\omega_{ст} = f(\omega_0)$, приведенной на рис.2. Можно видеть, что она имеет экстремум статической ошибки $\Delta\omega_{ст.макс}$, причем ее величина (13) не зависит от γ . При $\omega_0 > \omega_{05}$ и $\omega_0 < \omega_{05}$ величина статической ошибки уменьшается. С точки зрения работы СМУ следует отдать предпочтение среднегеометрическому корню, лежащему в пределах $0 < \omega_0 < \omega_{05}$, где находится его значение ω_{03} , при котором $\Delta\omega_{ст} = 0$ (11).

На рис.3 приведена зависимость времени первого согласования $t_{01} = f(\omega_0)$ в СМУ, характерная для выбранного стандартного распределения по Баттерворту. Здесь можно прийти к заключению, что быстродействие системы существенно увеличивается при $\omega_0 > \omega_{03}$.

Для более детального анализа отмеченного противоречия осуществим синтез НС с коррекцией по скорости двигателя ω_1 , тем более, что он необходим для восстановления трех неизмеряемых координат ДЭМО М, M_{12} , ω_2 . Однако, введение в состав СМУ наблюдателя не ограничивается только этим. Наблюдатель придает системе итерационные свойства по ошибке [5], а следовательно, способствует их значительному снижению, не влияя при этом на быстродействие по управлению при совпадении его параметров с параметрами исходной системы [6].

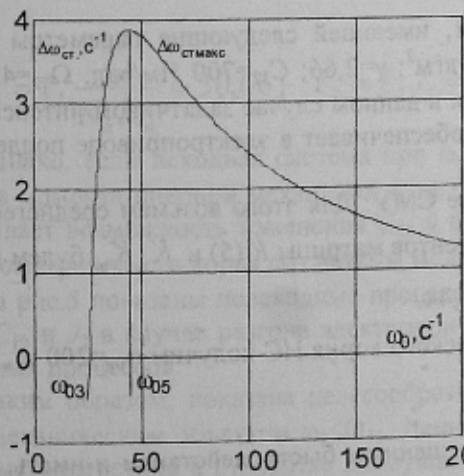


Рисунок 2-Зависимость статической ошибки в СМУ в функции ω_0

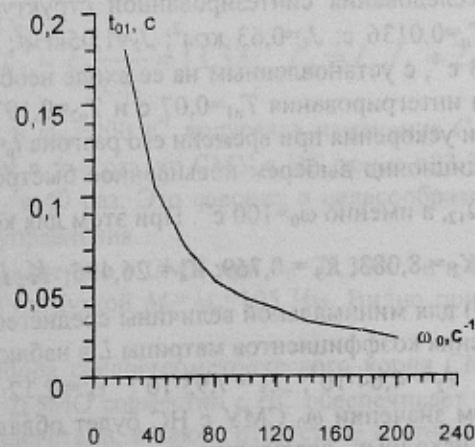


Рисунок 3-Зависимость времени первого согласования скорости второй массы $t_{01} = f(\omega_0)$ в СМУ

Примем матрицу корректирующей обратной связи в наблюдателе $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}^T$ и с учетом матрицы выхода $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ найдем характеристический полином НС

$$G_{\mu}(p) = \det(pI - A + LC) = p^4 + p^3 \left(\ell_2 + \frac{1}{T_{\mu}} \right) + p^2 \left(\Omega_{12}^2 - \frac{\ell_3}{J_1} + \frac{1}{T_{\mu}} \ell_2 + \frac{1}{J_1} \ell_1 \right) + p \left(\frac{\Omega_{12}^2}{T_{\mu}} + \frac{C_{12}}{J_1} \ell_4 - \frac{1}{J_1 T_{\mu}} \ell_3 + \frac{C_{12}}{J_2} \ell_2 \right) + \left(\frac{C_{12}}{J_1 T_{\mu}} \ell_4 + \frac{C_{12}}{J_2 T_{\mu}} \ell_2 + \frac{C_{12}}{J_1 J_2} \ell_1 \right) = 0. \quad (14)$$

Зададимся желаемым характеристическим полиномом НС в соответствии с фильтром Баттерворта четвертого порядка

$$G_{\mu}(p)_{\text{ж}} = p^4 + 2,6\lambda\omega_0 p^3 + 3,4\lambda^2\omega_0^2 p^2 + 2,6\lambda^3\omega_0^3 p + \lambda^4\omega_0^4, \quad (15)$$

где значение среднегеометрического корня определено как:

$$\omega_{0\mu} = \lambda\omega_0, \quad \lambda > (2\div 3). \quad (16)$$

В результате сравнения (14) и (15) для коэффициентов обратной связи L в НС получено:

$$\begin{cases} \ell_1 = \frac{J_1 J_2 T_{\mu}}{C_{12} T_{\mu}^2 + J_2} \left(\frac{A_1}{T_{\mu}} - B_1 + C_1 T_{\mu} \right); & \ell_2 = 2,6\lambda\omega_0 - \frac{1}{T_{\mu}}; \\ \ell_3 = \frac{J_1 J_2 T_{\mu}}{C_{12} T_{\mu}^2 + J_2} \left(-\frac{C_{12} T_{\mu}}{J_2} A_1 - B_1 + \frac{1}{T_{\mu}} C_1 \right); & \ell_4 = \frac{J_1 J_2 T_{\mu}}{C_{12} T_{\mu}^2 + J_2} \left(-\frac{1}{J_2} A_1 + \frac{T_{\mu}}{J_2} B_1 + \frac{1}{C_{12}} C_1 \right), \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{где } A_1 = 3,4\lambda^2\omega_0^2 - \Omega_{12}^2 - \frac{1}{T_{\mu}} \left(2,6\lambda\omega_0 - \frac{1}{T_{\mu}} \right); \quad B_1 = 2,6\lambda^3\omega_0^3 - \frac{\Omega_{12}^2}{T_{\mu}} - \frac{C_{12}}{J_2} \left(2,6\lambda\omega_0 - \frac{1}{T_{\mu}} \right);$$

$$C_1 = \lambda^4\omega_0^4 - \frac{C_{12}}{J_2 T_{\mu}} \left(2,6\lambda\omega_0 - \frac{1}{T_{\mu}} \right).$$

Уравнения НС в развернутой форме можно представить как:

$$\begin{pmatrix} \hat{M} \\ \hat{\omega}_1 \\ \hat{M}_{12} \\ \hat{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{T_{\mu}} & \ell_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & p + \ell_2 & \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & \ell_3 - C_{12} & p & C_{12} \\ 0 & \ell_4 & -\frac{1}{J_2} & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{M} \\ \hat{\omega}_1 \\ \hat{M}_{12} \\ \hat{\omega}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{pmatrix} \cdot \omega_1(t) + \begin{pmatrix} K_{\alpha} K_{\mu} \\ T_{\mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U_y(t) \quad (18)$$

откуда видно, что НС, показанный в нижней части рис.1, синтезирован без действия на него возмущающего воздействия M_c .

Проведем исследования синтезированной структуры рис.1, имеющей следующие параметры ДЭМО: $K_{\alpha} K_{\mu} = 34,2$ Нм/В; $T_{\mu} = 0,0136$ с; $J_1 = 0,63$ кгм²; $J_2 = 1,05$ кгм²; $J_{\Sigma} = 1,68$ кгм²; $\gamma = 2,66$; $C_{12} = 700$ Нм/рад; $\Omega_{12} = 42,11$ с⁻¹; $M_n = 105$ Нм; $\omega_n = 143$ с⁻¹, с установленным на ее входе необходимым в данном случае задатчиком интенсивности ZI^2 с постоянными интегрирования $T_{n1} = 0,07$ с и $T_{n2} = 0,197$ с, что обеспечивает в электроприводе поддержание постоянства рывка и ускорения при времени его разгона $t_p = 1,9$ с.

Вначале традиционно выберем повышенное быстродействие СМУ. Для этого возьмем среднегеометрический корень $\omega_0 > \Omega_{12}$, а именно $\omega_0 = 100$ с⁻¹. При этом для коэффициентов матрицы K (5) и $K_u K_u'$ будем иметь:

$$K_1 = 0,0742; K_2 = 8,083; K_3 = 0,769; K_4 = 26,495; K_u K_u' = 647,44.$$

С учетом (16) для минимальной величины среднегеометрического корня НС получим $\omega_{0\mu} = 200$ с⁻¹, что дает следующие значения коэффициентов матрицы L в наблюдателе:

$$\ell_1 = 7,71 \cdot 10^4; \ell_2 = 4,64 \cdot 10^2; \ell_3 = 7,93 \cdot 10^3; \ell_4 = 2,12 \cdot 10^4.$$

При принятом значении ω_0 СМУ с НС будет обладать повышенным быстродействием и иметь, принимаемые в качестве исходных, следующие показатели переходной характеристики по возмущению: t_m – время достижения максимума динамической ошибки $\Delta\omega_{\text{дин}}$ при просадке скорости, имеющей в установившемся режиме величину $\Delta\omega_{\text{ст}}$, а также допустимые, при приемлемом качестве переходных процессов по управлению, пределы изменения жесткости упругой связи $C_{12\text{мин}} < C_{12} < C_{12\text{макс}}$ и момента инерции второй массы $J_{2\text{мин}} < J_2 < J_{2\text{макс}}$:

$$t_m = 0,038 \text{ с}; \quad \Delta\omega_{\text{дин}} = -2,73 \text{ с}^{-1}; \quad \Delta\omega_{\text{ст}} = -2,27 \text{ с}^{-1}; \quad 640 < C_{12} < 720; \quad 0,7 < J_2 < 4.$$

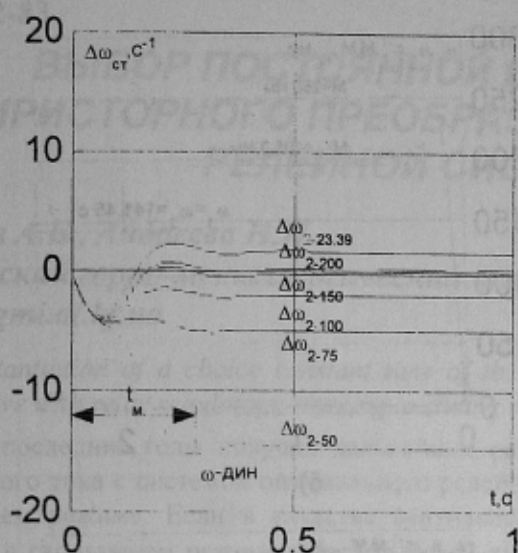


Рисунок 4 – Переходные характеристики по возмущению в СМУ при $\omega_0=23,39 \text{ с}^{-1}$ и в СМУ с НС при $\omega_{0н}=50, 75, 100, 150, 200 \text{ с}^{-1}$

ливаемого на входе системы. Кроме того, при $\omega_{0н}=200 \text{ с}^{-1}$ значительно выросла величина λ , которая принимает значение $\lambda=8$.

Таблица 1

$\omega_{0н}, \text{ с}^{-1}$	$t_m, \text{ с}$	$\Delta\omega_{\text{дин}}, \text{ с}^{-1}$	$\Delta\omega_{\text{ст}}, \text{ с}^{-1}$	$C_{12\text{мин}}, \text{ Нм/рад}$	$C_{12\text{макс}}, \text{ Нм/рад}$	$J_{2\text{мин}}, \text{ кгм}^2$	$J_{2\text{макс}}, \text{ кгм}^2$
50	0,28	-15,4	-14,79	400	1500	0,2	2,7
75	0,085	-4,54	-5,09	250	1500	0,15	4
100	0,075	-4,34	-2,138	250	1500	0,1	4
150	0,070	-4,23	-0,40	250	1500	0,1	4
200	0,068	-4,19	0	250	1500	0,1	4

При этом СМУ с НС стала астатической по возмущающему воздействию ($\Delta\omega_{\text{ст}} = 0$) и произошло, в общем-то, не существенное увеличение t_m и динамической ошибки $\Delta\omega_{\text{дин}}$. Коэффициенты обратной связи в НС при $\omega_{0н}=200 \text{ с}^{-1}$ остались неизменными. Они с учетом параметров силовой части имеют легко реализуемые значения:

$$l_1^* = l_1 \frac{T_{\mu}}{K_{\alpha} K_M} = 30,66; \quad l_2^* = l_2 J_1 = 292; \quad l_3^* = l_3^* \frac{1}{C_{12}} = 11,33; \quad l_4^* = l_4 J_2 = 2,22 \cdot 10^4.$$

Однако, если исходная система при $\omega_0=100 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{0н}=200 \text{ с}^{-1}$ допускала изменение C_{12} не более как на (3÷8)%, а момента инерции механизма J_2 не более, чем в 5÷6 раз, то СМУ с НС при $\omega_0=23,39 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{0н}=200 \text{ с}^{-1}$ обеспечивает возможность изменения C_{12} в 6 раз и J_2 в 40 раз. Это говорит о целесообразности уменьшения среднегеометрического корня ω_0 системы модального управления.

На рис.5 показаны переходные процессы по управлению в СМУ при $\omega_0=23,39 \text{ с}^{-1}$ и в СМУ с НС при вариации C_{12} и J_2 в случае разгона электропривода под нагрузкой $M_c=M_n=105 \text{ Нм}$. Видно приемлемое качество переходных процессов.

Таким образом, показана целесообразность выбора среднегеометрического корня СМУ двухмассовым электромеханическим объектом $\omega_0 < \Omega_{12}$. Данная СМУ ДЭМО совместно с НС обеспечивает не только необходимое быстродействие в отработке возмущающих воздействий, а также отсутствие статической ошибки, но и большой диапазон изменения жесткости упругой связи C_{12} и, что очень важно, вариацию коэффициента соотношения масс в пределах $1,16 \leq \gamma \leq 7,35$.

Выберем величину среднегеометрического корня вблизи его значения ω_{03} , например $\omega_0=23,39 \text{ с}^{-1}$. При этом в силу (16) имеется возможность для среднегеометрического корня НС взять величины $\omega_{0н}=50; 75; 100; 150$ и 200 с^{-1} .

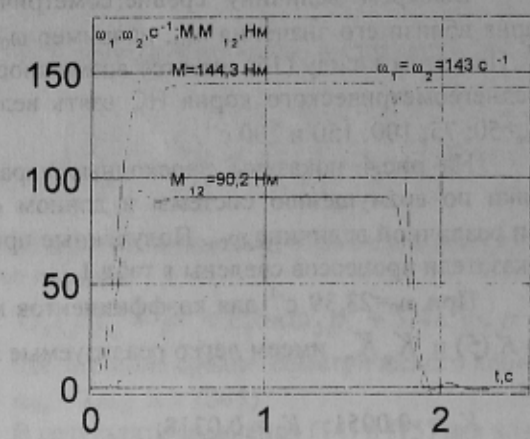
На рис.4 показаны переходные характеристики по возмущению системы в данном случае при различной величине $\omega_{0н}$. Полученные при этом показатели процессов сведены в табл.1.

При $\omega_0=23,39 \text{ с}^{-1}$ для коэффициентов матрицы $K(5)$ и $K_u K'_u$ имеем легко реализуемые значения:

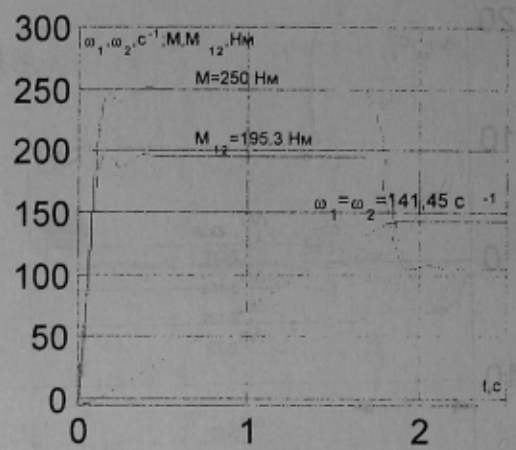
$$K_1 = -0,0051; \quad K_2 = 0,0318;$$

$$K_3 = -0,0258; \quad K_4 = 0,081; \quad K_u K'_u = 1,94.$$

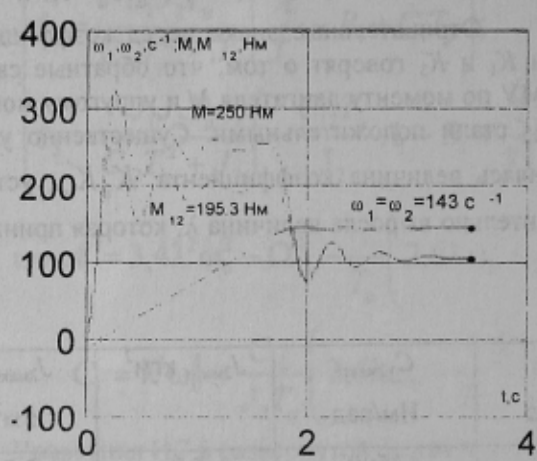
Отрицательные знаки перед коэффициентами K_1 и K_3 говорят о том, что обратные связи в СМУ по моменту двигателя M и упругому моменту M_{12} стали положительными. Существенно уменьшилась величина коэффициента $K_u K'_u$, устанавливаемого на входе системы.



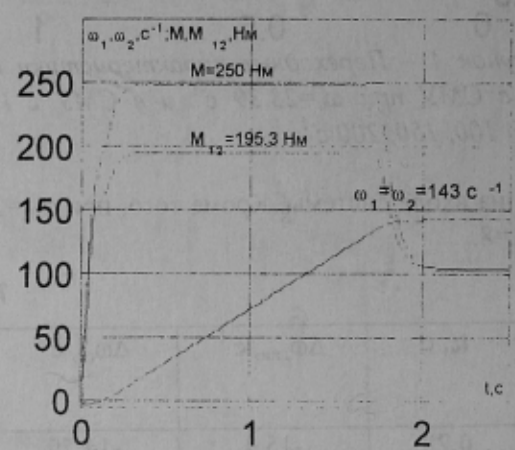
а)



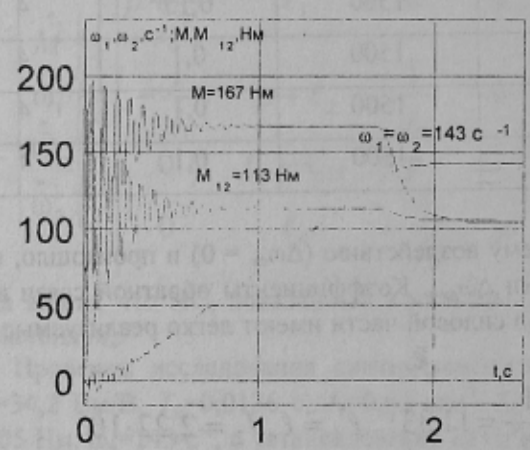
б)



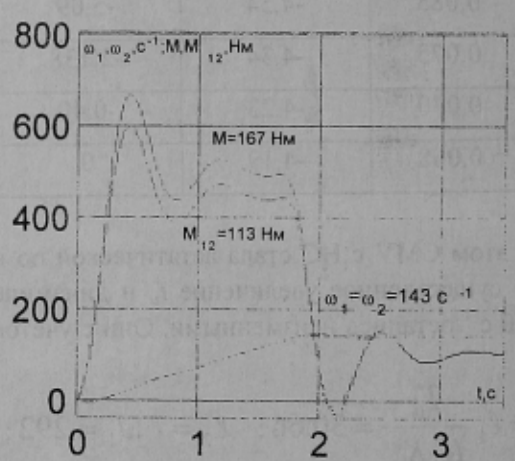
в)



г)



д)



е)

Рисунок 5-Переходные процессы по управлению в СМУ от ZI^2 при $\omega_0 = 23,39 \text{ с}^{-1}$ в режиме холостого хода а) и под нагрузкой б), а также в СМУ с НС при $\omega_{0н} = 200 \text{ с}^{-1}$ в случаях: в) $C_{12} = 250 \text{ Нм/рад}$; г) $C_{12} = 1500 \text{ Нм/рад}$; д) $J_2 = 0,1 \text{ кгм}^2$; е) $J_2 = 4,0 \text{ кгм}^2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ключев В.И. Ограничение динамических нагрузок электропривода. -М.: Энергия, 1971. -320 с.
2. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. -С-Пб.: Энергоатомиздат, 1992. -288 с.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования.-М.:Наука. 1972.-767 с.
4. Долбня В.Т. Топологические методы анализа и синтеза электрических цепей и систем. -Харьков: Вища школа, 1974. -145 с.
5. Автоматизированные электромеханические системы с модальными регуляторами и наблюдателями состояния /Сб. научных статей под ред. В.Б. Клепикова, Л.В. Акимова. -Харьков: ХГПУ, 1997. -89 с.
6. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. -Л.: Энергоиздат, 1982. -400 с.