ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ПРИЙОМУ БАГАТОПОЗИЦІЙНИХ ФАЗОМОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Беркман Л.Н., Міліх М.М., Стец А.С.
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, м. Київ
E-mail: info@uniis.kiev.ua

Abstract
Berkman L.N., Milih M.M., Stec A.S. Multiposition phase-modulated signals reception's noise stability. *In clause the technique allowing to determine the noise stability of a multiposition phaze-modulated signals reception is submitted.*

У даному випадку аналізу багатопозиційних сигналів відсутні настільки витончені і точні вирази для імовірності помилки, як у випадках однократної і двократної ФМ та ФРМ. Як правило, існують або досить громіздкі точні формули, за якими можливі лише чисельні розрахунки на ЕОМ, або досить прості, але наближені аналітичні залежності [1].

Почнемо розгляд з когерентного прийому сигналів з *m*-позиційної ФМ. Нехай прийнятий сигнал *x(t)* являє собою суму сигналу і реалізації гаусівського шуму:

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_i) + \xi(t). \tag{1}$$

Підставимо *(1)* у нерівність алгоритму когерентного прийому сигналів з *m*-позиційною ФМ і перепишемо цю систему нерівностей у наступному вигляді:

$$\begin{gathered}\int_0^T a^2\sin^2(\omega t+\varphi_i)dt + a\cos\varphi_i\int_0^T\xi(t)\sin\omega t dt + a\sin\varphi_i\int_0^T\xi(t)\cos\omega t dt \rangle \\ \rangle \int_0^T a^2\sin(\omega t+\varphi_i)\sin(\omega t+\varphi_j)dt + a\cos\varphi_j\int_0^T\xi(t)\sin\omega t dt + a\sin\varphi_j\int_0^T\xi(t)\cos\omega t dt.\end{gathered} \tag{2}$$

Інтеграли, які входять у вираз, уже розглядалися у попередніх параграфах. Позначаючи

$$\theta_s = \int_0^T\xi(t)\sin\omega t dt; \quad \theta_c = \int_0^T\xi(t)\cos\omega t dt, \tag{3}$$

одержуємо з *(2)*:

$$0{,}5a^2T + a\cos\varphi_i\theta_s + a\sin\varphi_i\theta_c \rangle 0{,}5a^2T\cos(\varphi_j-\varphi_i) + a\cos\varphi_i\theta_s + a\sin\varphi_j\theta_c \tag{4}$$

Переносячи члени, які містять випадкові величини, у праву частину нерівності, а інші – в ліву, отримуємо:

$$0{,}5aT\sin^2 0{,}5(\varphi_j-\varphi_i)\rangle\theta, \tag{5}$$

де $j = 1,2, \ldots, m, j \neq i$;

$$\theta = (\cos\varphi_j - \cos\varphi_i)\theta_s + (\sin\varphi_j - \sin\varphi_i)\theta_c. \tag{6}$$

Випадкова величина θ розподілена за нормальним законом з нульовим середнім значенням і дисперсією

$$D(0) = (\cos\varphi_j - \cos\varphi_i)^2 D(\theta_s) + (\sin\varphi_j - \sin\varphi_i)^2 D(\theta_c) = N_0T\sin^2 0{,}5(\varphi_j-\varphi_i). \tag{7}$$

Тому імовірність виконання *j-ї* нерівності системи *(5)*:

$$p_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(0)}} \int\limits_{-\infty}^{R} \exp\left[-\frac{x^2}{2D(0)}\right] dx, \tag{8}$$

де $R = (aT/2)\sin^2 0{,}5(\varphi_j - \varphi_i)$, тобто

$$p_j = 1 - \Im\left[\sqrt{2}h\left|\sin 0{,}5\left(\varphi_j - \varphi_i\right)\right|\right] \tag{9}$$

Повернемося до вихідного припущення про те, що переданий сигнал S_i. Він буде прийнятий без помилки, якщо *(5)* виконується при всіх $j \neq i$. Неважко довести, що це має місце, якщо виконуються дві нерівності з *(5)*, що відповідають таким фазам φ_j, які є найближчими до φ_i. Дійсно, аргумент синуса *(5)* не перевершує $\pi/2$, тому ліва частина нерівності є монотонно зростаючою функцією різниці фаз ($\varphi_j - \varphi_i$). Отже, якщо ця нерівність виконується при мінімальній різниці фаз, рівній $\pm 2\pi/m$, то вона і поготів виконується при великих різницях.

Таким чином, сигнал буде прийнятий без помилки, якщо *(5)* виконується при $\Delta\varphi_1 = \varphi_j - \varphi_i = 2\pi/m$ і $\Delta\varphi_2 = \varphi_j - \varphi_i = -2\pi/m$. Ці величини є сумісними й у загальному випадку залежними, тому імовірність правильного прийому $p_{пр}$ можна записати у вигляді:

$$p_{пр} = p_{2\pi/m} p_{-2\pi/m}(2\pi/m), \tag{10}$$

де

$$p_{2\pi/m} = 1 - \Im\left[\sqrt{2}h\sin(\pi/m)\right] \tag{11}$$

- безумовна імовірність виконання *(5)* при $\varphi_j - \varphi_i = 2\pi/m$, а $p_{-2\pi/m}(2\pi/m)$ – умовна імовірність виконання нерівності *(5)* при $\varphi_j - \varphi_i = -2\pi/m$ і додатковій умові, що вона виконана при $\varphi_j - \varphi_i = 2\pi/m$. Остання імовірність укладена в межах

$$p_{2\pi/m} \leq p_{-2\pi/m}(2\pi/m) < 1. \tag{12}$$

Ліва частина цієї подвійної нерівності перетворюється в рівність у чотирипозиційній системі, коли $2\pi/m = \pi/2$, і події, з яких складається виконання *(5)* при $\varphi_j - \varphi_i = \pm\pi/2$, стають незалежними. Одиниця в правій частині *(12)* є межею при збільшенні кратності модуляції, коли залежність між зазначеними подіями зростає, перемножуючи *(12)* на $p_{2\pi/m}$, з врахуванням *(10)* і *(11)* маємо:

$$\left[1 - \Im\left(\sqrt{2}h\sin(\pi/m)\right)\right]^2 \leq p_{пр} < 1 - \Im\left[\sqrt{2}h\sin(\pi/m)\right] \tag{13}$$

Нарешті, з *(13)* одержуємо наступну оцінку для імовірності помилки $p = 1 - p_{пр}$ при когерентному прийомі сигналів з N-кратною ($m=2^N$)ФМ:

$$\Im\left(\sqrt{2}h\sin\frac{\pi}{2^N}\right) < p_N \leq 2\Im\left(\sqrt{2}h\sin\frac{\pi}{2^N}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\Im\left(\sqrt{2}h\sin\frac{\pi}{2^N}\right)\right]. \tag{14}$$

із правої частини отриманої оцінки випливає точний вираз завадостійкості двократної ($N=2$) системи з ФМ [2].

Аналізуючи результат *(14)*, слід зазначити, що отримана оцінка імовірності p досить гарна для практики, тому що вона укладена в межах, що відрізняються менш чим у два рази.

Ця оцінка визначає імовірність помилки m-позиційного символу. Для одержання з неї оцінки імовірності помилки двійкового символу потрібно врахувати, що при малих імовірностях помилки при використанні маніпуляційного коду Грея імовірність одночасної помилки в більш ніж одному двійковому підканалі значно менша імовірності помилки в одному підканалі. Тому еквівалентну імовірність помилки на двійковий символ $p_{N\text{экв}}$ можна оцінити за наближеною формулою:

$$p_{N\text{экв}} \approx (2/N)\Im\left[\sqrt{2}h\sin(\pi/2^N)\right]. \tag{15}$$

Для N-кратної ФРМ першого порядку, з огляду на коефіцієнт розмноження, рівний двом, можна записати аналогічно *(15)* наступну наближену формулу для еквівалентної імовірності помилки на двійковий символ:

$$p^{(1)}_{N\text{экв}} \approx (4/N)\Im\left[\sqrt{2}h\sin(\pi/2^N).\right] \tag{16}$$

Зі зростанням швидкості за рахунок збільшення числа позицій фази сигналу завадостійкість різко падає. Якщо, наприклад, при збільшенні швидкості передачі в 2 рази за допомогою переходу від однократної до двократної ФМ для збереження завадостійкості потрібно збільшити відношення сигнал-шум на 3 дБ, то при наступному збільшенні швидкості ще в 2 рази шляхом переходу від двократної до чотирикратної ФМ для збереження завадостійкості потрібно збільшити відношення сигнал-шум більш ніж на 10 дБ.

У зв'язку з цим при незмінній швидкості передачі тільки системи з N =1 і 2 еквівалентні за завадостійкістю; при $N > 2$ збільшення тривалості посилки не компенсує втрат завадостійкості, викликаних збільшенням числа позицій фази. Для ілюстрації цього положення знайдемо залежність енергетичних витрат на один біт переданої інформації від кратності модуляції при когерентній обробці сигналу [3].

Допустимо, що імовірність помилки в двійковій і m-позиційній системах рівні. Згідно *(14)* це означає, що

$$h_m \sin(\pi/m) = h_2, \tag{17}$$

де h_2^2, h_m^2 - співвідношення енергії сигналу до щільності потужності завади, необхідні для досягнення заданої вірності в двійковій і m-позиційній системах відповідно. Тому, коефіцієнт, який вказує, у скількох разів варто збільшити потужність сигналу при переході від двох варіантів різниць фаз до m варіантів, тобто при збільшенні швидкості передачі в $\log_2 m$ раз, щоб зберегти незмінною імовірність помилки, дорівнює

$$\Delta h(m) = h_m^2 / h_2^2 = 1/\sin 2(\pi/m). \tag{18}$$

За допомогою залежності *(18)* можна визначити, чи вигідний з енергетичної точки зору перехід до сигналів більш високої кратності при збереженні незмінної швидкості передачі інформації. Для цього складемо співвідношення

$$\eta = \frac{\Delta h(m)}{\log_2 m} = \frac{1}{\log_2 m \sin^2(\pi/m)}, \tag{19}$$

яке вказує відносні витрати енергії сигналу на одиницю переданої інформації. Як видно, оптимальною щодо витрат енергії на одиницю переданої інформації є система з трьома різницями фаз: $\Delta\varphi_1 = 0$, $\Delta\varphi_2 = 2\pi/3$, $\Delta\varphi_3 = 4\pi/3$ (показник $\eta = 0{,}84$). Двократні системи з ФРМ за цим критерієм не поступаються однократній. При подальшому збільшенні кратності системи відносні витрати енергії на одиницю переданої інформації швидко зростають.

При вивченні завадостійкості когерентного прийому спочатку визначалася імовірність помилки в m-позиційному символі, а вже потім обчислювалася еквівалентна імовірність помилки на двійковий символ чи імовірність помилки в двійковому підканалі багатократної системи з фазовим ущільненням. Можна, однак, зробити інакше – відразу ж знайти імовірність помилки в окремих двійкових підканалах, розглядаючи їх як самостійні канали передачі інформації. Такий шлях зручний, якщо структура маніпуляційного коду відома. У багатократних системах із ФРМ, як правило, використовується маніпуляційний код Грея, для якого визначені алгоритми демодуляції двійкових підканалів і співвідношення між їх завадостійкістю. Наприклад, завадостійкість перших двох двійкових підканалів при будь-якій кратності модуляції однакова; імовірність помилки в третьому підканалі приблизно вдвічі більша, ніж у першій чи другому, імовірність помилки в четвертому підканалі приблизно вчетверо більша, ніж у першій чи другому і т.д. Таким чином, при використанні коду Грея можна визначити імовірність помилки в кожному двійковому підканалі окремо й оцінити середню імовірність помилки на двійковий символ.

Пояснимо розглянуту нижче методику розрахунку завадостійкості на прикладі системи з трикратною ФРМ і варіантами різниць фази $\Delta\varphi_i = (2i-1)\pi/8$, де $i = 1, 2,...$ Переданий по другому підканалу знаковий символ збігається зі знаком косинуса переданої різниці фаз $\Delta\varphi_i$. Тому в демодуляторі цей символ визначається по знаку косинуса прийнятої різниці фаз $\Delta\varphi$. Очевидно, помилка при демодуляції другого підканалу відбудеться в тому випадку, коли знаки косинусів переданої і прийнятої різниці фаз не збігаються. Отже, імовірність помилки p_{32} у другому підканалі системи з трикратною ФРМ:

$$p_{32} = \sum_{i=1}^{\infty} p(\Delta\varphi_i) p_{\Delta\varphi_i}(\operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi\xi \neq \operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi_i), \tag{20}$$

де $p(\Delta\varphi_i)$ – імовірність передачі різниці фаз $\Delta\varphi_i$; $p_{\Delta\varphi i}(\cdot)$ – умовна імовірність того, що знак косинуса прийнятої різниці фаз не збігається зі знаком косинуса переданої різниці фаз за умови передачі різниці фаз $\Delta\varphi_i$. Зазначені умови імовірності однакові при $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_4$, $\Delta\varphi_5$, $\Delta\varphi_8$, і при $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$, $\Delta\varphi_6$, $\Delta\varphi_7$, тому що вхідні в ці четвірки різниці фаз знаходяться на одній і тій самій відстані від границі областей правильного прийому. Таким чином, при рівноімовірних різницях фаз, які передаються, з *(20)* одержуємо:

$$p_{32} = \frac{1}{8}\left[4p_{\Delta\varphi_1}(\operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi\xi \neq \operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi_1) + 4p_{\Delta\varphi_2}(\operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi\xi \neq \operatorname{sgn}\cos\Delta\varphi_2),\right]$$

чи остаточно

$$p_{32} = \frac{1}{2}\left[p_{\pi/8}(\cos\Delta\varphi\xi < 0) + p_{3\pi/8}(\cos\Delta\varphi\xi < 0)\right]. \tag{21}$$

Для двох інших двійкових підканалів трикратної системи з ФРМ маємо $p_{31} = p_{32}$, $p_{32} < p_{33} < 2p_{32}$, а середня імовірність p_3 помилки на двійковий символ зосереджена в межах $p_{32} < p_3 < 1{,}33p_{32}$, тобто формула *(21)* є гарною оцінкою і для середньої (по підканалам) імовірності помилки в трикратній системі.

Аналогічно можна представити імовірність помилки в системах з більш високою кратністю. Так, у чотирикратній системі імовірності помилки в перших двох підканалах:

$$p_{41} = p_{42} = \frac{1}{4}\left[p_{\pi/16}(\cos\Delta\varphi\xi < 0) + p_{3\pi/16}(\cos\Delta\varphi\xi < 0) + \right. \\ \left. + p_{5\pi/16}(\cos\Delta\varphi\xi < 0) + p_{7\pi/16}(\cos\Delta\varphi\xi < 0)\right]. \tag{22}$$

Оскільки при використанні коду Грея $p_{43} \approx 2p_{42}$, $p_{44} \approx 4p_{42}$, то в чотирикратній системі середня імовірність помилки $p_4 \approx 2p_{42}$. У п'ятикратній системі імовірність помилки в перших двох підканалах:

$$p_{51} = p_{52} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} p_{(2i-1)\pi/32}(\cos\Delta\varphi\xi < 0). \tag{23}$$

Взагалі в N-кратній системі імовірність помилки в перших двох підканалах:

$$p_{N1} = p_{N2} = \frac{1}{2^{N-2}} \sum_{i=1}^{2^{N-2}} p_{(2i-1)\pi/2^N} (\cos \Delta\varphi\xi < 0). \qquad (24)$$

Таким чином, визначення імовірності помилки в двійкових підканалах багатопозиційних систем із ФРМ зводиться у всіх випадках, як видно з *(21) – (24)*, до обчислення умовної імовірності $p_{\Delta\varphi}(\cos \Delta\varphi\xi<0)$ того, що косинус прийнятої різниці фаз $\Delta\varphi\xi$ менший від нуля при передачі тієї чи іншої різниці фаз $\Delta\varphi$.

Природно, що некогерентний прийом поступається когерентному за завадостійкістю в каналі з постійними параметрами. Слід при цьому підкреслити, що енергетичні витрати на одиницю переданої інформації при некогерентному прийомі зростають зі збільшенням кратності модуляції N швидше, ніж при когерентному. Тому, якщо при $N = 1$ енергетичний програш некогерентного прийому при малих імовірностях помилки непомітно малий, то при $N \geq 2$ він стає помітним і зростає зі збільшенням N. Трохи зменшити цей програш можна за допомогою оптимальної некогерентної обробки сигналів із ФРМ на більш ніж двох посилках, як це робиться, наприклад, при ФРМ-2. Кількісна сторона цього питання на даний час вивчена недостатньо.

У зв'язку з тим, що точні формули для імовірності помилки в багатопозиційних фазових системах досить громіздкі, а наближені не завжди дають задовільні оцінки, здійснюються спроби розробки різних методів аналізу завадостійкості, орієнтованих на використання чисельних розрахунків. Більшість таких методів засновано на тому чи іншому представленні щільності імовірності фази або різниці фаз адитивної суміші гармонійного коливання і гаусовського білого шуму.

Література

1. Окунев Ю.Б., Финк Л.М. Помехоустойчивость двоичных систем с фазоразностной модуляцией второго порядка при различных методах приема // Радиотехника. – 1984. – С. 3-8.
2. Стеклов В.К., Беркман Л.Н., Пезенцали Г.И. Возможности использования методов многоканальной модуляции для сетей доступа // Зв’язок. – 2000. - № 4. – С. 43-48.
3. Окунев Ю.Б. Цифровая передача информации фазомодулированными сигналами. – М.: Радио и связь. – 1991. – 296 с.