ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В ПАРАМЕТРИЧНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

Босікова І.І.,
Тернопільська академія народного господарства

Матриці з поліноміальними елементами дістали широке практичне застосування, зокрема системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з λ-матрицями виникають в динамічному програмуванні, будівельній механіці, в некласичних задачах для диференційних рівнянь, в алгоритмах оптимізації електронних схем. Тому побудова ефективних методів обчислення невідомих для таких систем – потрібна і достатньо непроста задача. М.О.Недашковським були розглянуті різні підходи до розв'язування СЛАР з квадратними та прямокутними λ-матрицями. Однак, в багатьох застосуваннях, наприклад, в раніше згаданих некласичних задачах для диференціальних рівнянь та в алгоритмах оптимізації електронних схем виникає необхідність розгляду іншого випадку – СЛАР з тригонометричними поліномами. Тригонометричні многочлени як ефективний засіб наближення функцій знаходять широке застосування і в багатьох інших задачах.

Розглядається система:

$$A(\lambda)X(\lambda)=B(\lambda), \qquad (1)$$

де $A(\lambda)$ – регулярна матриця порядку $n\times n$, елементами якої є комплексні многочлени степеня $l; B(\lambda)$ – вектор комплексних многочленів степеня l.Таким чином, коефіцієнти системи (1) можуть бути подані у вигляді:

$$a_{ij}(\lambda)=\sum_{k=-l}^{l} a_{ij}^{(k)}e^{ik\lambda} \qquad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n+1}\right),$$

де

$$2a_{ij}^{(k)}=\begin{cases} a_k-ib_k, & k\ge 0;\\ a_{-k}+ib_{-k}, & k<0,\end{cases}$$

λ і коефіцієнти $a_{ij}^{(k)}(\lambda)$ $\left(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n+1}\right)$ беруться з поля дійсних чисел.

Для пошуку розв'язку системи (1) розглядаються два підходи. Перший полягає у побудові алгоритмів, які узагальнюють прямі числові методи лінійної алгебри, що грунтуються на неунітарних перетвореннях: перший та другий алгоритми відсічених систем, методи оптимального виключення, Жордана та обрамлення.

Теорема. Для алгоритмів розв'язування СЛАР з тригонометричними елементами, які базуються на неунітарних перетвореннях, мінори, що знаходяться на головній діагоналі є дільниками мінорів на порядок вищих.

Доведення. Алгоритми, що базуються на неунітарних перетвореннях, одержуються шляхом зведення матриці системи до канонічного або трикутного вигляду в результаті множення матриці $A(\lambda)$ на праві та ліві елементарні матриці. При цьому елементами головної діагоналі отриманої матриці є головні мінори матриці $A(\lambda)$.

Матриця тригонометричних поліномів еквівалентна лише єдиній канонічній матриці і система найбільших спільних дільників матриці $A(\lambda)$ однозначно визначається системою інваріантних множників [1]:

$$d_1 = P_{11}^{(1)};$$

$$d_i = P_{i-1,i-1}^{(i-1)} P_{i,i}^{(i)}, \qquad \left(i = \overline{2,n}\right).$$

У зв'язку з тим, що комплексний поліном d_i ділиться на d_{i-1}, будь який мінор на порядок вищий за (i-1) ділиться на d_{i-1} без остачі. Теорему доведено.

Зупинимось детальніше на другому алгоритмі відсічених систем. Він полягає у використанні розв'язків відсічених систем порядку (k-1) для визначення невідомих заданої відсіченої системи порядку k [2]. Якщо через

$$P_{sp}^{(k)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \ldots s-1\; s\;\; s+1 \ldots k \\ 1\,2\,3 \ldots s\text{-}1\;\; p\;\; s+1 \ldots k \end{bmatrix}$$

позначити мінор, який знаходиться на перетині рядків 1,2, ..., s, ..., k і стовпців 1,2,..., p,..., k, то при відомих розв'язках усіх відсічених систем до порядку k-1 включно, невідомі для СЛАР порядку $1 \le k \le n$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ji}(\lambda) z_j^{(k)}(\lambda) = a_{k+1,i}(\lambda), \qquad \left(i=\overline{1,k}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(\lambda) x_j^{(k)}(\lambda) = a_{i,k+1}(\lambda), \qquad \left(i=\overline{1,k}\right),$$

можуть бути обчислені за рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{cases} b_{ik}(\lambda) = \dfrac{P_{ik}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \dfrac{a_{ik}(\lambda)P_{k-1,k-1}^{(k-1)}(\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{ij}(\lambda)P_{jk}^{(k-1)}(\lambda)}{a_{kk}(\lambda)P_{k-1,k-1}^{(k-1)}(\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{kj}(\lambda)P_{jk}^{(k-1)}(\lambda)}; \\ z_k^{(k)}(\lambda) = b_{k+1,k}(\lambda); \\ z_j^{(k)}(\lambda) = \dfrac{P_{k+1,j}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \dfrac{P_{k+1,j}^{(j)}(\lambda)P_{kk}^{(k)}(\lambda) - \sum\limits_{i=j+1}^{k} P_{ij}^{(j)}(\lambda)P_{k+1,i}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)P_{jj}^{(j)}(\lambda)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{ki}(\lambda) = \dfrac{P_{ki}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \dfrac{a_{ki}(\lambda)P_{k-1,k-1}^{(k-1)}(\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{ji}(\lambda)P_{kj}^{(k-1)}(\lambda)}{a_{kk}(\lambda)P_{k-1,k-1}^{(k-1)}(\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{jk}(\lambda)P_{kj}^{(k-1)}(\lambda)}; \\ x_k^{(k)}(\lambda) = b_{k,k+1}(\lambda); \\ x_j^{(k)}(\lambda) = \dfrac{P_{j,k+1}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \dfrac{P_{j,k+1}^{(j)}(\lambda)P_{kk}^{(k)}(\lambda) - \sum\limits_{i=j+1}^{k} P_{ji}^{(j)}(\lambda)P_{i,k+1}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)P_{jj}^{(j)}(\lambda)}. \end{cases}$$

Тут $x_j^{(n)}(\lambda)$ є невідомими системи (1). При цьому:

$$\deg\left[P_{j,k+1}^{(k)}(\lambda)\right] = \deg\left[P_{k+1,j}^{(k)}(\lambda)\right] = kl,$$

тому що при обчисленнях комплексний поліном

$$P_{k+1,j}^{(j)}(\lambda)P_{kk}^{(k)}(\lambda)-\sum_{i=j+1}^{k}P_{ij}^{(j)}(\lambda)P_{k+1,i}^{(k)}(\lambda)$$

без остачі ділиться на комплексний многочлен $P_{jj}^{(j)}(\lambda)$ за доведеною теоремою.

Реалізація методу для щільно заповнених систем вимагає $O(n^5 l^2)$ арифметичних операцій.

В основу другого підходу покладається зведення СЛАР з комплексними λ-матрицями до числової СЛАР спеціального вигляду. Для того, щоб звести систему (1) до числової системи пропонується формально шукати її розв'язок у вигляді відношення двох комплексних поліномів:

$$X(\lambda)=\frac{\sum\limits_{j=-nl}^{nl}e^{ij\lambda}Y_j}{\sum\limits_{j=-nl}^{nl}e^{ij\lambda}z_j},$$

де $Y_j\ \left(j=\overline{-nl,nl}\right)$ – невідомі вектори розмірності n; $z_j\ \left(j=\overline{-nl,nl}\right)$ – невідомі скалярні величини.

Якщо подати матрицю $A(\lambda)$ і вектор $B(\lambda)$ у вигляді матричних многочленів:

$$A(\lambda)=A_{-l}(\lambda)e^{-il\lambda}+\ldots+A_0(\lambda)+\ldots+A_l(\lambda)e^{il\lambda};$$

$$B(\lambda)=B_{-l}(\lambda)e^{-il\lambda}+\ldots+B_0(\lambda)+\ldots+B_l(\lambda)e^{il\lambda},$$

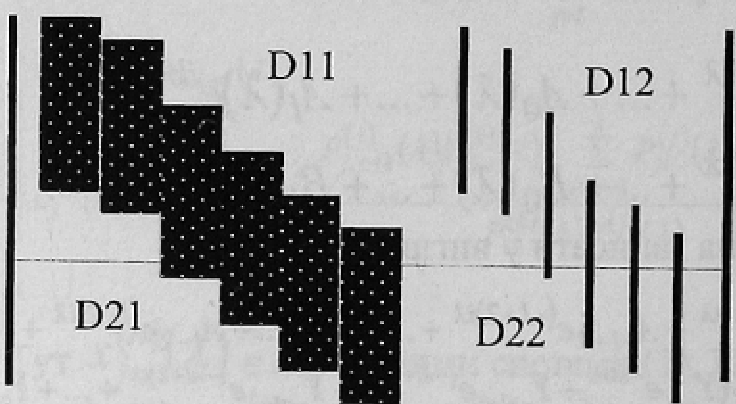
то систему (1) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}&(A_{-l}e^{-li\lambda}+A_{-l+1}e^{(-l+1)i\lambda}+A_{-l+2}e^{(-l+2)i\lambda}+\ldots+A_0+\ldots+A_{l-2}e^{(l-2)i\lambda}+\\&+A_{l-1}e^{(l-1)i\lambda}+A_le^{li\lambda})\times(Y_{-nl}e^{-nli\lambda}+Y_{-nl+1}e^{(-nl+1)i\lambda}+Y_{-nl+2}e^{(-nl+2)i\lambda}+\ldots+Y_0+\ldots\\&+Y_{nl-2}e^{(nl-2)i\lambda}+Y_{nl-1}e^{(nl-1)i\lambda}+Y_{nl}e^{inl\lambda})=(B_{-l}e^{-il\lambda}+B_{-l+1}e^{(-l+1)i\lambda}+B_{-l+2}e^{(-l+2)i\lambda}+\ldots\\&+B_0+\ldots+B_{l-2}e^{(l-2)i\lambda}+B_{l-1}e^{(l-1)i\lambda}+B_le^{il\lambda})\times(z_{-nl}e^{-nli\lambda}+z_{-nl+1}e^{(-nl+1)i\lambda}+z_{-nl+2}e^{(-nl+2)i\lambda}\\&+\ldots+z_0+\ldots+z_{nl-2}e^{(nl+2)i\lambda}+z_{nl-1}e^{(nl+1)i\lambda}+z_{nl}e^{nli\lambda}).\end{aligned}$$

Згрупувавши члени в лівій і правій частинах рівняння при однакових степенях λ, потім прирівняти коефіцієнти при однакових степенях λ, можна одержати систему $n[2(ln+l)+1]$ рівнянь з $(n+1)(2ln+1)$ невідомими:

$$\begin{cases} A_{-l}Y_{-nl} - B_{-l}z_{-nl} = 0\,; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{s=-l}^{l} A_s Y_{-nl-s} - \sum\limits_{s=-l}^{l} B_s z_{-nl-s} = 0\,; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{s=-l}^{l} A_s Y_{-s} - \sum\limits_{s=-l}^{l} B_s z_{-s} = 0\,; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{s=-l}^{l} A_s Y_{nl-s} - \sum\limits_{s=-l}^{l} B_s z_{nl-s} = 0\,; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_l Y_{nl} - B_l z_{nl} = 0\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Матриця числової системи (2) має специфічну структуру заповнення. За схемою розрізання пропонується розбити її на блоки [3]:



де D_{11} – квадратна матриця розміру (2nl+1)n, а D_{12}, D_{21}, D_{22} – прямокутні матриці відповідних розмірів.

За умовою det $A \neq 0$. Цього достатньо для того, щоб значення мінора D_{11} було відмінним від нуля також. Тоді надавши z_{2nl+1} будь-яке значення, наприклад 1, можна записати неоднорідну систему:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

розв'язки якої співпадають з розв'язками заданої системи (2) з точністю до множника.

Пошук невідомих Y і Z можна здійснити за два кроки: спочатку визначити вектор Z із системи рівнянь:

$$\left(D_{22} - D_{21}\left(D_{11}^{-1}D_{12}\right)\right)Z = B_2 - D_{21}\left(D_{11}^{-1}B_1\right),$$

а потім із системи рівнянь:

$$D_{11}Y = B_1 - D_{12}Z$$

обчислити вектор Y.

Такий підхід дозволяє звести задану числову систему (2) до двох систем меншого порядку. На повну реалізацію схеми розрізання потрібно $O(l^2n^3+n^\beta l^\beta)$ арифметичних операцій. Порівняно з алгоритмами, що оперують з тригонометричнимим многочленами, на виконання яких необхідно $O(l^2n^5)$ операцій, схема розрізання, як видно, має значні переваги.

Список джерел

1. ХорнР.,Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655с.

2. Недашковський М.О. Методи та алгоритми комп'ютерної алгебри для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами: Автореф. Дис. Докт. Фіз.-мат. наук. – Харків, 1995. – 43с.

3. Недашковський М.О. Швидка схема розв'язання для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями // Доп. НАН України. Серія А. – 1995. – № 4. – С.23-29.