МНОЖЕСТВО ЖЮЛИА, АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ, СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Авлеева А.Н., Беловодский В.Н.
Донецкий национальный технический университет

Целью работы является реализация методов построения фракталов, а также их сравнительный анализ. В качестве теоретической основы при изучении были взяты работы Б.Б.Мандельброта, Р.М. Кроновера, А.Д. Морозова и С.В.Божокина. Слово фрактал образовано от латинского слова fractus, что в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур. Уже с середины 80-х годов понятие фрактал прочно вошло в обиход математиков и программистов. Фракталы находят широкое применение в различных областях научной деятельности. Наиболее мощные приложения фракталов лежат в компьютерной графике. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, а во-вторых, построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Остановимся на построении множества Жюлиа. Множество Жюлиа наряду с множеством Мандельброта занимает центральное место в теории фракталов. Множество Жюлиа представляет собой границу области притяжения неподвижных точек комплексных отображений. Наиболее изученным из них является отображение вида $f(z) = z^2 + c$, $c = c_1 + ic_2 - const$, $z, c \in C$, где C – множество всех комплексных чисел. Существуют два алгоритма его построения [1]. Первый из них основан на использовании исходного отображения, второй – обратного. Справедлива следующая теорема. Предположим, что $|c| < 2$. Пусть $z \in C$ и пусть $z_n = f_c^{(n)}(z)$ для n = 1,2,3,… Если существует такое n , что $|z_n| \geq 2$, то имеет место $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, т.е. орбита $\{f^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности и z не принадлежит множеству Жюлиа. На этой теореме основан первый алгоритм.

Алгоритм 1. Построение на основе исходного отображения

Входные параметры: $|c| < 2$, s – размер окна, (a,b) – центр окна, p – число пикселов в каждой стороне.

Шаг 1. Вычисляем действительную z_1 и мнимую z_2 части комплексного числа $z \in C$ как узлы сетки окна с заданными параметрами s, p и шагом h = s/p (рис.1) по формулам $z_1 = a - \frac{s}{2} + m * h$, $z_2 = b - \frac{s}{2} + n * h$, где m, n = 1…p. Присвоим $z_{1n} = z_1$, $z_{2n} = z_2$.

Шаг 2. Соответствует условию теоремы: пусть $z_n = f_c^{(n)}(z)$ для n = 1,2,3,… Для выполнения этого условия возьмем n = 1, 2, …20. Далее в цикле для 20-ти итераций, разделив исходное отображение на действительную и мнимую части, необходимо выполнить следующие вычисления

$$z_{1(n+1)} = z_{1n}^2 - z_{2n}^2 + c_1,\ z_{2(n+1)} = 2 * z_{1n} * z_{2n} + c_2;\ z_{1n} = z_{1(n+1)},\ z_{2n} = z_{2(n+1)}$$

Далее согласно теореме необходимо выполнить проверку на свойство ухода в бесконечность: если существует такое n , что $|z_n| \geq 2$, то имеет место $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Таким образом, если $z_{1n}^2 + z_{2n}^2 = |z_n| \geq 2$, то Шаг 1.

Шаг 3. После выхода из цикла необходимо сделать проверку: если $|z_n| < 2$, то, предполагая для наглядности, что текущая точка узла сетки $z = z_1 + iz_2$ находится в пикселе с координатами (i,j) необходимо проверить орбиты четырех соседних точек (i,j-1), (i,j+1), (i-1,j), (i+1,j) на свойство ухода в бесконечность (рис.2). Если хотя бы одна из них стремится к бесконечности, то точка с координатами (i,j) принадлежит множеству Жюлиа.

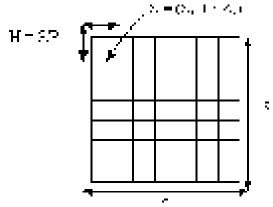

Рис. 1. Сетка заданной области построения с шагом h = s/p

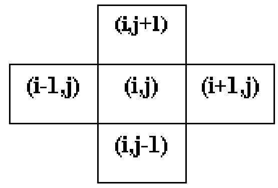

Рис.2. Соседние точки текущей точки узла

Далее переход на Шаг 1.

Второй алгоритм построения, основанный на обратном отображении, опирается на свойство множество Жюлиа, состоящее в том, что для обратного отображения, т.е. $f^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$ множество Жюлиа – аттрактор.

Алгоритм 2. Построение на основе обратного отображения

Входные параметры: $c = c_1 + ic_2$, n (число итераций, обычно 10–15).

Шаг 1. Вычислим неподвижные точки исходного отображения при условии: $z = f(z)$, т.е. необходимо найти два корня уравнения $z = z^2 + c \Rightarrow$ $z^2 - z + c = 0 \Rightarrow$ $z_{1,2} = \frac{1+\sqrt{1-4*c}}{2}$. Из этих значений z_1 и z_2 выбираем наибольшую по модулю, т.е. если $|z_1| > |z_2|$, то $z = z_1$, иначе $z = z_2$.

Шаг 2. Вычисление точек с помощью обратного отображения $(f_c)^{(-1)}(z) = \sqrt{z-c}$.

Первые две точки множества Жюлиа вычисляем, подставляя в обратное отображение найденную отталкивающую неподвижную точку: $Julia = \{+\sqrt{z-c}; -\sqrt{z-c}\}$. Далее в цикле для каждой уже найденной точки множества Жюлиа с помощью обратного отображения также как было показано выше, вычисляем еще две точки и присваиваем его множеству Julia. После чего необходимо отобразить на экране все точки текущего множества Julia. Цикл состоит из n итераций. В ходе выполнения работы была написана программа, реализующая построение множества Жюлиа по описанным выше алгоритмам.

Проводя сравнительный анализ, видим, что первый алгоритм в отличие от второго реализован при ограничении входного параметра $|c| < 2$, так как опирается на вышеизложенную теорему. Известно, что фракталы Жюлиа дают много интересных картин, в случае, если использовать при их построении цвет. Первый алгоритм позволяет сравнительно просто реализовать раскраску множества Жюлиа, в то время как второй такой возможности не предоставляет. При работе программы, реализованной по второму алгоритму в памяти компьютера необходимо хранить большие массивы данных, в то время как программа, реализованная на основе первого алгоритма, хранит только текущие значения.

Следовательно, первый алгоритм позволяет построить более интересное изображение множества Жюлиа с использованием различных цветов при меньших затратах памяти компьютера.

Литература

1. Рогов В.В., Хвощ В.В. Об изучении элементов фрактальной геометрии. ИТО-98/99.