ПЕРЕТВОРЕННЯ ГОКУ ЯК ЗАСІБ ГРУПУВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Донченко В.С., КНУ імені Тараса Шевченка,
Кириченко М.Ф., ІК НАНУ

Перетворення Гоку - ПГ - (Hough Transform) [1] було запропновано і використовується як важливий інструмент в аналізі сцен, розпізнавання образів та машинного зору для зображень на площині. Треба відзначити, що за своїм змістом ідея перетворення Гоку значно багатша і, за умови проробки питання про конструктивність опису відповдних об'єктів, може бути застосована до об'єктів ширшого, ніж в класичному варіанті, класу. У цьому випадку перетворення Гоку може бути чи основою статистичного методу оцінювання загального характру чи методу групування – кластеризаціїі – інформації. В першому варіанті воно може бути застосовано до оцінювання параметрів суміші регресій, тобто оцінюванню регресій за спостереженнями, які представляють декілька регресій в одній серії. В другому – до групування спостережень за тими чи іншими сімействами множин, наприклад, - поверхонь – в тому чи іншому просторі. У тому випадку, коли перетворення Гоку розглядається для спостережень, що відповідають спостереженням афінних перетворень в евклідових простірах довільної розмірності, може бути застосований потужний апарат псевдообернення [3-7] , як це зроблено у роботі [2].

Загалом, концепцію ПГ можна реалізувати на основі так званої Гок - пари просторів, що є по суті парою множин, оснащеною системою своїх підмножин, які взаємно індексуються. Одна множина інтерпретується як простір значень можливих спостережень, інша - як простір можливих значень параметрів. В рамках Гок-пари визначається ПГ як перехід від спостережень елементів одного простору до послідовності підмножин іншого, що пов'язані із спостережуваними значеннями. Схема дозволяє визначення прямого та оберненого перетворення Гоку, побудову Гок-оцінювача, швидкого перетворення Гоку, як послідовністі Гок-оцінок за підрозбиттями раніше отриманих Гок-оцінок та швидкого перетворення Гоку, як перетворення Гоку за складеними спостереженнями.

Власне, основою перетворення Гоку є наявність двох множин загального характеру S_o та S_p – простору спостережень та простору параметрів відповідно. Ці множини зв'язуються між собою через набори підмножин $G_\theta \subseteq S_o$, $L_s \subseteq S_p$, $\theta \in S_p$, $s \in S_o$ в кожному з них, індексованими елементами з іншого. На ці сімейства множин накладаються узгоджувальні умови: для довільної пари (s,θ): $s \in S_o$, $\theta \in S_p$, $\theta \in L_s \Rightarrow s \in G_\theta$ та навпаки: $s \in G_\theta \Rightarrow \theta \in L_s$. До цих умов можуть додаватись ті чи інші умови на їхній попарний перетин.

Гок-парою просторів будемо називати пару $\{(S_o, G_\theta, \theta \in S_p), (S_p, L_s, s \in S_o)\}$

За заданої Гок-пари перетворення Гоку визначається для довільної послідовності $s_1, s_2, \ldots, s_N \in S_o$, яка називається вибіркою чи послідовностю спостережень, як перехід від цієї послідовності до послідовності множин параметричного сімейства $L_{s_1}, L_{s_2}, \ldots, L_{s_N}$ з простору параметрів.

Задача кластеризації на основі перетворення Гоку має на меті визначення "мінімальної" множини параметрів, відповідникам яких G_θ належать всі елементи вибірки. Від задачі оцінювання на основі перетворення Гоку її відрізняє відсутність припущення про те, що кожне із спостережень відповідає своєму, визначеному - "істиному" - значенню параметру.

Складеним спостереженням $S = S_{i_1,\ldots,i_k}$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ будемо називати сукупність $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}\}$ спостережень вихідної вибірки $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Перетворенням Гоку $L_S = L_{i_1,\ldots,i_k}$ складеного спостереження $S_{i_1,\ldots,i_k}$ будемо називати перетин перетворень Гоку складових складеного спостереження:

$$L_S = L_{i_1,\ldots,i_k} = \bigcap_{j=1}^{k} L_{i_j} .$$

Складені спостереження та їхні перетворення Гоку іноді називають швидким перетвореням Гоку, тому що перетин перетворень Гоку вихідних спостережень може суттєво зменшити коло "параметрів-претеднтів" на представленість у вихідній вибірці.

Цей варіант вживання терміну "швидке перетворення" відрізняють від іншого, коли мають на увазі послідовний підрахунок значень акумуляторної функції спочатку для множин C, що є утворюють "грубе" розбиття S_o, а потім для "дрібніших" розбиттів максимумів акумуляторної функції за елементами попередніх розбиттів.

Акумуляторна функція визначається за перетворенням Гоку вихідної послідовності – чи послідовності складених спостережень - як функція множин C з S_p у абсолютному: A(C) - чи відносному: NA(C) – варіантах, як кількість, відповідно - частка, елементів перетворення Гоку послідовності, що мають непорожній перетин з досліджуваною множиною. Формально для кожного з цих варіантів вони задаються співвідношеннями:

$$A(C) = \Sigma_{i=1}^{N} \delta(C \cap L_i), \ , \ C \subseteq S_p \ , \qquad (1)$$

$$NA(C) = A(C)/N = N^{-1} \Sigma_{i=1}^{N} \delta(C \cap L_i), . C \subseteq S_p \ , \qquad (2)$$

де $\delta(C)$, $C \subseteq S_p$, дорівнює 1, якщо C непорожня множина і нулю, якщо C - порожня.

Для складених спостережнь у співвідношеннях (1), (2) сумування ведеться по всіх складених спостереженнях, а перетин C під знаком суми відбувається з перетвореннями Гоку складених спостережень.

У евклідових простpах множини C можуть бути кулями того чи іншого радіусу, гіперкубіми, компактами і т.і., як, це, наприклад, зроблено у свіввідношеннях (9), (10) нижче.

Власне, акумуляторна функція є засобом визначення множини параметрів Θ, представлених у вибірці в задачі оцінювання чи "найменшої" множини Θ в задачі кластеризації. За допомогою цієї функції в тому чи іншому варіанті визначення визначаються множини C того чи іншого типу, які містять в собі чи Θ в цілому, чи окремі значення параметрів з цієї множини. Такими множинами є множини, що є точками максимуму акумуляторної функції.

Класичний варіант перетворення Гоку визначається для випадку, коли S_o, S_p –прямокутники з R^2. Параметричне сімейство G_θ, $\theta=(\rho,\varphi)\in R^2$, є сімейством графіків прямих в нормальному варіанті задання:

$$G_\theta = G_{(\rho,\varphi)} = \{(x,y)\in R^2 \colon \rho = x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi\}.$$

Параметричне сімейство $L_s=L_{(x,y)}$, $s=(x,y)\in R^2$ – множина парметрів тих прямих, чиїм графікам може належати $s=(x,y)$:

$L_s=L_{(x,y)}=\{(\rho,\varphi)\in R^2: \rho = x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi\}$.

Спостереження $s=(x,y)$ можуть розглядатись у детермінованій схемі, коли (x,y) зв'язані співвідношенням $\rho = x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi$ для деякої пари $(\rho_{(x,y)}, \varphi_{(x,y)})$ парметрів, при чому у кожного спостереження ця пара параметрів своя, - чи може спостерігатися з помилкою. Тоді $y = \bar{y} + \varepsilon_{(x,y)}$, де $\varepsilon_{(x,y)}$- помилка спостереження. Помилки спостережень, що відповідають різним спостереженням вважаються незалежними, хоча і не обов'язково однаково рзподіленими.

Узагальненням цієї класичної схеми можна вважати задання множин параметричного сімейства G_θ, $\theta\in S_p$ для $S_o=R^m$, $S_p=R^n$ як графіків параметричного сімейства $y=g(x,\theta)$, $\theta\in R^l$ відображень з R^n в R^m . Последовність спостережень $s_1, s_2,..., s_N$ складається з пар $s_i=(x_i, y_i)$:

$$y_i = g(x_i,\theta_i)\in R^m,\ x_i \in R^n, \tag{3}$$

$$y_i = g(x_i,\theta_i)+ \varepsilon_i \in R^m,\ x_i \in R^n,\ i=1,\dots,N \tag{4}$$

Схему спостережень (3) будемо називати детермінованою, схему (4) – з помилками спостережень.

Перетворенням Гоку такої послідовності є послідовність L_1, $L_2,..., L_N$ множин з R^l, що мають вигляд\

$L_i=\{\theta\in R^l: y_i = g(x_i,\theta)\}$, $I=1,\dots,N$.

Зокрема, якщо вказане парметричне сімейство - це сімейство афінних: лінійне + зсув – перетворень з R^n в R^m параметром перетворення може бути матриця такого перетворення: $\theta=A\in R^{m\times(n+1)}$, тобто $l= m\times(n+1)$. Перетворення Гоку, акумуляторна функція та Гок-оцінювач визначаються за послідовністю спостережень (x_i,y_i), $i=1,N$, $x\in R^n$, $y\in R^m$ точок кривих афінного параметричного сімейства $y = A\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$, - $x\in R^n$, $y\in R^m$, A –m×(n+1)) матриця, $\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ - блочний вектор-стовпчик, утворений вектором-стовпчиком $x\in R^n$ та одиницею.

Згідно з (3), (4) ці спостереження можуть розглядатися у схемі без помилок (4) чи з помилками (5):

$$y_i = A_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$y_i = A_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{x_i}\ y_i = A_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix},\ x_i \in R^n,\ y_i \in R^m,\ A_i \in R^{m\times(n+1)}, i=1,\ldots,N, \tag{6}$$

значення змінної x невипадкові.

Як відзначалося вище, кожному спостереженню в схемі (5), (6) відповідає свій, взагалі кажучи, елемент $A_i \in R^{m\times(n+1)}$, $i=1,\ldots,N$ афінного сімейства.

В подальшому буде розглядатися тільки схема з помилками (6) та незалежними спостереженнями. Останнє означатиме, що помилки ε_{x_i}, $i=1,\ldots,N$ спостереження у точках x_i, $i=1,\ldots,N$ є незалежними. Розподіл ε_x будемо позначати P_x:

$$P_x(B^{(m)}) = P\{\varepsilon_x \in B^{(m)}\}, \tag{7}$$

$B^{(m)}$- борелівська множина з R^m.

Перетворення Гоку $L_{(x,y)}$ спостереження (x,y) за означенням є сукупність всіх афінних перетворень, що можуть перевести спостережуване значення x в спостережуване, можливо, збурене - значення y:

$$L_{(x,y)} = \{A \in R^{m\times(n+1)}: y = A\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\}. \tag{8}$$

Відповідно – перетворенням Гоку послідовності спостережень (x_i,y_i), $i=1,N$ є послідовність L_i, $i=1,N$ перетворень Гоку кожного із спостережень.

В подальшому $S_r(\theta)$ буде позначати кулю радіусу r с центром θ в евклідовому просторі матриць розмірності $m\times(n+1)$ із слідовою нормою (див.нижче).

Акумуляторна функція $A_r(B)$ та частотна акумуляторна функція $NA_r(B)$ визначаються відповідно співвідношеннями:

$$A_r(B) = A(S_r(B)) = \Sigma_{i=1}^{N} \delta(S_r(B)\cap L_i), \tag{9}$$

$$NA_r(B) = A_r(B)/N = N^{-1} \Sigma_{i=1}^{N} \delta(S_r(B)\cap L_i),\ B \in R^{m\times(n+1)}. \tag{10}$$

Норма в просторі матриць розуміється як слідова норма, породжена скалярним добутком в просторі матриць підходящої розмірності:

$$(A,B) = \mathrm{tr}\, A'B = \Sigma_i (A'B)_{ii} = \Sigma_{ij} a_{ij}b_{ij}.$$

Очевидним чином слідова норма є еквіваленною евклідовій нормі в лінійному просторі $R^{m\times(n+1)}$.

Теорема 1. Акумуляторна функція перетворення Гоку послідовності спостережень (x_i,y_i), i=1,N може бути представленою у вигляді:

$$A_r(B) = \Sigma_{i=1}^{N}\, \delta(S_r(B)\cap L_i) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\varepsilon_{x_i} \in S_{r\sqrt{1+\|x|_i|^2}}((B-A_i)\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}). \quad (11)$$

Доведення. Доведення випливає з теореми 2 [2], згідно з якою

$$A_r(B) = \Sigma_{i=1}^{N}\, \delta(S_r(B)\cap L_i) =$$

$$= \Sigma_{i=1}^{N}\, \delta(\, \|y_i - B\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}^2 \| \le r^2(1+\|x_i\|^2)\,),\ B \in R^{m\times(n+1)}. \quad (12)$$

Оскільки для кожного із спостережень

$$y_i = A_i\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{x_i},\ i=1,\ldots,N,$$

то умова

$$\|y_i - B\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}\|^2 \le r^2(1+\|x_i\|^2)$$

в (12) є еквівалентною умові

$$\| A_i\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{x_i} - B\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} \| \le r\sqrt{1+\|x_i\|^2},$$

що й доводить теорему.

Зауваження1. Звернемо увагу на те, що в (12) $S_r(B)$ – це куля радіусу r в слідовій нормі с центром в B в просторі матриць відповідної розмірності, тоді як $S_{r\sqrt{1+\|x_i\|^2}}((B-A_i)\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix})$- куля в R^m с центром в $(B-A_i)\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}$ радіусу $r\sqrt{1+\|x_i\|^2}$, i=1,…,N.

Наслідок 1. Параметрами бернулівських випадкових величин величини $\delta(S_r(B)\cap L_i)$, i =1,…,N є значення p_i, i=1,…,N , що визначаються співвідношеннями:

$$p_i = P\{\varepsilon_{x_i} \in S_{r\sqrt{1+\|x\|^2}}((B-A_i)\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad (13)$$

i=1,…,N.

Доведення. Доведення випливає із представлення в (12) умови, що визначає одиничне значення для кожної із бернулівських випадкових величин

$\delta(\varepsilon_{x_i} \in S_{r\sqrt{1+\|x\|^2}}((B - A_0)\begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix})$, i=1,…,N.

Теорема 2(Закон 0-1). Акумуляторна функція за нескінченого збільшення об''єму вибірки з імовірністю 1 є скінчена чи з імовірністю 1 нескінчена. Умовою скінченості є збіжність ряду з p_i, i=1,…,N, визначених співвідношеннями (13).

Доведення. Доведення повторює доведення результату для скалярних вимірювань з [8].

Теорема 3. З імовірністю одиниця

$$\lim_{N\to\infty}(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\delta(S_r(B)\cap L_i)) - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}p_i) = \lim_{N\to\infty}(NA_r(B)) - N^{-1}\sum_{i=1}^{N}p_i) = 0$$

де p_i, i=1,…,N, визначені співвідношенням (13).

Доведення.Як і у попередньоми випадку доведення повторює довдення скалярного відповідника з [8].

Зауваження 2. Для досліджуваного випадку векторних спостережень є справедливими наслідки відповідника теореми 3 для скалярних вимірювань.

Зауваження 2. Всі наведені твердження є вільними від обмежень на розподіли помилок спостережень. Крім того, розподіл може залежати від значення невипадкової змінної x.

Теорема 4. Акумуляторна функція перетворення Гоку послідовності K складених спостережень S_i, i=1,…,K може бути представленою у вигляді:

$A_r(B) = \Sigma_{i=1}^{K}\ \delta(S_r(B) \cap Ł_i) =$

$= \Sigma_{i=1}^{K}\ \delta(\ \|(Y_i - BX_i)X_i^{+}\| \le r)\ ,\ B \in R^{m\times(n+1)}$,

де

$Ł_i$, i=1,…,K – перетворення Гоку складених спостережень,

A^{+}- псевдообернена до матриці A,

Y_i, i=1,…,K – матриця, складена із вектор-стовпчиків, якими є компоненти y простих спостережень, що входять у i-те складене спостереження,

X_i, i=1,…,K матриця, складена із вектор-стовпчиків, якими компоненти x простих спостережень, що входять у i–те складене спостереження.

Список джерел

1. Hough P.V.C. Method and Means for Recognizing Complex Patterns. - U.S. Patent 3069354, 1962.

2. Донченко В.С., Кириченко М.Ф. Перетворення Гоку та псевдообернення . // Вісник Київського університету, серія "фізико-математичні науки", випуск .№ 4, 2001, сс.191-196.

3. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представлений возмущений псевдобратних матриц //Кибернетика и системный анализ . – 1997, №2, с.98-107.

4. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. -М.: Наука, 1977 г., 305 с.

5. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Возмущение псевдоинверсных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейних и нелинейных зависимостей// Проблемы упарвления и информатики. - №1, 2001, с.6-23.

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ГРУПОВОГО СИГНАЛУ В БАГАТОКАНАЛЬНИХ МОДЕМАХ

Чумак О.І., Лєсна Н.М., Киевский университет связи

Розглянуто одну з важливих особливостей багатоканальних модемів - відносну інваріантість їх завадостійкості до форми АФЧХ каналу зв'язку. Запропоновано методику оптимізації вибору параметрів багатоканального модему.

Бурхливий розвиток інформатизації у світі сприяв і визначив передумови створення платформи концепції "інформаційної супермагістралі". Проблеми телекомунікацій стають більш необхідні широкому колу людей, оскільки глобальна доступність до розмаїття інформації та її оперативність багато в чому обумовлює не тільки рівень, але і саме існування вільного суспільства. Питання, пов'язані з модемними технологіями, як складовою частиною "магістралі", є важливим аргументом для телекомунікаційних мереж нашої держави.

Основною проблемою високошвидкісної передачі проводовими каналами тональної частоти (ТЧ) є подолання невизначеності частотних характеристик, зумовлених неможливістю апріорного виміру цих характеристик (наприклад, в комутованій мережі, або зміною характеристик за часом).

Багатоканальні модеми (БМ) відомі, добре зарекомендували себе в каналах з розсіюванням. Вперше такі модеми стали застосовувати в телефонних радіоканалах декаметрового діапазону, оскільки їм властива довга посилка, яка дозволяє ефективніше