СИНТЕЗ УРАВНЕНИЙ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Коваль В.Н., Кук Ю.В.
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Для большинства реальных систем управления (экономических, экологических, биологических, военных систем, систем безопасности и т.п.) построение моделей на основании общих законов естествознания не представляется возможным. Если математическая модель известна с точностью до неизвестных параметров, то она может быть найдена с помощью аппарата множественной идентификации, разработанного В.М. Кунцевичем [1]. Применение этого аппарата требует знания априорной информации о связях неизвестных параметров в исследуемой системе. Целью данного доклада является построение модели системы в том случае, когда такая априорная информация не известна. В докладе предложен структурный метод построения моделей, основанный на аппарате бассейнов [2], при котором сложная система может быть описана сравнительно просто с применением только небольшого числа переменных. Кроме того, этот метод, в отличие от метода индуктивного моделирования МГУА, разработанного А.Г. Ивахненко [3], учитывает воздействие случайных возмущений на все переменные. Учет таких возмущений позволяет строить несмещенные модели, которые при увеличении числа наблюдений сходятся к истинным моделям.

Системы управления с оптимизацией прогноза

Будем различать следующие типы переменных системы: факторные, управляющие и целевые. Факторные $X(t)$— переменные, которые можно только наблюдать, но не управлять ими. Управляющие $U(t)$— переменные, для которых можно устанавливать желаемые значения. Целевые $Y(t)$— переменные, на которые передается воздействие от изменений управляющих и факторных переменных. Предположим, что значения всех переменных системы наблюдались в моменты времени $t=1,...,n$. Управление сложной системой будем в моменты времени $t=1,...,n$. Управление сложной системой будем осуществлять по схеме, которая представлена на рис.1.

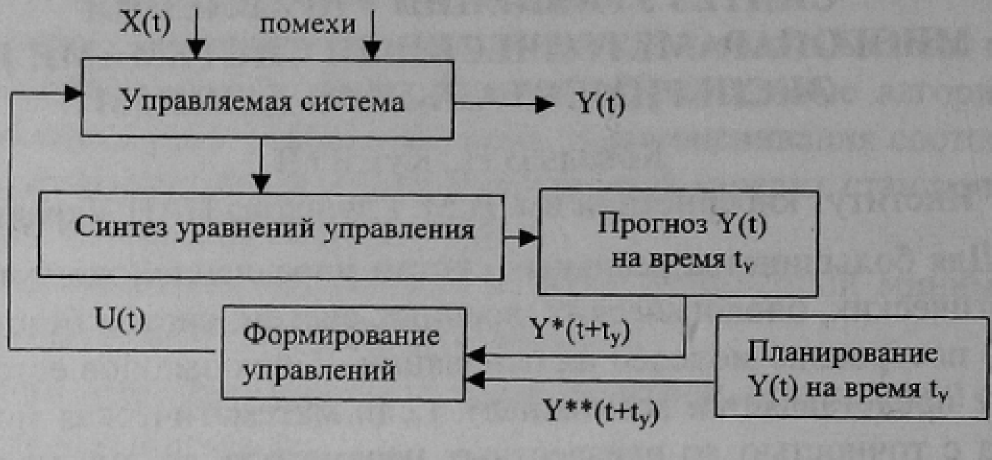

Рисунок 1 – Схема управления сложной системой

По экспериментальным данным входных ($X(t)$, $U(t)$) и выходных $Y(t)$ параметров системы в моменты времени $t = 1,...,n-1$ строится ее модель в виде системы разностных уравнений с запаздывающими аргументами. Эта система уравнений представляет собой рекуррентные формулы, по которым легко получить прогнозируемые значения переменных в последующие моменты времени $t + t_y = n, n+1,..., n + N_y$. В зависимости от значений управляющих переменных, которые будут выбраны в моменты времени $n, n+1,..., n + N_y$ получатся различные значения прогнозируемых целевых переменных $Y^*(t + t_y)$. Выбираются они такими, чтобы сумма квадратов отклонений прогнозируемых значений целевых переменных от планируемых $Y^{**}(t + t_y)$ была минимальной на интервале упреждения:

$$\sum_{t_y=0}^{N_y} [Y^*(n + t_y) - Y^{**}(n + t_y)]^2 .$$

В момент $t = n$ на вход системы подаются значения управляющих переменных $U(t + t_y)$, полученные для первого момента времени интервала упреждения ($t_y = 0$). На новом такте вся процедура нахождения управляющих значений переменных повторяется заново: синтезируются новые уравнения управления, использующие новую точку экспериментальных данных, а также пересчитывается последовательность управляющих воздействий.

Бассейны переменных

Для управления системой с оптимизацией прогноза прежде всего необходимо синтезировать разностные уравнения управления. Их синтез состоит из следующих этапов: 1) определение исходного множества переменных, из которых будут строиться уравнения; 2) нахождение переменных, входящих в каждое разностное уравнение (переменные бассейна); 3) определение вида этого уравнения.

В отличие от МГУА [3], в котором переменные модели находятся многорядной селекцией, или при малом их числе — полным перебором, в структурном методе переменные модели находятся с помощью *бассейнов*. Кроме того, построение модели регрессионными методами и методом МГУА основано на методе наименьших квадратов и связанной с ним системе нормальных уравнений. В структурном методе нахождение уравнений управления основано на прямом преобразовании исходных структурных соотношений в систему уравнений, которая отличается от системы нормальных уравнений дополнительными членами, не стремящимися к нулю при увеличении числа наблюдений. Нами доказано [2], что синтезируемые уравнения структурным методом при увеличении числа наблюдений сходятся к истинным уравнениям в отличие от уравнений, получаемых регрессионными методами и методом МГУА.

В качестве исходного множества переменных, из которых будут строиться уравнения возьмем множество, включающее все переменные системы, а также переменные, полученных путем их сдвига по времени на $1,2,...,Q$ момента назад. Назовем его исходным множеством переменных A_Q с запаздыванием на Q тактов. Для измерения связи между переменными будем использовать частные коэффициенты корреляции, которые измеряют статистическую связь, «очищенную» от опосредованного влияния других переменных. Под значимостью этой связи будем понимать значимость (с вероятностью ошибки α) значения частного коэффициента корреляции между переменными [4].

Определение 1. Бассейном k-го порядка для целевой переменной v_i назовем подмножество B факторных и управляющих переменных, а также всевозможных их произведений (с числом сомножителей не более k+1), включающее все переменные, которые имеют значимый (относительно множества B) частный выборочный коэффициент корреляции с v_i.

Определение 2. Дифференциальным бассейном k-го порядка с запаздыванием на Q тактов для переменной $v_i(t)$ назовем подмножество B исходного множества A_Q переменных с запаздыванием на Q тактов, а также всевозможных их произведений (с числом сомножителей не более k+1), включающее все переменные, которые имеют значимый (относительно множества B) частный выборочный коэффициент корреляции с переменной

$$\Delta v_i(t) / \Delta t = (v_i(t + \Delta t) - v_i(t)) / \Delta t .$$

Алгоритм построения бассейна описан в [2]. Он состоит из двух взаимосвязанных алгоритмов: 1) включения переменных в бассейн и 2) исключения переменных из бассейна. При построении бассейнов используются формулы для выборочного коэффициента корреляции и выборочного частного коэффициента корреляции, а также процедуры проверки их значимости с заданной вероятностью ошибки α [4].

Аналогичным образом строится дифференциальный бассейн k-го порядка с запаздыванием на Q тактов для переменной $v_i(t)$. В качестве исходного множества берется исходное множество переменных $X(t)$ с запаздыванием на Q тактов, а также всевозможные их произведения (с числом сомножителей не более k+1). Из переменных, вошедших в этот бассейн, синтезируется разностное уравнение для переменной $v_i(t)$.

Синтез и анализ уравнений управления структурным методом

Будем обозначать истинные неизвестные значения переменных системы со штрихом: v_i', $i = 1,...,N$, наблюдаемые, искаженные случайными возмущениями, — без штриха: $v_i = v_i' + \delta_i$, $i = 1,...,N$, где $\delta_1,...,\delta_N$ — случайные возмущения, воздействующие на переменные системы. Связь между наблюдаемыми переменными называется *структурной* [4], в отличие от функциональной связи между истинными значениями переменных.

Пусть система управления описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающими аргументами:

$$\left(\frac{dv'_i}{dt}\right)_0 = f_i(v'_{1,0}, v'_{1,-1}, v'_{1,-2}, \ldots, v'_{1,-l}, \ldots, v'_{N,0}, v'_{N,-1}, \ldots, v'_{N-l}),\ i = 1, \ldots, N. \quad (1)$$

Здесь первый индекс аргумента указывает номер переменной, а второй — запаздывание. Функции f_i, $i = 1, \ldots, N$ в (1) неизвестны.

Синтез уравнений управления структурным методом состоит из следующих шагов.

1) Для каждого k, равного 1,2 …, находится дифференциальный бассейн k-го порядка с запаздыванием на Q тактов для переменной $v_i(t)$ из исходного множества переменных A_Q;

2) Истинные дифференциальные уравнения (1) заменяются конечно-разностными уравнениями, в которых используются переменные дифференциального бассейна k-го порядка:

$$\left(\frac{\Delta v'_i}{\Delta t}\right)_0 = F_i(v'_{1,0}, v'_{1,-1}, v'_{1,-2}, \ldots, v'_{1,-l}, \ldots, v'_{N,0}, v'_{N,-1}, \ldots, v'_{N-l}),\ i = 1, \ldots, N. \quad (2)$$

где $\Delta v'_i = v'_i(t + \Delta t) - v'_i(t)$, а F_i - полиномиальная аппроксимация неизвестной функции f_i отрезком ряда Тейлора до производных k+1-го порядка:

$$\left(\frac{\Delta v'_i}{\Delta t}\right)_0 = b_{i0} + \sum_{j=1}^{L_k} b_{ij} z_{ij},\ i = 1, \ldots, N. \quad (3)$$

Здесь L_k — равно числу всех членов аппроксимирующего отрезка ряда Тейлора, содержащих переменные; z_{ij} обозначает переменную, либо произведение переменных, для j-го такого члена, а b_{ij} — соответствующий коэффициент.

3) При предположении некоррелированности случайных возмущений, воздействующих на параметры, коэффициенты b_{ij} в (3) вычисляются по следующим формулам:

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{z}_{i,1} & \dots & \bar{z}_{i,0} & \dots & \bar{z}_{i,L_k} \\ \bar{z}_{i,1} & w_i(1,1)-\sigma_1^2 & \dots & w_i(0,1) & \dots & w_i(L_k,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{z}_{i,L_k} & w_i(L_k,1) & \dots & w_i(0,L_k) & \dots & w_i(L_k,L_k)-\sigma_k^2 \end{vmatrix}}{\left|w_i(\nu,\mu,\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)\right|_{\nu,\mu=1,\dots,L_k}},$$

$$b_{i0} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{z}_{i,0} & \bar{z}_{i,1} & \dots & \bar{z}_{i,L_k} \\ w_i(0,1) & w_i(1,1)-\sigma_1^2 & \dots & w_i(1,L_k) \\ . & . & \dots & . \\ w_i(0,L_k) & w_i(L_k,1) & \dots & w_i(L_k,L_k)-\sigma_k^2 \end{vmatrix}}{\left|w_i(\nu,\mu,\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)\right|_{\nu,\mu=1,\dots,L_k}},$$

где

$$\left|w_i(\nu,\mu,\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)\right|_{\nu,\mu=1,\dots,L_k} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{z}_{i,1} & \dots & \bar{z}_{i,L_k} \\ \bar{z}_{i,1} & w_i(1,1)-\sigma_1^2 & \dots & w_i(1,L_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{z}_{i,L_k} & w_i(L_k,1) & \dots & w_i(L_k,L_k)-\sigma_k^2 \end{vmatrix},$$

$z_{i,0}(t) = \dfrac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$, а $w_i(\nu,\mu) = \dfrac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(z_{i\nu}(t) - \bar{z}_{i\nu})(z_{i\mu}(t) - \bar{z}_{i\mu})$,

$\bar{z}_{ij} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_{ij}(t)$ — соответственно выборочные ковариации и средние переменных; $\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2$ дисперсии случайных возмущений, воздействующих соответственно на переменные z_{ij}, $j = 1,\dots,L_k$.

4) Для каждой переменной находятся разностные уравнения с использованием следующего по порядку бассейна. При этом каждый

раз вычисляется характеристика качества построенного уравнения (среднеквадратическая ошибка или коэффициент множественной корреляции). Если окажется, что при переходе к бассейну более высокого порядка приращение этой характеристики меньше некоторого порога, то останавливаются на предыдущем уравнении.

Анализ уравнений управления, полученных структурным методом, позволяет проверить изучаемую систему на устойчивость при малых отклонениях. Устойчивость нелинейной системы при малых отклонениях определяется корнями характеристического уравнения, построенной системы разностных уравнений, полученной при линейном (первом) приближении. Если все корни характеристического уравнения первого приближения имеют неотрицательную действительную часть, то система устойчива при малых отклонениях, независимо от отброшенных при линеаризации уравнений членов второй и более высокой степени. Степень стабильности изучаемой системы определяется величиной наименьшей по абсолютной величине действительной частью корня характеристического уравнения.

Пример

Структурным методом была получена модель экономики России в виде системы линейных разностных уравнений с запаздывающими аргументами. Для ее построения учитывались ежемесячные данные за период с 1991 г. по 2000 г. Исходное множество переменных, по которым строилась модель, составило 47 экономических показателей: X_1 – уровень инфляции (индекс потребительских цен — ИПЦ), X_2 – минимальная заработная плата, X_3 – расходы на потребление и т.д.

Была синтезирована следующая система, состоящая из 28 уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta X_1}{\Delta t} = 30.123 - 0.207X_9 - 0.00049X_{10} - 0.000475X_{20} - 0.1707X_{23} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\Delta X_{28}}{\Delta t} = -1189.338 + 549.807X_7 + 0.204X_{20} \end{cases}$$

Путем совместного интегрирования этих уравнений получен прогноз показателей. Сравнение прогнозируемых и реальных показателей показало их хорошее совпадение в следующем месяце (например, наибольшая относительная ошибка прогноза для инфляции составила всего лишь 0,1%).

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\lambda^{28}+6.62\lambda^{27}+0.199\lambda^{26}+0.36\lambda^{25}+0.44\lambda^{24}+0.38\lambda^{23}+0.25\lambda^{22}+$$
$$+0.12\lambda^{21}+4.81\lambda^{20}+1.43\lambda^{19}+0.336\lambda^{18}+0.06\lambda^{17}+0.009\lambda^{16}+$$
$$+0.0016\lambda^{15}+0.0001\lambda^{14}+0.327\lambda^{13}+\lambda=0$$

Поскольку корни этого уравнения: $\lambda_{15,16}=0.03\pm0.15i$, $\lambda_{17,18}=0.01\pm0.13i$ $\lambda_{19,16}$, $\lambda_{19,20}=0.08\pm0.03i$, $\lambda_{25}=0.01$, $\lambda_{28}=5.14$ имеют положительные действительные части, то рассматриваемая экономическая система неустойчива.

Выводы

Таким образом, в докладе предложен структурный метод синтеза уравнений управления многопараметрическими системами. В отличие от известных методов (регрессионных, МГУА) он учитывает искажающее влияние возмущающих факторов не только на выходные, но и на входные параметры системы. Разработан аппарат бассейнов различных порядков для нахождения множества переменных, входящих в эти уравнения. Показана эффективность структурного метода при решении реальных практических задач.

Список источников

1. В.М. Кунцевич, А.В. Кунцевич. Активная идентификация и управление при ограниченных шумах (возмущениях).//Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №1. –С. 147–157.

2. Коваль В.Н. Кук Ю.И. Индуктивный поиск закономерностей в многопараметрических системах.//Труды международной конференции по индуктивному моделированию. – Львов, Институт информационной инфраструктуры, 2002.– С. 55–61

3. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – Киев : Техніка, 1975. – 312 с.

4. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. Пер.с англ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.

5. Neyman J. and Scott E.L. On certain methods of estimating the linear structural relation. Ann. Math. Statist., 22, 1951, 352.