$$U = -n_1 y_1 - n_2 y_2 - n_3 y_3, \qquad n_1 = 18 + 3 = 21, \quad n_2 = 21 - 7 = 14, \quad n_3 = 8 + 5 = 13. \tag{20}$$

Затем, что при решении задачи необходимо найти только A_{in} коэффициентов функции Ляпунова в управлениях (11), (15), в данном примере коэффициенты A_{12}, A_{23}, A_{33}, определяемые равенствами (19). Но найденные по (19) коэффициенты функции Ляпунова превращают (18) в систему линейных алгебраических уравнений, из которых можно найти остальные коэффициенты A_{11}, A_{12}, A_{22} и коэффициенты a_1, a_2, a_3 заданной квадратичной формы.

В управлении (20) совершим переход к исходным фазовым координатам. Для того по [3] найдем матрицу Д-1, обратную матрице Д (2) и найдем, что

$$y_1 = x_1 + x_2, \qquad y_2 = x_2 + x_3, \qquad y_3 = x_3. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20) и окончательно найдем

$$U = -21x_1 - 35x_2 - 27x_3.$$

Список источников

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. –М.: Наука, 1969.
2. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Ч.П. –Л.: Энергия, 1966.
3. Кожинская Л. И., Ворновицкий А. Э. Управление качеством систем. –М.: Машиностроение, 1979.

УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ткачук Д. Я.
Донбасский горно-металлургический институт

Постановка задачи. При решении задачи аналитического синтеза (аналитического конструирования) регуляторов исходят из того, что задан объект управления уравнениями возмущенного движения и задан квадратичный функционал, отражающий требование к качеству регулирования синтезируемой системы. Задача заключается в том, чтобы найти уравнение регулятора, как функцию фазовых координат объекта, который обеспечивает минимум функционала и желаемое качество регулирования (желаемый вид переходного процесса). До сего времени проблема выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала является открытой и именно нерешенность проблемы выбора делает процедуру расчета коэффициентов оптимального управления итерационной. Итерационность процедуры не позволяет обеспечить строго заданное качество регулирования, что в известной мере обесценивает результаты синтеза.

Нерешенность проблемы выбора весовых коэффициентов определяется тем, что изначально проблема выбора трактовалась как внешняя, по отношению к аналитическому синтезу, проблема. Между тем, можно трактовать проблему выбора как внутреннюю проблему аналитического синтеза. Такой подход позволяет найти аналитическое решение проблемы выбора и найти аналитические зависимости весовых коэффициентов от параметров объекта и желаемого качества регулирования, в частности, от заданного времени регулирования в синтезируемой системе.

Решение задачи. Для определенности рассмотрим объект третьего порядка, возмущенное движение которого определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2; \\ \dot{y}_2 &= b_{22}y_2 + b_{23}y_3; \\ \dot{y}_3 &= b_{33}y_3 + mU, \end{aligned} \tag{1}$$

где b_{ii}, $b_{i\alpha}$, m – постоянные коэффициенты ($i = 1,2,3,\ \alpha = 2,3$);

y_1, y_2, y_3 – координаты возмущенного движения;

U – управляющее воздействие.

Цель управления зададим квадратичным функционалом

$$I = \int_0^\infty \left(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + U^2\right) dt \tag{2}$$

с неизвестными весовыми коэффициентами a_1, a_2, a_3.

Задача заключается в том, чтобы найти закон управления U, как функцию фазовых координат, который обеспечивал бы минимум функционала (2) и заданное качество регулирования $y_1(t)$.

Предварительно решим задачу выбора весовых коэффициентов a_1, a_2, a_3 функционала (2) по желаемому качеству регулирования, определяемому желаемым видом экстремали $y_1(t)$ функционала (2) [1]. Эта экстремаль есть решение дифференциального уравнения синтезируемой замкнутой системы, которому всегда можно найти соответствующее характеристическое уравнение

$$p^3 + \gamma_3 p^2 + \gamma_2 p + \gamma_1 = 0, \tag{3}$$

коэффициенты которого определяются заданным качеством регулирования.

По методу неопределенных множителей Лагранжа запишем характеристическое уравнение вариационной задачи

$$p^6 + \nu_3 p^4 + \nu_2 p^2 + \nu_1 = 0, \tag{4}$$

коэффициенты которого содержат искомые весовые коэффициенты a_1, a_2, a_3 функционала (2). С другой стороны, представим уравнение (4) через уравнение (3) в форме

$$\left(p^3 + \gamma_3 p^2 + \gamma_2 p + \gamma_1\right)\left(p^3 - \gamma_3 p^2 + \gamma_2 p - \gamma_1\right) = 0. \tag{5}$$

Сравнивая коэффициенты двух форм (4), (5) характеристического уравнения вариационной задачи и используя биноминальное распределение корней характеристического уравнения, определим зависимости весовых коэффициентов функционала от заданного времени регулирования t_p и параметров объекта (1):

$$a_3 m^2 = \frac{192}{t_p^2} - b_{11}^2 - b_{22}^2 - b_{33}^2;$$

$$\begin{aligned} a_2 m^2 b_{23}^2 = \left(\frac{192}{t_p^2}\right)^2 - \frac{48}{t_p}\left(\frac{8}{t_p}\right)^3 - b_{11}^2 b_{22}^2 - b_{11}^2 b_{33}^2 - b_{22}^2 b_{33}^2 - \\ - \left(b_{11}^2 + b_{22}^2\right) a_3 m^2; \end{aligned} \tag{6}$$

$$a_1 m^2 b_{12}^2 b_{23}^2 = \left(\frac{8}{t_p}\right)^6 - b_{11}^2 b_{22}^2 b_{33}^2 - b_{11}^2 b_{22}^2 a_3 m^2 - b_{11}^2 b_{23}^2 a_2 m^2.$$

Решая вариационную задачу на условный экстремум, найдем, что минимальное значение функционала (2) на движениях объекта (1) достигается управлением

$$U = n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3, \tag{7}$$

коэффициенты которого могут быть найдены по методу уравнения коэффициентов двух форм характеристического уравнения замкнутой синтезируемой системы. Первая форма определяется уравнением (3), а вторая форма определяется по уравнениям (1), (7). В результате определим

$$n_3 = -\frac{\gamma_3 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}{m};$$

$$n_2 = -\frac{\gamma_2 - b_{11}b_{22} - b_{11}b_{33} - b_{22}b_{33} - mn_3(b_{11} + b_{22})}{m \cdot b_{23}}; \tag{8}$$

$$n_1 = -\frac{\gamma_1 + b_{11}b_{22}b_{33} + mn_3 b_{11}b_{22} - mn_2 b_{11}b_{23}}{mb_{12}b_{23}}.$$

Таким образом будем считать, что решена задача выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала (2) из условия обеспечения апериодического переходного процесса с заданным t_p временем регулирования и определены коэффициенты (8) регулятора (7), которые этот переходный процесс гарантируют.

Анализ качества регулирования. Первоначально рассмотрим интегрирующий объект третьего порядка (1) с уравнениями возмущенного движения

$$\dot{y}_1 = b_{12} y_2; \qquad \dot{y}_2 = b_{23} y_3; \qquad \dot{y}_3 = mU,$$

где $b_{12} = 0.33$; $b_{23} = 0.20$; $m = 0.14$.

Задаваясь в качестве примера временем регулирования $t_p = 30$с в замкнутой системе, найдем по (6) значения весовых коэффициентов $a_1 = 3.96$, $a_2 = 18.58$, $a_3 = 10.45$ функционала (2) и по (8) значения коэффициентов $n_1 = -2.00$, $n_2 = -7.47$, $n_3 = -5.60$ оптимального управления (7). Переходные процессы в замкнутой системе приведены на рис. 1.

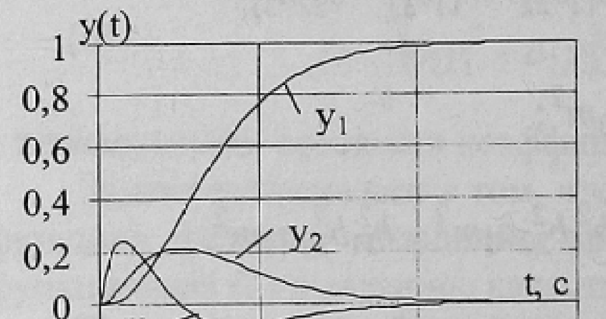


Рисунок 1

Определяя таким образом время регулирования в диапазоне

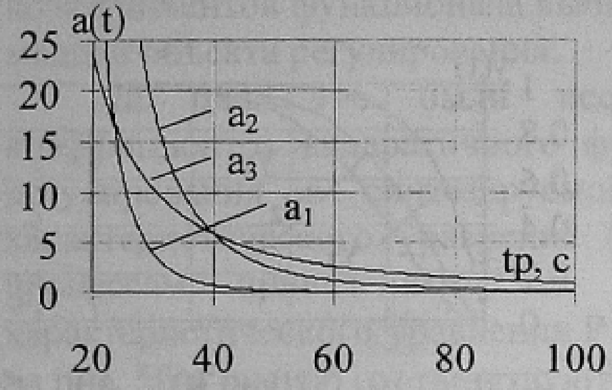


Рисунок 2

от 20с до 100с, найдем, что длительность переходного процесса всегда соответствует заданной, а зависимости весовых коэффициентов функционала от заданного времени регулирования определяется кривыми рис. 2. Отметим свойство весовых коэффициентов, состоящее в том, что с увеличением времени регулирования их значения асимптотически уменьшаются без смены знаков.

Рассмотрим далее статический объект (1), динамические свойства которого для удобства анализа представим структурной схемой рис. 3.

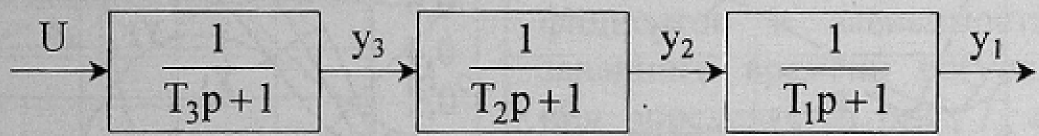
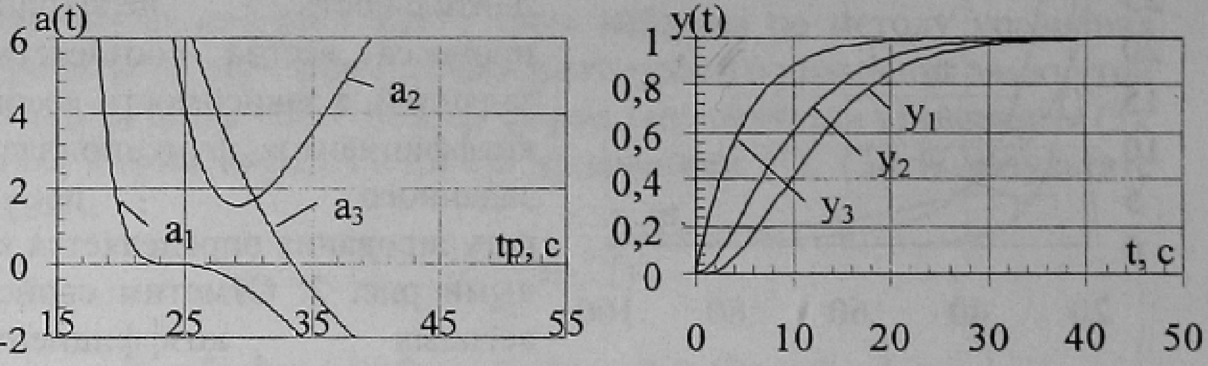


Рисунок 3 - Структурная схема статического объекта

Пусть для определенности T_3 = 7с, T_2 = 5с, T_1 = 3с, а в (1) b_{11}= –0.33, b_{12} = 0.33, b_{22} = –0.20, b_{23} = 0.20, b_{33} = –0.14, m = 0.14. Задавшись апериодическим переходным процессом длительностью t_p = 14с, определим, что по (6) a_1 = 110.2, a_2 = 233.0, a_3 = 39.6; по (8) n_1 = –1.42, n_2 = –9.91, n_3 = –7.27. Если задать t_p = 34с, то весовые коэффициенты и коэффициенты управления соответственно равны: a_1 = –1.9, a_2 = 3.0, a_3 = –0.27; n_1 = 0.10, n_2 = –0.26, n_3 = –0.21.

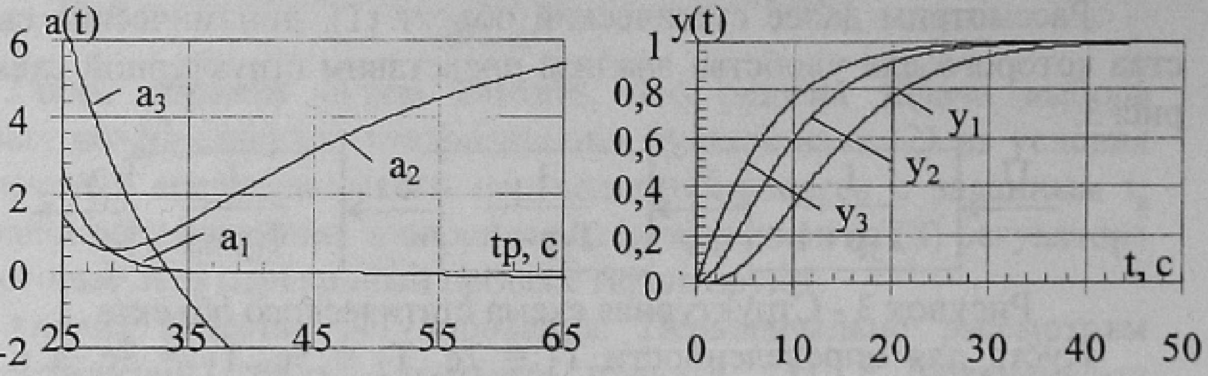
Результаты этого анализа приведены на рис. 4, где изображены графики зависимости функционала от заданных значений t_p и графики переходных процессов в замкнутой системе для t_p = 34с. Если задаться временем регулирования t_p = 24с, то a_1 = 0, n_1 = 0.

Вновь изменим значения постоянных времени в модели объекта, положив T_3 = 5с, T_2 = 3с, T_1 = 7с. Тогда распределение весовых коэффициентов функционала определяется рис. 6а, а переходные процессы при t_p = 40с и n_1 = –0,02, n_2 = –0.20, n_3 = 0.381 в системе представлены на рис. 6б.



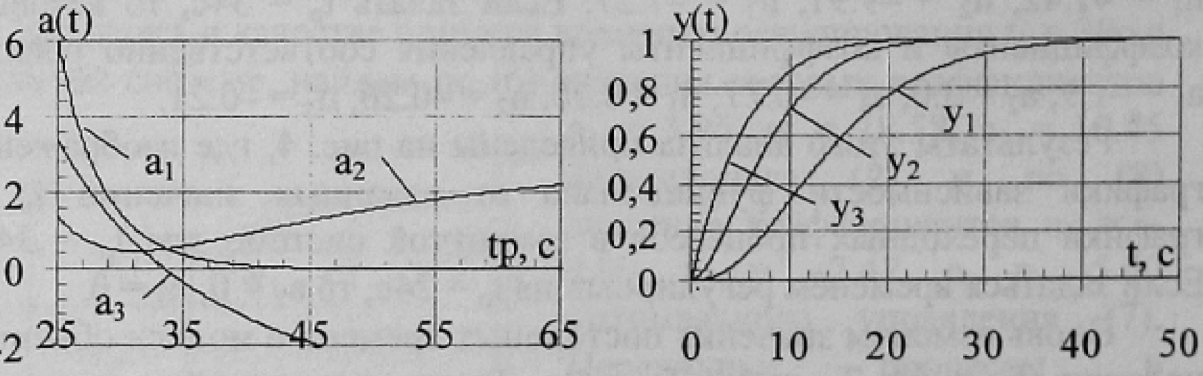
а) б)

Рисунок 4 - Графики функционала и переходных процессов



а) б)

Рисунок 5 - Графики функционала и переходных процессов



а) б)

Рисунок 6 - Графики функционала и переходных процессов

Таким образом, проведенный анализ позволяет определить существенное влияние на характер распределения весовых коэффициентов функционала выбираемой структуры математической модели объекта регулирования.

На рис. 4–6 были исследованы зависимости весовых коэффициентов квадратичного функционала от заданного времени регулирования в синтезируемой системе при равных корнях характеристического уравнения ($P_1 = P_2 = P_3 = P$). Переходным процессам приведенным на рис. 4б, соответствуют корни характеристического уравнения P = –0.235, а переходным процессам на рис. 5б и рис. 6б соответствуют корни P = –0.2.

Представляет интерес проведения аналогичных исследований при пропорциональных корнях на тех же математических моделях объекта регулирования.

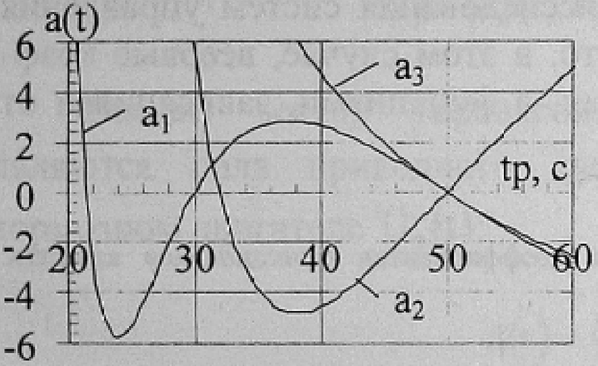


Рисунок 7

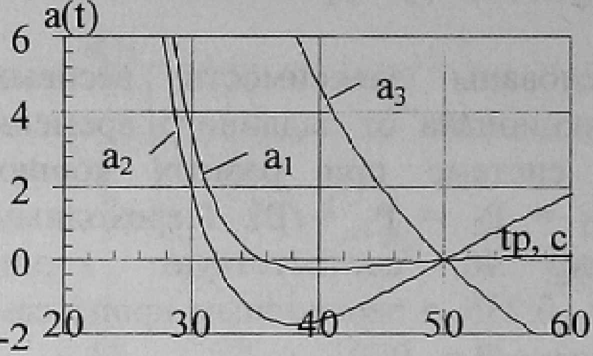
Пусть вновь T_3 = 7c, T_2 = 5c, T_1 = 3c. Тогда распределение значений весовых коэффициентов в зависимости от заданного времени регулирования определяется рис. 7, а при времени регулирования t_p = 40c n_1 = –0,113, n_2 = 0.343, n_3 = –1.183.

Для параметров математической модели T_3 = 7c, T_2 = 3c, T_1 = 5c зависимости весовых коэффициентов от заданного времени регулирования представлены на рис. 8, а для времени регулирования t_p = 40c n_1 = 0,024, n_2 = 0.206, n_3 = –1.183.

Наконец, при T_3 = 5c, T_2 = 3c, T_1 = 7c соответствующие зависимости имеют вид рис. 9, а для времени регулирования t_p = 40c n_1 = –0,110, n_2 = 0.002, n_3 = –0.845.

Рис. 7, 8, 9 имеют одну интересную особенность – значение всех весовых коэффициентов функционала $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Таким образом значения весовых коэффициентов квадратичного функционала, их знаки, а также коэффициенты оптимального управления существенно зависят от структуры математической модели объекта и заданного времени регулирования.



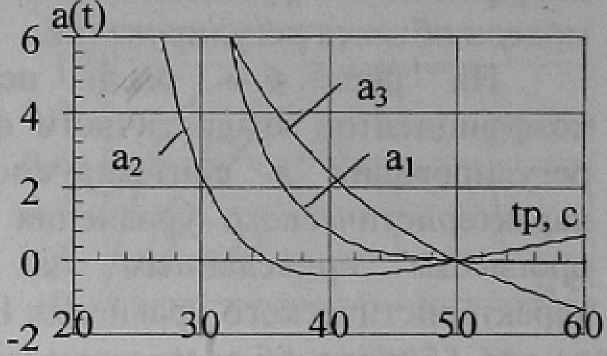


Рисунок 8 Рисунок 9

Для каждой конкретной синтезируемой системы диапазон положительных значений весовых коэффициентов зависит от динамических свойств объекта и заданного времени регулирования.

Аналогично были проведены исследования систем управления нелинейным объектом. Показано, что, в этом случае, весовые коэффициенты будут уже не константами, а функциями, зависящими от нелинейных свойств объекта.

Список источников

Жиляков В. И. К определению весовых коэффициентов функционалов качества. Электромеханика, 1984, №6, с. 98-93.

УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМАМИ ОБМОТОЧНЫХ МАШИН.

Кузнецов Б.И., Чаусов А.А., Колесникова Л.Н., Лутай С.Н.
Украинская инженерно – педагогическая академия

Точность поддержания заданного натяжения обмоточных лент и скорости вращения приводного механизма в значительной степени определяет качество кабельной продукции. Заданное значение натяжения изменяется, прежде всего, по мере уменьшения кружка обмоточной ленты. Регулирование натяжения с помощью механических или электрических устройств вызывает изменение скорости вращения приводного механизма. Радикальное повышение точности поддержания заданного натяжения и скорости вращения может быть достигнуто с помощью двухканального управления одновременно натяжением и скоростью с помощью взаимосвязанного регулятора.