ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ МОМЕНТАМ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Приходько С.Б., Украинский государственный морской технический университет имени адмирала Макарова

Систему с конечномерными вектором состояния и значениями входного и выходного сигналов, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ), принято называть стохастической дифференциальной системой (СДС). В ряде случаев СДУ может содержать неизвестные параметры и, как правило, всегда содержит параметры, известные с ограниченной точностью. Так, в уравнениях качки судна на нерегулярном волнении входят коэффициенты демпфирования, которые определяются по приближенным формулам. В свою очередь эти коэффициенты используются в системе управления бортовыми рулями для уменьшения качки судна. А во время плавания судна можно получать оперативную информацию лишь о выходных сигналах (угловых перемещениях, скоростях и т.п.). Поэтому возникает задача оценивания неизвестных параметров СДС по выходным сигналам – задача параметрической идентификации.

Для параметрической идентификации СДС применяются различные методы: метод максимального правдоподобия, метод моментов (ММ), обобщенный метод моментов (GMM) и ряд других методов [1]. Их использование для оценки параметров СДУ ограничивается случаями, когда известна плотность распределения (либо условная плотность) как функция параметров системы и ее входных и выходных сигналов. Исключение составляет модификация ММ, в которой параметры СДУ определяются из уравнений для статистических моментов, для построения которых знание указанных выше функций не обязательно. Однако при применении ММ, когда число оцениваемых параметров меньше числа уравнений для моментов, не все моментные уравнения используются для оценки параметров СДУ. В свою очередь в GMM учитываются все моментные уравнения (условия), однако для их построения требуется знать соответствующие плотности распределения.

В данной работе при применении GMM для параметрической идентификации СДС предлагается выбор моментных условий осуществлять либо из системы уравнений для статистических моментов k-го порядка, либо по предлагаемой формуле, которая, как и система для моментов, строится на основе СДУ с использованием формулы Ито. Аналогичный подход был реализован для ММ в работах [2-4].

Теоретическое описание

Пусть стохастический n-размерный вектор $\boldsymbol{x}(t)$ описывается СДУ Ито вида

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)dt + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{W}(t), \tag{1}$$

где $d\boldsymbol{W}(t)$ – векторный процесс Винера.

Для произвольной дважды дифференцируемой функции $y(\boldsymbol{x})$ формула Ито определяется как

$$dy(\boldsymbol{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y'_{x_i}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} y''_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\right]_{ij} \right\} dt +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} y'_{x_i}(\boldsymbol{x}) g_{ij}(\boldsymbol{x},t) dW_j(t). \tag{2}$$

Усредняя (2), имеем формулу

$$\frac{d\langle y(\boldsymbol{x})\rangle}{dt} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} y'_{x_i}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x},t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} y''_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)\right]_{ij} \right\rangle, \tag{3}$$

в которой $\langle \ \rangle$ означает усреднение по времени.

Формула (3) может быть использована для получения системы уравнений для статистических моментов k-го порядка, если полагать функцию $y(\boldsymbol{x})$ соответственно равной $x_i^2(t)$, $x_i(t)x_j(t)$, $x_i^3(t)$, $x_i^2(t)x_j(t)$, $x_i(t)x_j^2(t)$, $x_i^4(t), \ldots, x_j^k(t)$.

Используя (3), система уравнений для статистических моментов может быть записана как

$$\dot{a}(t) = A(a,t)\theta + b(a,t), \tag{4}$$

где a – вектор статистических моментов; θ – $k \times 1$ вектор параметров уравнения (1).

Полагая $\dot{a}(t) = 0$ в (4) получим

$$A(a)\theta = b(a). \tag{5}$$

Параметры СДУ (1) определяются из решения системы уравнений для статистических моментов (5).

Преобразуем (5) в систему вида

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \tag{6}$$

которую предлагается применять в качестве моментных условий. Моментные условия (6) для параметрической идентификации СДС методом GMM могут быть получены и без построения системы (4), что и будет сделано ниже.

В общем случае, когда число уравнений для статистических моментов больше количества оцениваемых параметров, не возможно подобрать оцениваемые параметры так, чтобы все уравнения (6) были тождественно равны нулю. Однако возможно выбрать оцениваемые параметры таким образом, чтобы получить значения левых частей этих уравнений (6) как можно ближе к нулю, то есть найти θ как

$$\theta = \arg\min_{\theta} m(\theta, a)^T\, m(\theta, a). \tag{7}$$

Как показал Hansen [1], в результате решения задачи (7) получаются состоятельные, но неэффективные оценки вектора θ. Для приближения оценок θ к эффективным может быть применен метод GMM, суть которого сводится к решению следующей задачи:

$$\theta = \arg\min_{\theta} \{m(\theta, a)\}^T\, \Omega \{m(\theta, a)\}, \tag{8}$$

где Ω – $m \times m$ положительно полуопределенная матрица.

В настоящее время вектор $m(\theta, a)$ для оценки параметров СДУ методом GMM строится на основе известной плотности распределения (либо условной плотности) как функции θ и x. К сожалению, эти плотности распределения известны для ограниченного числа СДУ.

В качестве альтернативного подхода для построения моментных условий можно предложить использование формулы Ито. Учитывая (3), введем следующий $m \times 1$ вектор $z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, компоненты которого определяются как

$$z_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} y'_{x_i}(x) f_i(x,t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} y''_{x_i x_j}(x) \left[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \right]_{ij}. \quad (9)$$

Тогда вектор $\boldsymbol{m}(\theta, \boldsymbol{a})$ можно определить как

$$\boldsymbol{m}(\theta, \boldsymbol{a}) = \mathrm{E}[z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})]. \quad (10)$$

Матрица $\boldsymbol{\Omega}$ является матрицей отстояний или матрицей весов и определяется как $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{W}_D^{-1}$. Здесь $\boldsymbol{W}_D$ – диагональная матрица, элементы которой находятся как

$$w_{ii} = \mathrm{Var}[z_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})]. \quad (11)$$

Для примера рассмотрена параметрическая идентификация СДС, поведение которой описывается СДУ второго порядка

$$\ddot{\phi} + b_1\dot{\phi} + b_2|\dot{\phi}|\dot{\phi} + c_1\phi + c_3\phi^3 = n(t), \quad (12)$$

где $n(t)$ – белый шум с коэффициентом интенсивности N_0.

Предполагается, что в моменты времени t_i известны значения выходных сигналов $\phi(t_i)$ и $\dot{\phi}(t_i)$. Требуется определить точечные оценки $\widehat{b}_1$, $\widehat{b}_2$, $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_3$ и $\widehat{N}_0$ соответствующих неизвестных параметров уравнения (1) b_1, b_2, c_1, c_3 и N_0.

Обозначив, $x_1 = \phi$ и $x_2 = \dot{\phi}$, преобразуем (12) в систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -b_1 x_2 - b_2|x_2|x_2 - c_1 x_1 - c_3 x_1^3 + n(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя формулу (9) для системы (13) и функций x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_1^3, x_2^3, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, $x_1^2x_2^2$, $x_1^3x_2$, $x_1x_2^3$, x_1^4, x_2^4 определим $z_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$

$$
\begin{aligned}
&z_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_2 b_1 + x_2|x_2|b_2 + x_1 c_1 + x_1^3 c_3;\\
&z_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_2^2 b_1 + x_2^2|x_2|b_2 + x_1 x_2 c_1 + x_1^3 x_2 c_3 - 0{,}5N_0;\\
&z_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1 x_2 b_1 + x_1 x_2|x_2|b_2 + x_1^2 c_1 + x_1^4 c_3 - x_2^2;\\
&z_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_2^3 b_1 + x_2^3|x_2|b_2 + x_1 x_2^2 c_1 + x_1^3 x_2^2 c_3 - x_2 N_0;\\
&z_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1^2 x_2 b_1 + x_1^2 x_2|x_2|b_2 + x_1^3 c_1 + x_1^5 c_3 - 2x_1 x_2^2;\\
&z_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1 x_2^2 b_1 + x_1 x_2^2|x_2|b_2 + x_1^2 x_2 c_1 + x_1^4 x_2 c_3 - 0{,}5x_1 N_0 - 0{,}5x_2^3;\\
&z_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_2^4 b_1 + x_2^4|x_2|b_2 + x_1 x_2^3 c_1 + x_1^3 x_2^3 c_3 - 1{,}5x_2^2 N_0;\\
&z_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1^2 x_2^2 b_1 + x_1^2 x_2^2|x_2|b_2 + x_1^3 x_2 c_1 + x_1^5 x_2 c_3 - 0{,}5x_1^2 N_0 - x_1 x_2^3;\\
&z_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1^3 x_2 b_1 + x_1^3 x_2|x_2|b_2 + x_1^4 c_1 + x_1^6 c_3 - 3x_1^2 x_2^2;\\
&z_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = x_1 x_2^3 b_1 + x_1 x_2^3|x_2|b_2 + x_1^2 x_2^2 c_1 + x_1^4 x_2^2 c_3 - x_1 x_2 N_0 - x_2^4/3.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Используя (10), выполнив операцию математического ожидания для компонент вектора $z(x,\theta)$ (14) получим

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{1_2} b_1 + \alpha_{2_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1} c_1 + \alpha_{3_1} c_3 = 0;\\
&\alpha_{2_2} b_1 + \alpha_{3_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 1_2} c_1 + \alpha_{3_1 1_2} c_3 - 0{,}5N_0 = 0;\\
&\alpha_{1_1 1_2} b_1 + \alpha_{1_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{2_1} c_1 + \alpha_{4_1} c_3 - \alpha_{2_2} = 0;\\
&\alpha_{3_2} b_1 + \alpha_{4_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 2_2} c_1 + \alpha_{3_1 2_2} c_3 - \alpha_{1_2} N_0 = 0;\\
&\alpha_{2_1 1_2} b_1 + \alpha_{2_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{3_1} c_1 + \alpha_{5_1} c_3 - 2\alpha_{1_1 2_2} = 0;\\
&\alpha_{1_1 2_2} b_1 + \alpha_{1_1 3_{|2|}} b_2 + \alpha_{2_1 1_2} c_1 + \alpha_{4_1 1_2} c_3 - 0{,}5\alpha_{1_1} N_0 - 0{,}5\alpha_{3_2} = 0;\\
&\alpha_{4_2} b_1 + \alpha_{5_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 3_2} c_1 + \alpha_{3_1 3_2} c_3 - 1{,}5\alpha_{2_2} N_0 = 0;\\
&\alpha_{2_1 2_2} b_1 + \alpha_{2_1 3_{|2|}} b_2 + \alpha_{3_1 1_2} c_1 + \alpha_{5_1 1_2} c_3 - 0{,}5\alpha_{2_1} N_0 - \alpha_{1_1 3_2} = 0;\\
&\alpha_{3_1 1_2} b_1 + \alpha_{3_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{4_1} c_1 + \alpha_{6_1} c_3 - 3\alpha_{2_1 2_2} = 0;\\
&\alpha_{1_1 3_2} b_1 + \alpha_{1_1 4_{|2|}} b_2 + \alpha_{2_1 2_2} c_1 + \alpha_{4_1 2_2} c_3 - \alpha_{1_1 1_2} N_0 - \alpha_{4_2}/3 = 0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где $\alpha_{k_i} = \left\langle x_i^k \right\rangle$; $\alpha_{k_i l_j} = \left\langle x_i^k x_j^l \right\rangle$; $\alpha_{k_{|2|}} = \left\langle x_2^{k-1}|x_2| \right\rangle$; $\alpha_{k_1 l_{|2|}} = \left\langle x_1^k x_2^l |x_2| \right\rangle$.

Моментные условия (15) можно также записать из системы уравнений (5), которая для СДУ (12) была получена в [4].

Матрица Ω находится на основе матрицы $\boldsymbol{W}_D$, элементы которой определялись по формуле (11) с использованием (14). Параметрическая идентификация СДС, поведение которой описывается СДУ (12), выполняется путем решения задачи (8).

Параметрическая идентификация СДС, поведение которой описывается СДУ (12), может быть также выполнена методом ММ в результате решения системы уравнений (5):

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2_2} b_1 + \alpha_{3_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 1_2} c_1 + \alpha_{3_1 1_2} c_3 - 0{,}5 N_0 = 0;\\
&\alpha_{1_1 1_2} b_1 + \alpha_{1_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{2_1} c_1 + \alpha_{4_1} c_3 - \alpha_{2_2} = 0;\\
&\alpha_{4_2} b_1 + \alpha_{5_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 3_2} c_1 + \alpha_{3_1 3_2} c_3 - 1{,}5 \alpha_{2_2} N_0 = 0;\\
&\alpha_{2_1 2_2} b_1 + \alpha_{2_1 3_{|2|}} b_2 + \alpha_{3_1 1_2} c_1 + \alpha_{5_1 1_2} c_3 - 0{,}5 \alpha_{2_1} N_0 - \alpha_{1_1 3_2} = 0;\\
&\alpha_{3_1 1_2} b_1 + \alpha_{3_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{4_1} c_1 + \alpha_{6_1} c_3 - 3 \alpha_{2_1 2_2} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Численные результаты

Для проверки применимости предложенного подхода для выбора моментных условий для параметрической идентификации СДС методом GMM была выполнена оценка параметров b_1, b_2, c_1, c_3 и N_0 по результатам компьютерного моделирования системы, поведение которой описывается СДУ (12). Результатом моделирования являются реализации случайных процессов $\phi(t_i)$ и $\dot{\phi}(t_i)$. Численное интегрирование осуществлялось методом Эйлера. Сходимость определялась из условия не превышения статистическим моментом α_{2_1} заданного значения более чем на малую величину ε, что обусловлено прежде всего тем, что дает возможность сравнивать получаемые результаты с результатами моделирования других исследователей. Подобное сравнение было выполнено с результатами работы [5].

Результаты расчетов точечных оценок параметров b_1, b_2, c_1, c_3, N_0 и их дисперсий в различные моменты времени t для одного из вариантов моделирования 12 ($b_1 = 0{,}04$; $b_2 = 0{,}2$; $c_1 = 1{,}0$; $c_3 = -1{,}0$;

$N_0 = 4{,}93 \cdot 10^{-3}$) по методам GMM (моментные условия (15), матрица $\boldsymbol{W}_D$) и MM (система уравнений (16)) приведены на рис. 1-5.

Данные расчетов свидетельствуют о том, что значения оценок параметров зависят от времени t и являются состоятельными. С увеличением t значения оценок приближаются к истинным значениям параметров, а их дисперсии стремятся к нулю. Для параметров c_1 и c_3 это наблюдается при $t > 150$с для обоих методов, а для трех других параметров – при $t > 180$с для GMM и при $t > 240$с для MM. При этом значения оценок параметров b_1, b_2 и N_0, рассчитанные по методу GMM, в большинстве случае меньше отличаются от истинных значений, чем те, которые вычислены по методу MM. И наоборот, значения оценок параметров c_1 и c_3, рассчитанные по методу MM, как правило, меньше отличаются от истинных значений, чем те, которые вычислены по методу GMM. В целом полученные результаты являются удовлетворительными.

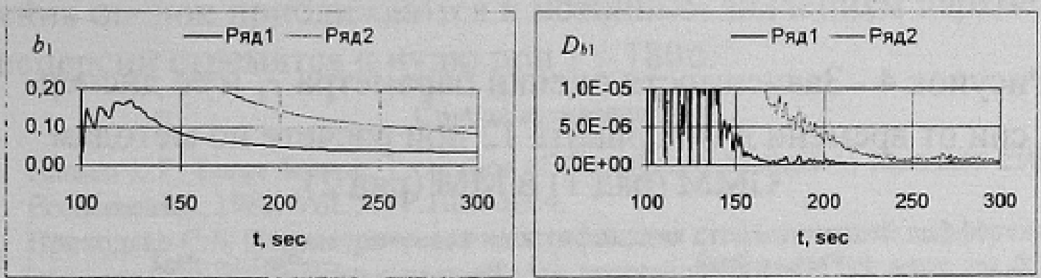

Рисунок 1 - Зависимости оценки параметра b_1 и ее дисперсии от времени для варианта 12 при расчете по методам GMM (ряд 1) и MM (ряд 2)

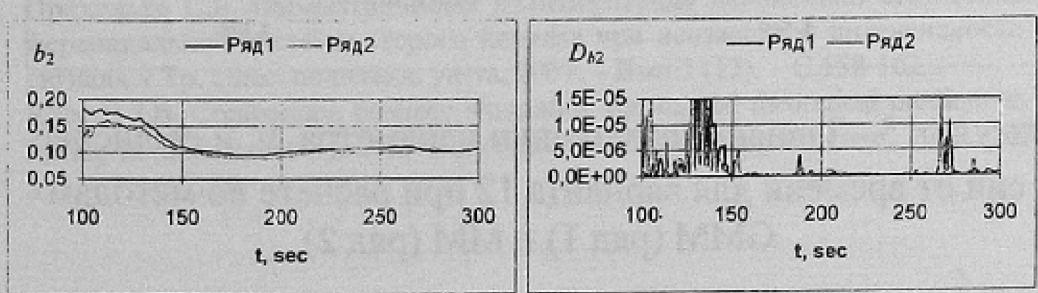

Рисунок 2 - Зависимости оценки параметра b_2 и ее дисперсии от времени для варианта 12 при расчете по методам GMM (ряд 1) и MM (ряд 2)

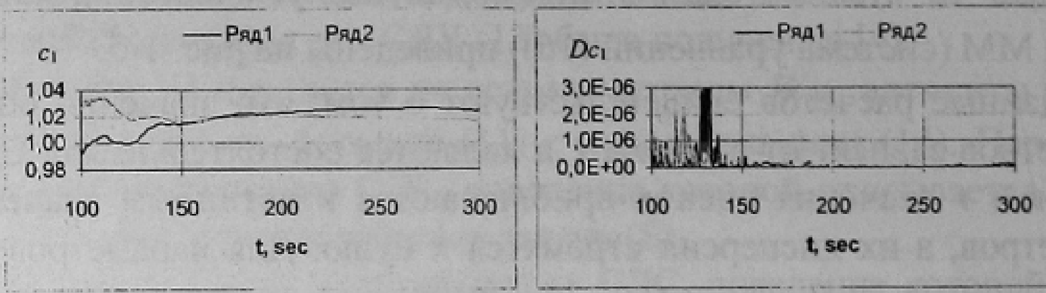

Рисунок 3 - Зависимости оценки параметра c_1 и ее дисперсии от времени для варианта 12 при расчете по методам GMM (ряд 1) и MM (ряд 2)

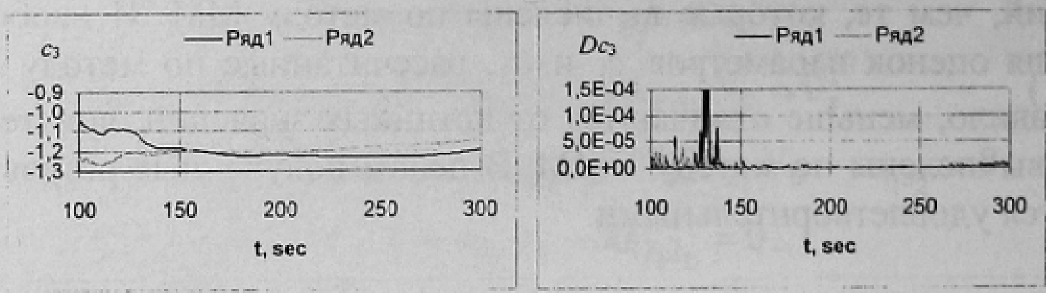

Рисунок 4 - Зависимости оценки параметра c_3 и ее дисперсии от времени для варианта 12 при расчете по методам GMM (ряд 1) и MM (ряд 2)

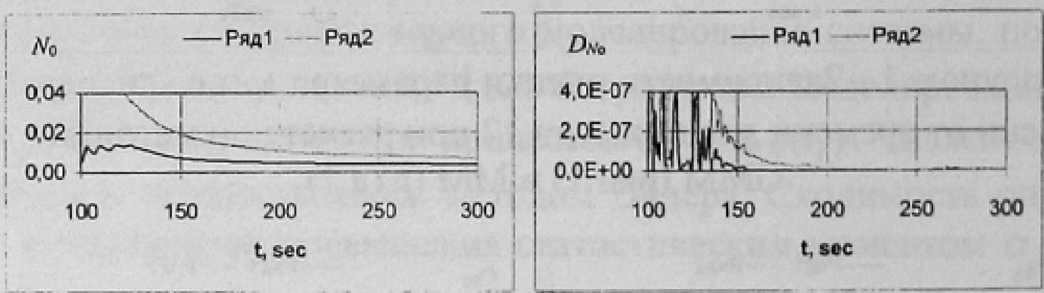

Рисунок 5 - Зависимости оценки параметра N_0 и ее дисперсии от времени для варианта 12 при расчете по методам GMM (ряд 1) и MM (ряд 2)

Выводы

Предложенный подход построения моментных условий для параметрической идентификации СДС методом GMM базируется на формуле Ито. Его преимущество по сравнению с известными в том, что для параметрической идентификации СДС не требуется знать аналитическое выражение плотности распределения как функции параметров системы и ее входных и выходных сигналов.

Применимость предложенной формулы для построения моментных условий проверена путем решения задачи параметрической идентификации СДС, поведение которой описывается СДУ второго порядка с нелинейностями по демпфированию и восстановлению.

Результаты параметрической идентификации методами GMM и MM подтвердили применимость предложенного подхода и показали, что оценки параметров СДУ могут быть найдены по статистическим моментам выходных сигналов. Сами точечные оценки параметров зависят от времени t и являются состоятельными. С увеличением t значения оценок приближаются к истинным значениям параметров, а их дисперсии стремятся к нулю при $t > 180\text{c}$.

Список источников

1. Hansen L.P. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators // Econometrica, 1982. Vol. 50. P.1029-1054.
2. Приходько С.Б. Параметрическая идентификация стохастической дифференциальной системы второго порядка с нелинейным восстановлением // Зб. наук. пр. УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ, 2001. – № 2 (374). – С.159-167.
3. Prikhodko S.B. The application of moment method for parameter identification of stochastic systems // Preprints of the 5th IFAC Symposium "Nonlinear control systems" (NOLCOS 2001) Saint-Petersburg, Russia, July 4-6, 2001. – Vol.4 – P.1048-1051.
4. Приходько С.Б. Параметрическая идентификация нелинейной стохастической дифференциальной системы второго порядка при неизвестной интенсивности входного сигнала // Тр. Одес. политехн. ун-та, 2001. – Вып.3 (15). – С.158-162.
5. Roberts J.B. Comparison between simulation results and theoretical predictions for a ship rolling in random beam waves // International Shipbuilding Progress. 1984. – Vol. 31, No 359. – P.168-180.