

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ БИФУРКАЦИИ

Ткаченко В.Н., Ткаченко А. В.

Донецкий национальный технический университет,  
кафедра автоматизации и телекоммуникаций,  
кафедра автоматизированных систем управления  
E-mail: [tkachenko@iamm.ac.donetsk.ua](mailto:tkachenko@iamm.ac.donetsk.ua)

### Abstract

*Tkachenko V.N., Tkachenko A.V. Parametric identification of nonlinear systems under conditions of bifurcation. Problem of parametric identification of nonlinear systems under conditions of bifurcation is considered. Process of autocatalytic reaction is given as example. Qualitative analysis of the system behavior is done. Points of bifurcations of equilibrium states are found and bifurcation diagrams are built. Results analysis allows to isolate districts of the parameters where they can be searched by a gradient procedures.*

**Анализ исследований по рассматриваемой проблеме.** Совершенствование систем управления технологическими процессами, улучшение их качества в настоящее время идет по пути повышения точности используемых математических моделей и методов их идентификации [1]. При этом для создания более совершенных систем управления необходимо использовать более полные и точные модели, учитывающие нелинейные эффекты. Для параметрической идентификации линейных систем различной сложности предложены достаточно простые и эффективные методы, основанные на идее метода наименьших квадратов [2], а также алгоритмов реального масштаба времени таких как рекуррентный метод наименьших квадратов и его модификации, методы стохастической аппроксимации [3] и др. Существует ряд приближенных инженерных методов, среди которых наиболее эффективными являются метод площадей (метод Симою) и графо-аналитический метод [3]. Эти методы широко используются для идентификации моделей объектов автоматизации по кривым разгона, полученным в виде реакции на единичный входной сигнал.

Для параметрической идентификации нелинейных систем используются градиентные процедуры, при этом ограничение на их применение сводится, как правило, к возможности вычисления частных производных переменных состояния по идентифицируемым параметрам. Однако, в отличие от линейных моделей, нелинейные модели, в общем случае, обладают рядом свойств, которые могут существенно осложнить применение градиентных процедур, не учитывающих в предлагаемых алгоритмах особенностей поведения систем при изменении параметров в широких пределах. Для нелинейных систем характерна существенная зависимость характера траекторий и их свойств устойчивости от начальных значений, а также изменение числа точек равновесия, их свойств устойчивости и числа качественно различных траекторий движения системы в пространстве состояний при изменении параметров системы в процессе градиентной идентификации.

**Постановка задачи и цели исследований.** Целью данной работы является исследование свойств системы при изменении ее параметров на примере простейшей нелинейности в виде квадратичного полинома в правой части обыкновенного

дифференциального уравнения и особенностей применения градиентных методов параметрической идентификации в условиях бифуркации положений равновесия и возможных скачков на качественно другие траектории при движении в пространстве параметров системы.

Рассмотрим в качестве математической модели некоторой нелинейной системы нелинейное уравнение

$$\dot{x} = f(x(t), p, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $f$  – нелинейная функция, зависящая от вектора параметров  $p$  и времени  $t$ .

Пусть известны результаты измерений  $z(t)$  значений переменных состояния системы на временном интервале  $0 \leq t \leq t_k$ . Задача идентификации модели наблюдаемой системы состоит в определении неизвестных параметров  $p$ .

Наиболее общий подход к решению сформулированной задачи идентификации состоит в следующем. В качестве меры отклонения расчетных координат переменных состояния от наблюдаемых принимается следующий интегральный функционал квадратичной невязки:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_k} [z(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau. \quad (2)$$

Задача состоит в нахождении такого вектора параметров  $p$ , который минимизировал бы функционал (2), т.е.  $\min J$  для  $p \in P$ , где  $P$  – область допустимых значений параметров. На практике, однако, не всегда можно задать область  $P$  на основе априорной информации о рассматриваемой предметной области.

Алгоритм градиентной идентификации состоит в следующем. Зададимся начальным значением  $p^0$  вектора параметров и определим величину невязки  $J^0$ , решив уравнение (1). Покомпонентно возмущая параметры на величину  $h$ , найдем соответствующие значения невязок. Теперь  $j$ -тую компоненту вектора - градиента приближенно можно получить как

$$\frac{\partial J}{\partial p_j^0} \approx \frac{J(p_1, \dots, p_j + h, \dots, p_n) - J^0(p^0)}{h}, \quad j = 1, n. \quad (3)$$

Новое приближение для вектора параметров определим как

$$p^{i+1} = p^i - K^i \frac{\partial J}{\partial p^i}. \quad (4)$$

Соотношение (4) дает итеративный процесс улучшения оценок параметров до тех пор, пока будет уменьшаться функционал невязки. В зависимости от способа выбора  $K^i$  получаем различные модификации градиентных процедур. В частности, по методу наискорейшего спуска  $K^i$  выбирается из условия

$$\min J(p^i - K^i \frac{\partial J}{\partial p^i}) . \quad (5)$$

Таким образом, любой градиентный метод идентификации сводится к движению в пространстве параметров системы с целью поиска наилучших в смысле (2) параметров системы и, в общем случае, не предполагает контроля возможных скачков на качественно другие типы решений нелинейной системы. В этих условиях сходимость градиентной процедуры гарантировать невозможно. В связи с этим необходимо исследовать все возможные качественно различные решения нелинейной системы и установить область параметров  $P_*$ , траектории которой будут соответствовать на качественном уровне характеру результатам измерений  $z(t)$  и априорным представлениям о поведении моделируемой системы.

**Качественный анализ поведения нелинейной системы.** В качестве простейшего примера нелинейной системы рассмотрим реактор, в котором происходит автокаталитическая реакция. Вещество подается в реактор с постоянной скоростью и удаляется через мембрану со скоростью пропорциональной концентрации. В автокаталитической реакции скорость возникновения вещества пропорциональна квадрату его концентрации. Таким образом, на основе материального баланса скорость изменения концентрации вещества описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax^2 - bx + c , \quad (6)$$

где  $x$  - концентрация вещества;

$a$  - коэффициент автокаталитической реакции;

$b$  - коэффициент пропорциональности выхода вещества из реактора;

$c$  - скорость поступления вещества.

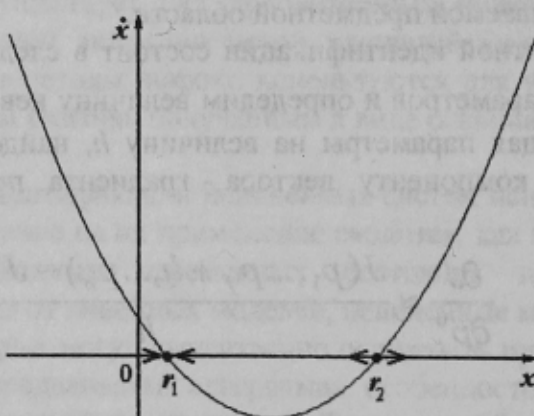


Рисунок 1 – фазовый портрет правой части уравнения (6).

Проведем качественный анализ динамики концентрации вещества в реакторе. С этой целью построим фазовый портрет правой части уравнения (6) (рис. 1). Получим точки равновесия уравнения (6), приравняв правую часть уравнения нулю. В зависимости от значений коэффициентов уравнения имеется три случая:

1. имеются два различных действительных корня;
2. один действительный корень кратности два;
3. корни комплексно-сопряженные.

Получим качественные графики динамики уравнения (1) на основе анализа фазового портрета. Точки равновесия разбивают область начальных значений возможных траекторий на три части. Первая область определяется начальными условиями  $x_0 \in [-\infty, r_1]$ . Множество решений образуется семейством возрастающих функций, асимптотически стремящихся к состоянию равновесия  $x = r_1$ .

В интервале начальных значений  $(r_1, r_2)$  семейство траекторий будет убывающими функциями, асимптотически стремящихся к  $r_1$ . В интервале  $[r_2, \infty]$  семейство траекторий будет неограниченно возрастающими функциями.

1. Предположим что коэффициенты таковы, что дискриминант квадратного уравнения больше нуля и имеются два различных действительных корня  $r_1, r_2$  ( $r_1 < r_2$ ). В точках равновесия рис.1 расставим стрелочки, указывающие на возрастание траектории  $x(t)$ , если правая часть положительна, и убывание траектории, если правая часть отрицательна. Получим, что состояние равновесия в точке  $r_1$  является аттрактором [4], а состояние равновесия в точке  $r_2$  является репеллером.

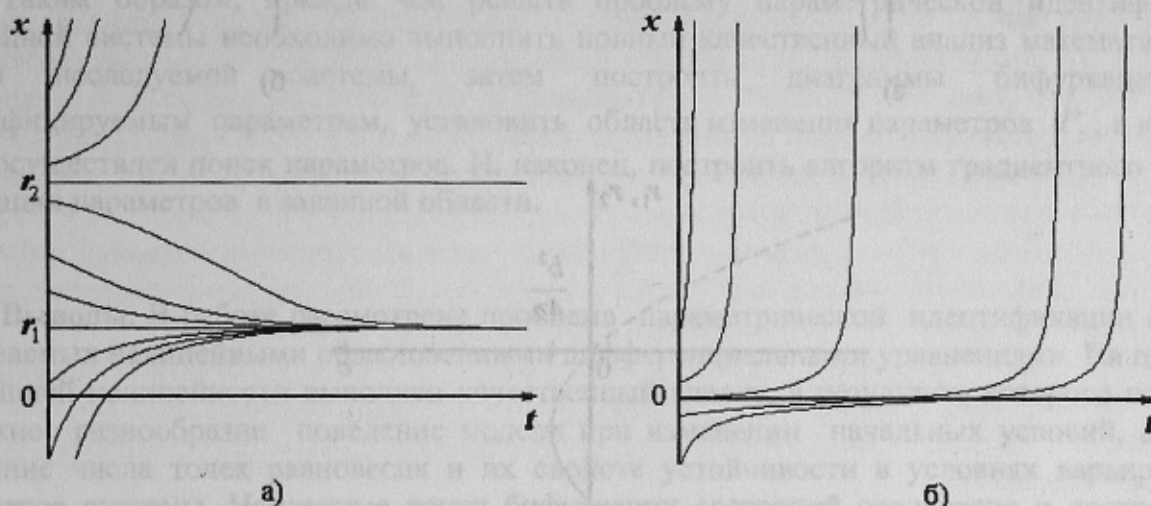


Рисунок 2 – Качественный вид решений уравнения (6):

- а) правая часть уравнения (6) имеет два различных действительных корня;
- б) правая часть уравнения (6) имеет комплексно-сопряженные корни.

При этом неявное аналитическое решение в общем виде имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctg \left( \frac{2ax(t) + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) - t + C_0 = 0 \quad (7)$$

2. В случае существования одного действительного корня  $r_0$  состояние равновесия в этой точке становится неустойчивым, а поведение траекторий решения будет определяться начальным значением  $x_0$ : если  $x_0 \leq r_0$ , то траектории будут асимптотически стремиться к состоянию равновесия, в противном случае – буду неограниченно возрастать.

3. Если корни  $r_1, r_2$  комплексные, то при любых начальных условиях решение будет представлять собой неограниченно возрастающую функцию.

Неявное аналитическое решение в общем виде имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + t + C_0 = 0. \quad (8)$$

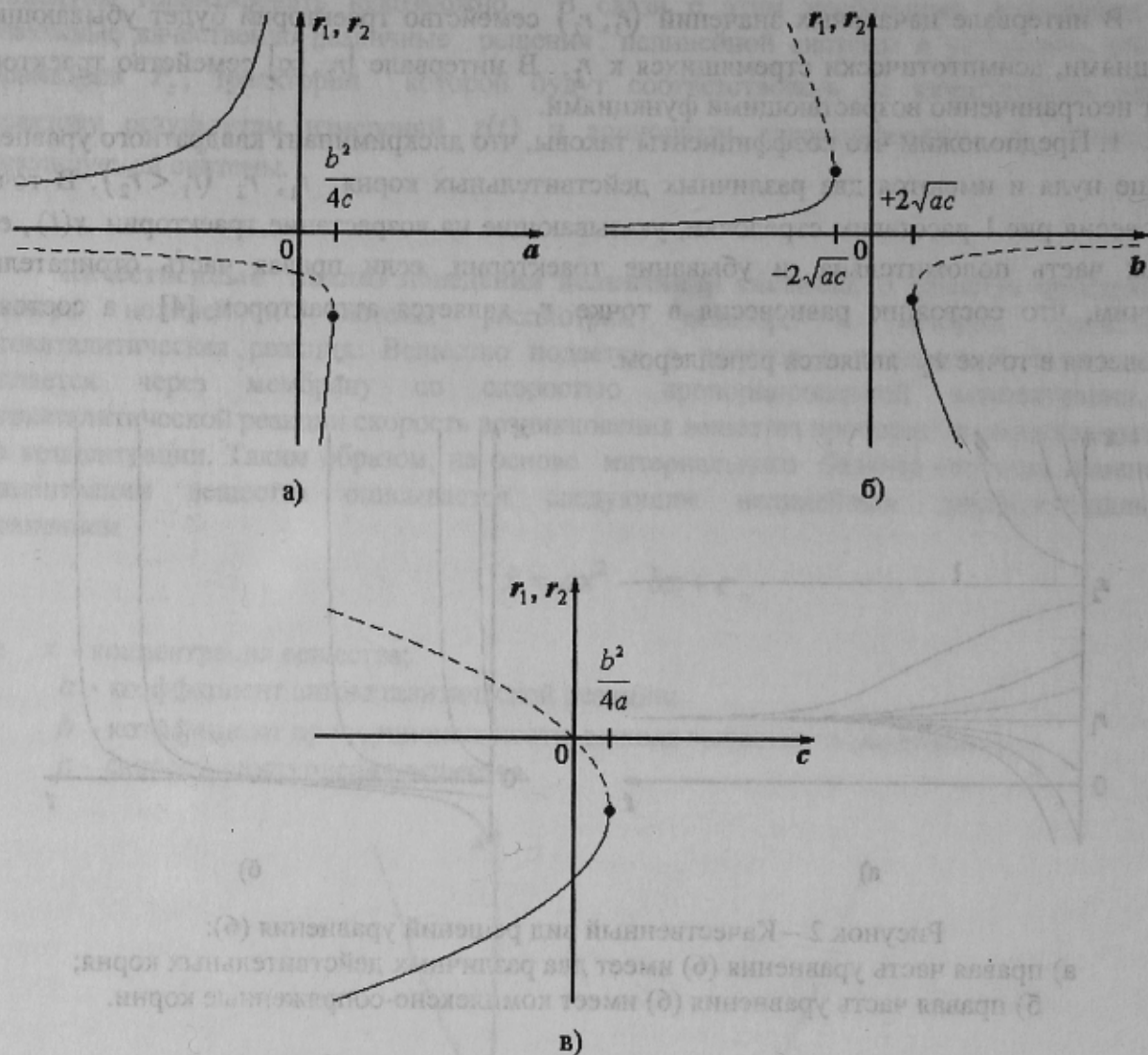


Рисунок 3 – діаграми бифуркацій точок рівноваги рівняння (6) в залежності від:  
 а) параметра  $a$ ; б) параметра  $b$ ; в) параметра  $c$ ;  
 (сплошная лінія відповідає стійким точкам рівноваги, а пунктирна - не стійким).

**Аналіз діаграм бифуркації при зміні параметрів системи.** Розглянемо поведінку досліджуваної системи при зміні параметрів  $a, b, c$  в достатньо широкому діапазоні. Прирівняємо праву частину рівняння (6) до нуля і виконаємо аналіз зміни числа точок рівноваги при зміні параметрів. Точки бифуркації числа станів рівноваги можуть бути знайдені з умови рівності нулю дискримінанта квадратного рівняння

$$D = b^2 - 4ac = 0. \quad (9)$$

При  $D > 0$  имеется два состояния равновесия, при  $D < 0$  состояния равновесия отсутствуют. Разрешая соотношение (9) относительно варьируемого параметра, легко определить точки бифуркаций по каждому параметру:

$$a = \frac{b^2}{4c}, \quad b = \pm 2\sqrt{ac}, \quad c = \frac{b^2}{4a}. \quad (8)$$

Кроме того, при  $a = 0$  появляется новое состояние равновесия  $r = c/b$  и система (6) становится линейной.

На рис. 3 представлены диаграммы бифуркаций по параметрам  $a, b, c$ , позволяющие установить диапазоны изменения параметров, которым соответствуют качественно различные траектории. На основе качественного анализа решений нелинейной системы, а также результатов анализа диаграмм бифуркации можно определить область  $P_2$ , траектории которой будут соответствовать на качественном уровне характеру результатам измерений  $z(t)$ . После чего можно реализовать устойчивую процедуру градиентной минимизации функционала (2) и получить ожидаемый результат.

Таким образом, прежде чем решать проблему параметрической идентификации нелинейной системы необходимо выполнить полный качественный анализ математической модели исследуемой системы, затем построить диаграммы бифуркации по идентифицируемым параметрам, установить область изменения параметров  $P_2$ , в которой будет осуществлен поиск параметров. И, наконец, построить алгоритм градиентного поиска наилучших параметров в заданной области.

**Выводы.** В работе рассмотрена проблема параметрической идентификации систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. На примере простейшей нелинейности выполнен качественный анализ, в результате которого показано возможное разнообразие поведения модели при изменении начальных условий, а также изменение числа точек равновесия и их свойств устойчивости в условиях варьирования параметров системы. Найденные точки бифуркации состояний равновесия и построенные диаграммы бифуркации позволяют установить область параметров  $P_2$ , в которой целесообразно искать параметры системы на основе градиентных методов.

### Литература

1. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами/ Киричков В.Н. – К.: Вища школа, 1990, - с.187.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояний. - М.: Мир, 1973,- с. 863.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984, - с. 541.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир, 1986,- с. 243.
5. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. - М.: Наука, 1974, - с. 246.