УДК 681.518.54

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Чичикало Н.И., Стародубцев А.В.
Донецкий государственный технический университет
Email : jmctn@ yahoo. com

In clause the analysis of errors and comparative estimation of methods of approximation of the characteristics of measuring devices, used by microprocessor of system of the device with the purpose of definition of exact meaning of size is given

Разработка измерительных устройств (ИУ) с нелинейными выходными характеристиками на базе микропроцессоров делает возможным решение задачи нахождения точного значения измеряемой величины. Вместе с тем нецелесообразно устанавливать дорогие микропроцессоры с высоким быстродействием и высокими программными ресурсами. Поэтому задача состоит в выборе вычислительных методов, не требующих громоздких вычислений. Поставленная задача может решаться последовательностью следующих операций.

- Получение номинальной статической характеристики ИУ в виде дискретных значений.
- Запись этой характеристики в постоянное запоминающее устройство микропроцессорного модуля ИУ.
- Вычисление реальных значений измеряемой величены с заданной точностью с помощью формул, предназначенных для линейной аппроксимации, при работе устройства (Ньютона, Лагранжа и других).

При вычислении точного значения формулы кусочной аппроксимации дают погрешность в интервале характеристики, где значения производных выше первой имеют существенное значение, а вычисление по интерполяционным полиномиальным формулам с совпадением в интерполяционных точках дают высокую погрешность при аналогичных условиях за счёт ограничения по производной степени полинома N. Поэтому при характеристиках, существенно отличающихся от линейной, повышение точности возможно только за счёт увеличения количества дискретных значений интерполяции, а следовательно и за счёт повышения степени интерполяционного полинома, что существенно увеличивает аппаратно - программные ресурсы и, соответственно, стоимость измерительного устройства..

Использование интерполяционных формул требует выполнения большого количества арифметических операций, что существенно снижает экономическую эффективность проектируемого устройства.

Для снижения количества арифметических операций при вычислении точного значения измеряемой величины необходимо использовать для интерполяции функцию с высокой степенью сходимости, за счёт которой можно снизить степень ряда интерполяции и имеющую рекуррентный вид формулы для упрощения вычислений. Перечисленным требованиям отвечают аппроксимирующие полиномы Лобачевского и Лежандра, которые имеют простые рекуррентные формулы для вычисления значений полиномов, а также обеспечивают заданную точность измерения на всём динамическом диапазоне.

Если не ставить условия совпадения интерполяционной характеристики с дискретными значениями интерполяции, а ограничиться попаданием значения в заданный интервал точности, то степень ряда интерполяции можно существенно понизить.

Использование полинома Чебышева предпочтительней из-за равномерного распределения погрешности по динамическому диапазону и простоты рекуррентной формулы. Алгоритм вычисления коэффициентов для ряда из полиномов Чебышева заключается в следующем.

1. Получение номинальной статической характеристики ИУ в виде дискретных значений.
2. Построение аппроксимирующего ряда вида:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{N} A_i \cdot T_i(X),$$

где A_i - коэффициенты, вычисляемые по методу наименьших квадратов,
N - степень ряда,
X - значение измеряемой величины,
f(X) - определяемая величина.

В процессе вычисления коэффициентов необходимо последовательно увеличивать степень ряда до тех пор, пока дисперсия отклонения вычисленного значения по аппроксимирующей формуле не будет превышать погрешность измерения.

3. Запись вычисленных коэффициентов в память микропроцессорного ИУ.
4. Вычисление точного значения с помощью аппроксимирующего ряда Чебышева в процессе работы ИУ. При этом значения полиномов Чебышева вычисляются по рекуррентным формулам.

Ряд строится из условия наименьшего среднеквадратического отклонения аппроксимирующего ряда от измеренных дискретных значений характеристики:

$$\sum_{k=1}^{M}\left(Y_k - \sum_{i=0}^{N} A_i \cdot T_i\left(X_k\right)\right)^2 = минимум,$$

где Y_k - номинальное значение измеряемого параметра, X_k - значение на выходе ИУ, нормированное к диапазону [-1;1].

Дифференцируя по A_i и приравнивая нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений, выраженную в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} T_0(X_k)\cdot T_0(X_k) & \sum\limits_{k=1}^{M} T_1(X_k)\cdot T_0(X_k) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{M} T_N(X_k)\cdot T_0(X_k) \\ \sum\limits_{k=1}^{M} T_0(X_k)\cdot T_1(X_k) & \sum\limits_{k=1}^{M} T_1(X_k)\cdot T_1(X_k) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{M} T_N(X_k)\cdot T_1(X_k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{M} T_0(X_k)\cdot T_N(X_k) & \sum\limits_{k=1}^{M} T_1(X_k)\cdot T_N(X_k) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{M} T_N(X_k)\cdot T_N(X_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} Y_k \cdot T_0(X_k) \\ \sum\limits_{k=1}^{M} Y_k \cdot T_1(X_k) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{M} Y_k \cdot T_N(X_k) \end{bmatrix}$$

где $T_0(X_к)=1$, $T_1(X_к)=X_к$, а $T_{n+1}(X_к) = 2X_к\, T_n(X_к) - T_{n-1}(X_к)$.

Решая систему линейных уравнений находим коэффициенты A_k, которые и заносятся в память измерительного микропроцессорного устройства.

В свою очередь вычислительное устройство по рекуррентным формулам:

$T_0(X_к)=1$; $T_1(X)=X$; $T_{n+1}(X)=2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$

вычисляет значения полиномов Чебышева и, суммируя их с весовыми коэффициентами, определяет точное значение, что позволяет повысить точность измерения при снижении количества арифметических операций.

Для наглядности рассмотрим процесс более подробно. Благодаря тому, что значения полиномов Чебышева равномерно распределены в интервале от -1 до 1 погрешность измерения не будет превышать первого не учитываемого коэффициента при полиноме. Отсюда следует простота выбора степени аппроксимирующего ряда. После расчётов члены ряда с коэффициентами меньшими требуемой точности не учитываются.

Сравним абсолютную погрешность измерений для разных методов интерполяции, с одинаковыми порядками ряда для характеристики, представленной на рис. 1.

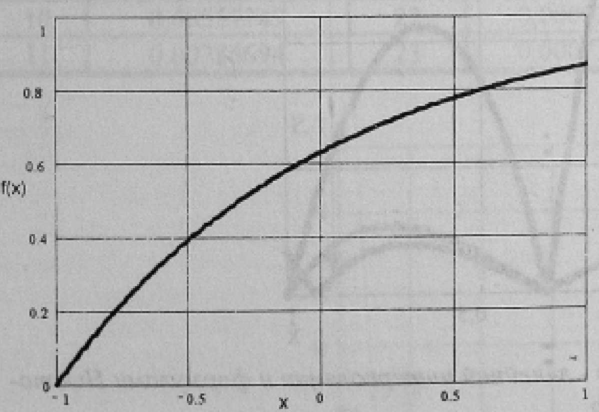

Рисунок 1 - Характеристика исследуемого ИУ

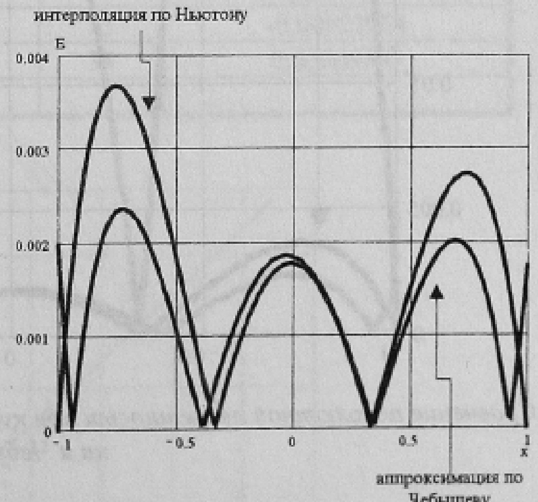

Рисунок 2 – Графики для сравнения абсолютных погрешностей при интерполяции по Ньютону и аппроксимации по Чебышеву.

На рис. 2 представлены графики абсолютной погрешности для интерполяционного полинома Ньютона и аппроксимирующего ряда полиномами Чебышева при степени ряда равной четырём. Из графиков видно, что при одной и той же степени ряда абсолютная погрешность интерполяции по Ньютону в полтора раза выше, чем аппроксимация рядом Чебышева.

На рис. 3 приведен график абсолютной погрешности при кусочно - линейной интерполяции в сравнении с формулами Ньютона и Чебышева, из которого видно, что абсолютная погрешность при кусочно - линейной интерполяции на порядок выше, чем при использовании формул Ньютона и Чебышева и может быть рекомендована к использованию только для измерительных средств с низким классом точности, либо с характеристиками, имеющими высокую степень линейности.

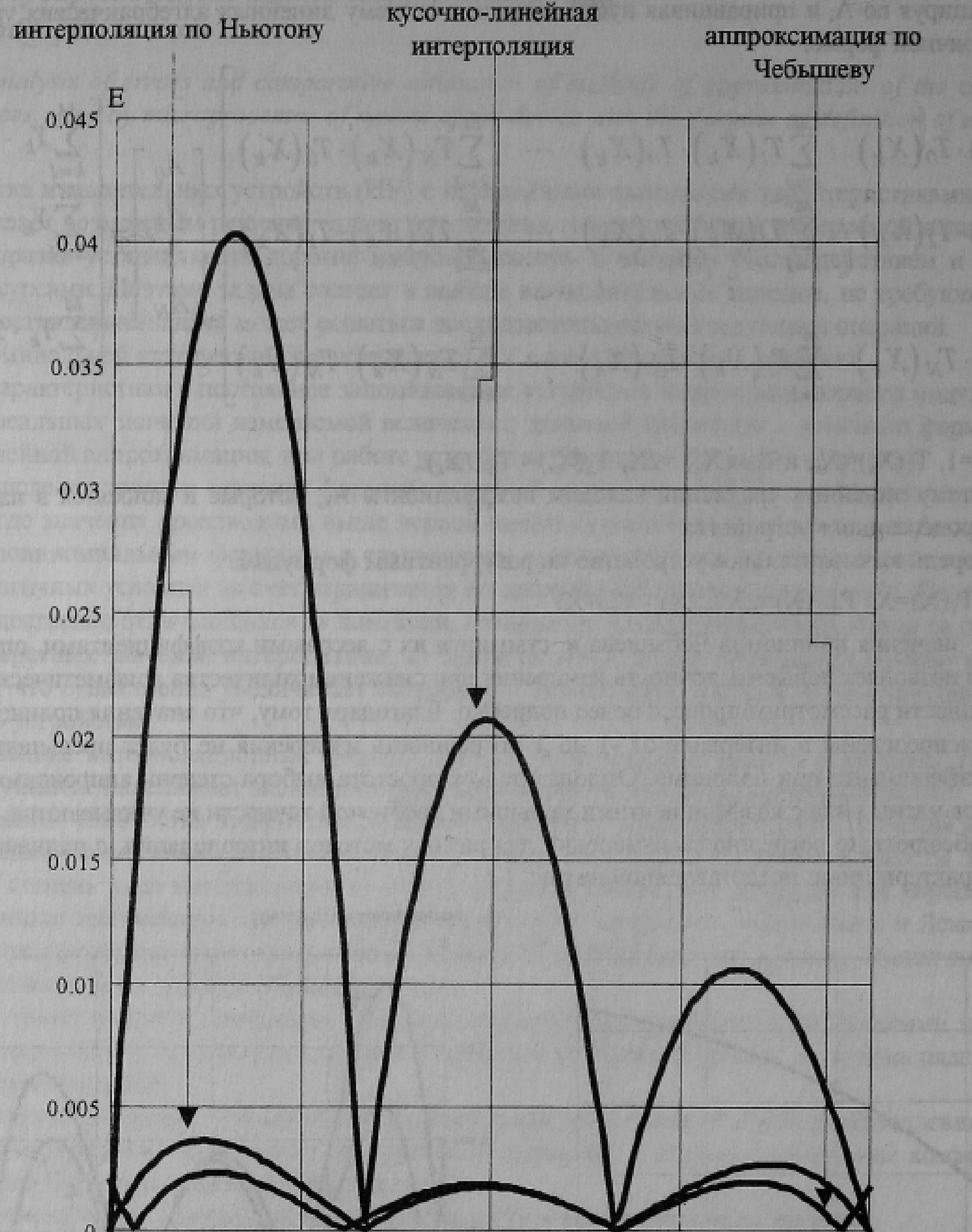

Рисунок 3 – Сравнение абсолютной погрешности при кусочно - линейной интерполяции и формулами Ньютона и Чебышева

Кусочная гиперболическая интерполяция даёт погрешность меньшую, чем кусочно - линейная интерполяция, но достаточно высокую по сравнению с методами Ньютона и Чебышева, поэтому она не рассматривается.

Рассмотрим сравнительную оценку погрешностей методов на примере ИУ, использующего магнитоупругие преобразователи (МУП), для которого получена статичесчая характеристика на стенде с измерительным каналом класса 0.2 в виде 35 дискретных значений, представленных в табл.1.

Таблица 1 - Статическая характеристика ИУ на базе МУП

P,T	U,B	P,T	U,B	P,T	U,B
0	4,3	24	11,4	48	16,785
2	4,9	26	11,943	50	17,184
4	5,5	28	12,464	52	17,583
6	6,1	30	12,964	54	17,981
8	6,7	32	13,44	56	18,38
10	7,299	34	13,896	58	18,778
12	7,898	36	14,335	60	19,177
14	8,496	38	14,759	62	19,575
16	9,091	40	15,174	64	19,974
18	9,682	42	15,581	66	20,37
20	10,266	44	15,985	68	20,77
22	10,84	46	16,385		

Для получения номинальной (градуировочной) функции (рис.4) данные были аппроксимированы рядом Чебышева 35го порядка описываемого зависимостью вида $P(u) = \sum_{m=0}^{34} A_m \cdot T_m(u)$, где u – напряжение, снимаемое с аналого - цифрового преобразователя (АЦП), P – вес, действующий на датчик, A_m - коэффициенты при полиномах, $T_m(u)$ - полином Чебышева порядка m. Коэффициенты ряда приведены в табл. 2:

Таблица 2 - Коэффициенты для ряда Чебышева

№	A_n	№	A_n	№	A_n
0	31,58210476	12	-0,00106657	24	-0,00004771
1	33,89795939	13	-0,00420707	25	-0,00002333
2	2,74697752	14	-0,00130729	26	-0,00021656
3	0,15284773	15	0,00059230	27	-0,00033718
4	-0,41286117	16	0,00034147	28	-0,00021760
5	-0,07439844	17	0,00012760	29	-0,00029270
6	0,11035959	18	-0,00001660	30	-0,00010563
7	0,03905890	19	0,00029681	31	0,00000242
8	-0,03044058	20	0,00044458	32	-0,00007167
9	-0,01991904	21	0,00022985	33	-0,00022684
10	0,00557749	22	0,00032390	34	0,00009397
11	0,00786694	23	0,00023251		

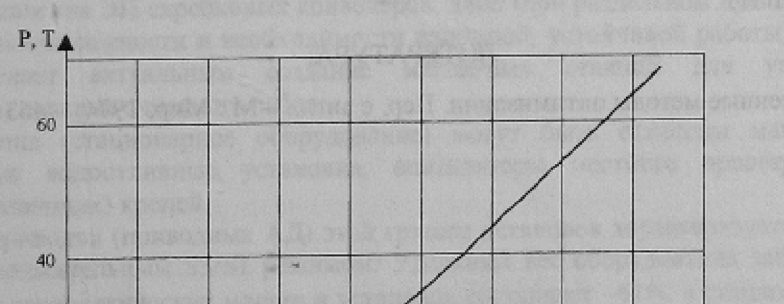

Рисунок 4 - Градуировочная характеристика ИУ

Аппроксимация градуировочной характеристики методами кусочно - линейной интерполяции, Ньютона и рядом Чебышева показывает, что интерполяция по методу Ньютона даёт большую погрешность при высоких степенях интерполирующего полинома. Погрешность после определённой степени начинает сильно возрастать. Кусочно - линейная интерполяция даёт несущественное уменьшение погрешности измерений при повышении числа разбиений. График погрешностей приведен на рис. 5, где характеристика 1 - зависимость погрешности от количества точек разбиения при кусочно - линейной интерполяции, 2 - от степени полинома при интерполяции по методу Ньютона и 3 - аппроксимация рядом степени n из полиномов Чебышева.

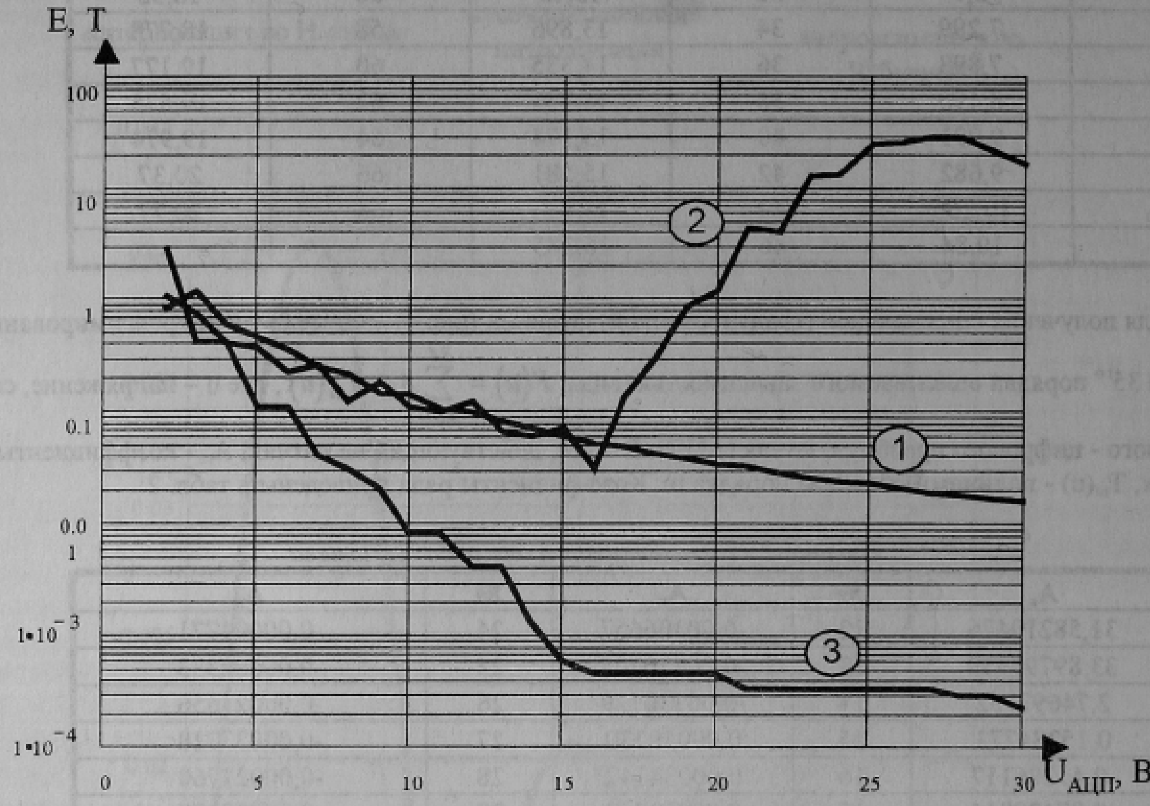

Рисунок 5 – Результаты сравнительного анализа методов

Из рисунка очевидно, что для достижения погрешности 0.1 тонна необходимо 10 участков разбиения при кусочно - линейной интерполяции, полином 10й степени при интерполяции по методу Ньютона и ряд пятого порядка при аппроксимации рядом Чебышева.

Выводы Приведенный выше анализ даёт возможность обоснованно выбрать метод аппроксимации характеристик для конкретного ИУ.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Поллак Е. Численные методы оптимизации. Пер. с англ.. – М.: Мир, 1974. – 463 с.