

ИНЕРЦИОННОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Дмитриева Е.Н., Цыганкова Н.В., Черникова Л.В.
Донецкий национальный технический университет
led@dgtu.donetsk.ua

The paper describes the task of random processes passing through connected in parallel linear inertial links. The simple formulas for determination of correlative functions on links exit are proposed. Solutions in final form are found for frequent occurrences in practice.

Постановка задачи. Обычно модель электромагнитной совместимости (ЭМС) электроприемников и электрической сети состоит из линейного фильтра, квадратора, инерционного (апериодического) звена первого порядка и блока определения показателя ЭМС. Фильтр моделирует реакцию объекта на помеху, квадратор оценивает мощность реакции, а инерционное звено моделирует инерцию объекта к воздействию реакции. Примером такой модели является фликерметр [1, 2]. При оценке воздействий на электроприемник несимметрии и несинусоидальности напряжения достаточно ограничиться квадратичным инерционным сглаживанием, а при оценке отклонений напряжения – одним инерционным звеном [3]. Для упрощения и унификации расчетов фильтр сложной структуры представляется в виде параллельно включенных инерционных звеньев [4].

Во всех приведенных примерах в моделях имеется одно или несколько инерционных звеньев. В связи с этим возникают две задачи: определение корреляционной функции (КФ) случайного «инерционного» процесса $y(t)$ на выходе одного инерционного звена и взаимной КФ между процессами $y_i(t)$ и $y_r(t)$ на выходе двух параллельно включенных i -го и r -го звеньев. Исходной для расчетов является КФ $k_x(\tau)$ стационарной исходной помехи на входе звена (или звеньев). Вычисление математических ожиданий не вызывает затруднений, поэтому далее без нарушения общности математические ожидания помех будут считаться равными нулю.

Поставленные задачи могут быть решены с использованием известных формул теории вероятностей (например, [5, 6]) для КФ

$$k_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(\xi) g(\eta) k_x(t_2 - t_1 + \xi - \eta) d\xi d\eta \quad (1)$$

и взаимной КФ

$$k_{ir}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g_i(\xi) g_r(\eta) k_x(t_2 - t_1 + \xi - \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где ξ и η – переменные интегрирования, $g(t) = a\gamma e^{-\gamma t}$ – весовая функция звена с коэффициентом передачи a и параметром γ .

Однако вычисления по формулам (1) и (2) довольно громоздки: во-первых, аргументы используемых в практике КФ помех берутся по абсолютному значению и, во-вторых, требуется двойное интегрирование. В статье предлагаются формулы однократного интегрирования положительных аргументов и приводятся результаты их применения для типичных КФ. Часть результатов известна, но они даются для полноты изложения.

Общий случай. Для упрощения формулы (1) воспользуемся известным преобразованием координат: от осей ξ и η перейдем к осям z и u с началом координат в точке $O' = t_2 - t_1$ и повернутым на 45° (рис. 1). В этих осях

$$\xi = (u + z)/\sqrt{2}, \quad \eta = t_2 - t_1 - (u + z)/\sqrt{2},$$

что позволяет разделить переменные в выражениях

$$t_2 - t_1 + \xi - \eta = \sqrt{2} u,$$

$$g(\xi) g(\eta) = a^2 \gamma^2 e^{-\gamma(t_2 - t_1)} e^{-\gamma\sqrt{2}z}$$

и выполнить интегрирование по z . Области интегрирования ограничены абсциссами:

$$u_1 = -t_1/\sqrt{2}, \quad u_2 = (t_2 - t_1)/\sqrt{2}, \quad u_3 = t_2/\sqrt{2}.$$

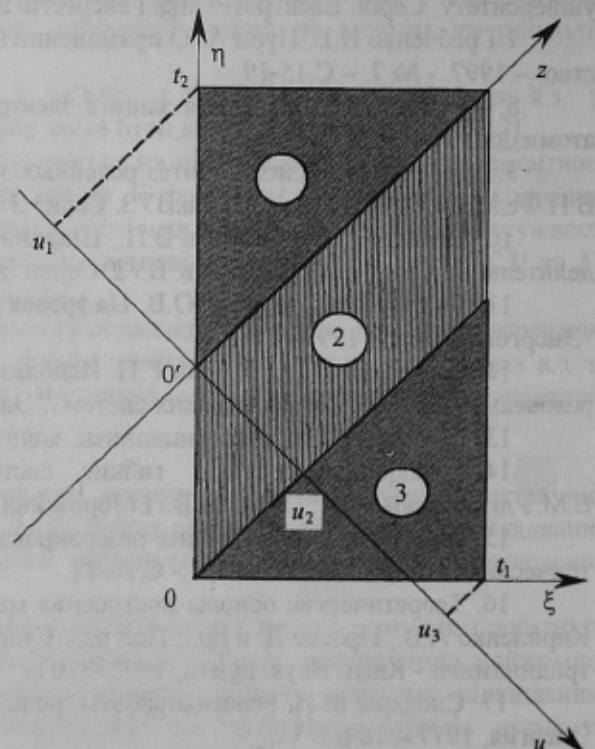


Рисунок 1 – Преобразование осей координат

В результате вместо (1) получим КФ инерционного процесса

$$k_y(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \gamma e^{-\gamma(t_2-t_1)} \left\{ \int_0^{t_1} (e^{-\gamma v} - e^{-2\gamma t_1} e^{\gamma v}) k(v) dv + (1 - e^{-2\gamma t_1}) \int_0^{t_2-t_1} e^{\gamma v} k(v) dv + e^{-2\gamma t_1} \int_{t_2-t_1}^{t_2} [e^{2\gamma t_2} e^{-\gamma v} - e^{\gamma v}] k(v) dv \right\}, \quad (3)$$

где переменная интегрирования v – величина положительная, $t_2 > t_1$.

Инерционная дисперсия переходного случайного процесса определяется подстановкой в (3) времени $t = t_2 = t_1$:

$$D_y(t) = a^2 \gamma \int_0^t (e^{-\gamma v} - e^{-2\gamma t} e^{\gamma v}) k(v) dv. \quad (4)$$

Теоретически стационарное состояние наступает при t_1 и $t_2 \rightarrow \infty$. В этом случае $t_2 - t_1 = \tau$, а формулы (3) и (4) приобретают вид:

$$k_y(\tau) = \frac{a^2}{2} \gamma \left[\int_0^\infty e^{-\gamma v} k(v) dv + \int_0^\tau e^{\gamma v} k(v) dv + e^{2\gamma \tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma v} k(v) dv \right], \quad (5)$$

$$D_y = a^2 \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma v} k(v) dv. \quad (6)$$

После интегрирования согласно (5) величина τ заменяется на $|\tau|$. В практических расчетах полученные формулы можно использовать при $t = t_1 \geq 3/\gamma$.

Аналогичным образом, обозначив через $\rho_{ir} = \frac{\gamma_i \gamma_r}{\gamma_i + \gamma_r}$, вместо (2) для переходного случайного режима получим взаимную КФ

$$k_{ir}(t_1, t_2) = a_i a_r \rho_{ir} e^{-\gamma_r(t_2-t_1)} \left\{ \int_0^{t_1} [e^{-\gamma_r v} - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t_1} e^{\gamma_i v}] k(v) dv + [1 - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t_1}] \int_0^{t_2-t_1} e^{\gamma_r v} k(v) dv + \int_{t_2-t_1}^{t_2} [e^{(\gamma_i+\gamma_r)(t_2-t_1)} e^{-\gamma_i v} - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t_1} e^{\gamma_r v}] k(v) dv \right\} \quad (7)$$

и взаимный корреляционный момент при $t = t_2 = t_1$:

$$k_{ir}(t) = a_i a_r \rho_{ir} \int_0^t [e^{-\gamma_i v} + e^{-\gamma_r v} - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t} (e^{\gamma_i v} + e^{\gamma_r v})] k(v) dv. \quad (8)$$

В стационарном состоянии

$$k_{ir}(\tau) = a_i a_r \rho_{ir} e^{-\gamma_r \tau} \left[\int_0^\infty e^{-\gamma_r v} k(v) dv + \int_0^\tau e^{\gamma_r v} k(v) dv + e^{(\gamma_i+\gamma_r)\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma_i v} k(v) dv \right], \quad (9)$$

$$k_{ir} = a_i a_r \rho_{ir} \int_0^\infty (e^{-\gamma_r v} - e^{-\gamma_i v}) k(v) dv. \quad (10)$$

Несмотря на увеличение количества суммируемых интегралов, вычисления по полученным формулам намного проще, чем по формулам (1) и (2), в том числе и при расчетах на компьютере.

Белый шум. В тех случаях, когда время корреляции помехи намного меньше постоянной инерции объекта, помеха заменяется белым шумом, КФ которого

$$k(\tau) = \pi c \delta(\tau) \quad (11)$$

выражается через дельта-функцию $\delta(t)$ и параметр c . Модель белого шума используется и при полной унификации расчетов по методу парциальных реакций [4]. Подставив (11) в формулы (3) – (10), получим

$$k_y(t_1, t_2) = \frac{1}{2} a^2 \pi c \gamma (1 - e^{-2\gamma t_1}) e^{-\gamma(t_2-t_1)}, \quad D_y(t) = \frac{1}{2} a^2 \pi c \gamma (1 - e^{-2\gamma t}),$$

$$k_y(\tau) = \frac{1}{2} a^2 \pi c \gamma e^{-\gamma|\tau|}, \quad D_y = \frac{1}{2} a^2 \pi c \gamma,$$

$$k_{ir}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} a_i a_r \pi c \rho_{ir} \left[e^{-\gamma_i(t_2-t_1)} (1 - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t_1}) + e^{-\gamma_r(t_2-t_1)} (1 - e^{-(\gamma_i+\gamma_r)t_2}) \right],$$

$$k_{ir}(t) = a_i a_r \pi c \rho_{ir} \left[1 - e^{-(\gamma_i + \gamma_r)t} \right],$$

$$k_{ir}(\tau) = \frac{1}{2} a_i a_r \pi c \rho_{ir} \left(e^{-\gamma_i |\tau|} + e^{-\gamma_r |\tau|} \right), \quad k_{ir} = a_i a_r \pi c \rho_{ir}.$$

Недифференцируемые КФ. Если помеха не содержит периодической составляющей, то статистические КФ аппроксимируются выражением

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad (12)$$

где α – параметр; σ – стандарт помехи.

Примером является суммарная электрическая нагрузка группы электроприемников.

Недифференцируемость в нуле выражений для КФ не препятствует применению полученных общих формул. Подстановка (12) в (3) – (10) дает:

$$k_y(t_1, t_2) = a^2 \sigma^2 \frac{\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2} \left\{ \alpha \left[1 - e^{-2\gamma t_1} \right] e^{-\gamma_i(t_2 - t_1)} + \right. \\ \left. + \gamma \left[e^{-(\alpha + \gamma)t_1} - e^{-2\gamma t_1} \right] e^{-\gamma(t_2 - t_1)} - \gamma \left[1 - e^{-(\alpha + \gamma)t_1} \right] e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \right\} \quad \text{при } \alpha \neq \gamma,$$

$$D_y(t) = \begin{cases} a^2 \sigma^2 \frac{\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2} \left[\alpha - \gamma - (\alpha + \gamma)e^{-2\gamma t} + 2\gamma e^{-(\alpha + \gamma)t} \right] & \text{при } \alpha \neq \gamma, \\ \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \left[1 - (1+t) e^{-2\alpha t} \right] & \text{при } \alpha = \gamma, \end{cases} \quad (13)$$

$$k_y(\tau) = \begin{cases} a^2 \sigma^2 \frac{\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2} \left(\alpha e^{-\gamma |\tau|} - \gamma e^{-\alpha |\tau|} \right) & \text{при } \alpha \neq \gamma, \\ \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 (1 + |\tau|) e^{-\alpha |\tau|} & \text{при } \alpha = \gamma, \end{cases} \quad (14)$$

$$D_y = a^2 \sigma^2 \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad (15)$$

$$k_{ir}(t_1, t_2) = a_i a_r \sigma^2 \gamma_i \gamma_r e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \left\{ \frac{1}{\gamma_i + \gamma_r} \left[\frac{1 - e^{-(\gamma_i + \gamma_r)t_1}}{\alpha - \gamma_i} + \frac{1 - e^{-(\gamma_i + \gamma_r)t_2}}{\alpha - \gamma_r} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_i)t_1}}{(\alpha + \gamma_i)(\alpha - \gamma_r)} - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_r)t_2}}{(\alpha - \gamma_i)(\alpha + \gamma_r)} \right\},$$

$$k_{ir}(t) = a_i a_r \sigma^2 \gamma_i \gamma_r \left\{ \frac{1 - e^{-(\gamma_i + \gamma_r)t}}{\gamma_i + \gamma_r} \left(\frac{1}{\alpha - \gamma_i} + \frac{1}{\alpha - \gamma_r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_i)t}}{(\alpha + \gamma_i)(\alpha - \gamma_r)} - \frac{1 - e^{-(\alpha + \gamma_r)t}}{(\alpha - \gamma_i)(\alpha + \gamma_r)} \right\}, \quad (16)$$

$$k_{ir}(\tau) = a_i a_r \sigma^2 \frac{\gamma_i \gamma_r}{\gamma_i + \gamma_r} e^{-\gamma_r |\tau|} \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \gamma_r^2} + \left[\frac{1}{\alpha + \gamma_i} - \frac{1}{\alpha - \gamma_r} \right] e^{(\gamma_r - \alpha) |\tau|} \right\}, \quad \text{при } \alpha \neq \gamma_r, \quad (17)$$

$$k_{ir} = \sigma^2 a_i a_r \gamma_i \gamma_r \frac{\gamma_i + \gamma_r + 2\alpha}{(\gamma_i + \gamma_r)(\alpha + \gamma_i)(\alpha + \gamma_r)}. \quad (18)$$

К недифференцируемым относится и экспоненциально-косинусоидальная КФ, которая используется для аппроксимации статистической КФ, если помеха содержит периодическую составляющую с угловой частотой ω_0 . Примером могут служить нагрузки дуговых сталеплавильных печей и других выдающихся по мощности электроприемников.

Представим исходную КФ в виде

$$k(\tau) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left[e^{-(\alpha - j\omega_0) |\tau|} + e^{-(\alpha + j\omega_0) |\tau|} \right], \quad (19)$$

где $j = \sqrt{-1}$. Каждое слагаемое в (19) можно рассматривать как экспоненциальную КФ с одинаковыми дисперсиями и параметрами

$$\alpha_1 = \alpha - j\omega_0, \quad \alpha_2 = \alpha + j\omega_0.$$

Это позволяет для каждого слагаемого использовать формулы (13) – (18) и результаты сложить. Тем самым не требуется интегрирование согласно (5) – (10). Например, с учетом формулы (15) найдем инерционную дисперсию

$$D_y = \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha_1 T} + \frac{1}{1 + \alpha_2 T} \right) = a^2 \sigma^2 (1 + \alpha T) \varphi(T), \quad (20)$$

$$\text{где } \varphi(T) = 1 / \left[(1 + \alpha T)^2 + \omega_0^2 T^2 \right].$$

Дифференцируемые КФ. Наличие реактивных элементов в системах электроснабжения сглаживает процессы изменения тока и напряжения, поэтому в ряде задач более корректно применять дифференцируемые выражения для аппроксимации КФ. Одним из них является следующее:

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta^2 \tau^2}. \quad (21)$$

Несмотря на простоту этой формулы, выразить решение через элементарные функции не представляется возможным. Это обусловлено тем, что интегрирование (21) в конечном виде выполняется лишь в пределах от 0 до ∞ . Например, первый интеграл в (5) берется по формуле Эйлера-Пуассона и равен $(2\sqrt{\pi}/\beta) e^{\gamma^2/(4\beta^2)}$. Поэтому согласно (6) инерционная дисперсия

$$D_y = 2\sqrt{\pi} a^2 \sigma^2 \frac{\gamma}{\beta} e^{\gamma^2/(4\beta^2)}.$$

В конечных пределах $b_1 < b_2$ интегралы выражаются через интеграл вероятности $\Phi(x)$ [5]:

$$\int_{b_1}^{b_2} e^{\mp \gamma v - \beta^2 v^2} dv = e^{\pm \gamma^2/(4\beta^2)} \int_{b_1}^{b_2} e^{-[\beta v \pm \gamma/(2\beta)]} dv = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta} e^{\pm \gamma^2/(4\beta^2)} \{ \Phi[z(b_2)] - \Phi[z(b_1)] \},$$

$$\text{где } z(b) = [\beta b \mp \gamma/(2\beta)] / \sqrt{2}.$$

Более распространенным является дифференцируемое выражение [6]

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right). \quad (22)$$

В нем первое слагаемое совпадает с (19), поэтому достаточно найти решение для второго слагаемого. Представим его в виде

$$\frac{\alpha}{\omega_0} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \sin \omega_0 |\tau| = \frac{\alpha}{2j\omega_0} \left[e^{-(\alpha - j\omega_0)|\tau|} - e^{-(\alpha + j\omega_0)|\tau|} \right] e^{-\alpha|\tau|}.$$

Как и в случае с КФ (19), здесь имеется сумма двух экспоненциальных функций с параметрами α_1 и α_2 , что позволяет использовать формулы (13) – (18). Например, второе слагаемое в выражении инерционной дисперсии согласно (15) имеет вид

$$\frac{a^2 \sigma^2 \alpha}{2j\omega_0} \left(\frac{1}{1 + \alpha_1 T} + \frac{1}{1 + \alpha_2 T} \right) = a^2 \sigma^2 \alpha T \varphi(T).$$

Суммируя это выражение с (20), получим искомую дисперсию

$$D_y = a^2 \sigma^2 (1 + 2\alpha T) \varphi(T). \quad (23)$$

В частном случае $\omega_0 = 0$ формула (22) дает КФ

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|),$$

для которой инерционная дисперсия вычисляется согласно (23) при $\omega_0 = 0$.

Пример¹. Оценить допустимость колебаний напряжения на шинах $U_H = 110$ кВ, создаваемых дуговой сталеплавильной печью емкостью 100 тонн. Мощность короткого замыкания $S_K = 6000$ МВА. Нагрузка наиболее загруженной фазы печи в начальный период расплавления имеет КФ вида (19) с дисперсией $D_I = 11551 \text{ A}^2$ и параметрами $\alpha = 1,11 \text{ c}^{-1}$, $\omega_0 = 4,71 \text{ c}^{-1}$ [7].

Потеря напряжения в % от номинального значения получаются умножением тока на коэффициент c :

$$c = 100 \sqrt{3} U_H / S_K = 100 \sqrt{3} 110 / 6000 = 3,175 \text{ (\%)/кА},$$

¹ Пример лишь иллюстрирует порядок расчета. Для практических целей составлена компьютерная программа расчета доз фликера, которая требует от пользователя только ввода исходных данных.

а дисперсия изменения напряжения – на его квадрат:

$$D_{\Delta U} = c^2 D_I = 3,175^2 \cdot 11551 \cdot 10^{-6} = 0,116 \text{ (\%)}^2.$$

Параметры α и ω_0 КФ $K_{\Delta U}(\tau)$ остаются теми же.

Допустимость колебаний оценивается по дозе фликера напряжения P_{St} [1, 2]. Для ее определения необходимо по $K_{\Delta U}(\tau)$ рассчитать КФ $K_Y(\tau)$ реакции $Y(t)$ взвешивающего фильтра фликерметра и дисперсию D_S ощущения фликера $S(t)$ и применить формулы (Б.9) и (Б.10) из [2]. Из-за сложности структуры фильтра его представляют в виде 11-ти параллельно включенных инерционных звеньев первого порядка, параметры которых приведены в [8].

В этом случае для определения КФ реакции достаточно вычислить КФ $k_y(\tau)$ парциальных реакций и взаимные КФ между попарно взятыми парциальными реакциями, используя формулы (14) и (17). Например, первое звено имеет коэффициент передачи $a_1 = 0,00986$ и постоянную времени $T_1 = 3,183$ с. Подставив эти значения в (14), с учетом (19) после несложных вычислений получим

$$k_{y1}(\tau) = 0,0148 e^{-1,11|\tau|} \cos(4,71\tau - 0,125) + 2,22 e^{-0,314|\tau|}.$$

Аналогичным образом вычисляются остальные КФ и взаимные КФ. После их суммирования получим КФ реакции в $(\%)^2$. Для перехода к относительным единицам (о.е.) согласно [1] ее необходимо умножить на множитель $256 \text{ (о.е.)}^2 / (\%)^2$. Расчеты показали, что КФ реакции в $(\text{о.е.})^2$ аппроксимируется выражением

$$K_Y(\tau) = 0,4178 e^{-0,86|\tau|} \cos 4\pi\tau + 0,6444 e^{-28,9|\tau|} \cos 47,6\tau.$$

Среднее значение ощущений фликера

$$S_c = K_Y(0) = 0,4178 + 0,6444 = 1,0622 \text{ (о.е.)}^2.$$

Процесс после квадратора имеет КФ, равную $2K_Y^2(\tau)$. Подстановка этой КФ в (17), с учетом (19), дает дисперсию ощущения фликера $D_S = 2,901 \cdot 10^{-4} \text{ (о.е.)}^4$. Так как стандарт $\sqrt{D_S} \ll S_c$, то функция кумулятивных вероятностей мало отличается от ступенчатой. В этом случае все уровни ощущения фликера в формуле (Б.10) из [2] практически совпадают со средним значением S_c , которое выносится за знак корня. В результате получим искомую дозу

$$P_{St} = 1,0622 \sqrt{0,0314 + 0,0525 + 0,0657 + 0,28 + 0,08} = 0,736.$$

Допустимое значение дозы фликера для помещений, где требуется значительное зрительное напряжение, равно 0,74. Таким образом, ЭМС по колебаниям напряжения не нарушается.

Вывод. Для существенного упрощения решения задачи об инерционном сглаживании случайных процессов в общем случае целесообразно вместо традиционных формул (1) – (2) использовать выражения (3) – (10), которые для часто встречающихся в практике частных случаев дают решения в конечном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. IEC 61000-4-15: Electromagnetic compatibility – Part 4: Testing and measurement techniques. Section 15: Flickermeter – Functional and design specifications, 1997.
2. ГОСТ 13109-97. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. в Украине 01.01.2000.
3. Шидловский А. К., Куренный Э. Г. Введение в статистическую динамику систем электроснабжения. - Киев: Наукова думка, 1984. – 272 с.
4. Eduard G. Kourennyi, Victor A. Petrosov, Lidiya V. Chernikova. Linear filtration of random processes in EMC models: the “partial reactions” method // Electromagnetic Compatibility 2000, part II, Fifteenth International Wroclaw Symposium on Electromagnetic Compatibility. – 2000. – P. 587 – 589.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 678 с.
6. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
7. Влияние дуговых электропечей на системы электроснабжения / Ю.Л. Рыжнев и др. – М.: Энергия, 1975. – 184 с.
8. Чернікова Л.В. Методи розрахунку характеристик випадкових процесів у лінійних фільтрах моделей оцінки електромагнітної сумісності в системах електропостачання загального призначення. – Автореферат на здобуття вченого ступеня канд. техн. наук. – Донецьк: ДонНТУ, 2002.