УДК 621.3.05:519.2

Е.Г. КУРІННИЙ[1] (д-р техн. наук, проф.), **О.О. БУЛГАКОВ**[1],
О.П. ЛЮТИЙ[2] (канд. техн. наук)
**[1] Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
[2] ВАТ «Дніпроспецсталь»**
n8400@matrixhome.net bulgakov-work@mail.ru Lyuty@dss.com.ua

ЙМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСТКИ НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто задачу знаходження ймовірнісного розподілу частки двох нормально розподілених величин. Отримано загальний розв'язок без припущень щодо середніх значень і стандартів. Узагальнено закон Коші на випадок залежних випадкових величин. Виконано лінеаризацію задачі при малих діапазонах зміни параметрів режиму. Надано приклад визначення ймовірнісного розподілу питомих витрат електроенергії при виробництві аміаку.

Ключові слова: питоме електроспоживання, тангенс фі, розподіл діленого та дільника, розподіл частки, кореляція, закон Коші, лінеаризація.

Постановка задачі. В енергетиці зустрічається задача визначення закону розподілу частки $z = y / x$ двох нормально розподілених випадкових величин *x* і *y*, наприклад, питоме споживання є часткою споживання електроенергії і об'єму випуску продукції, тангенс фі – реактивної і активної потужностей. У літературі приводиться точний розв'язок у кінцевому вигляді лише для випадку незалежних величин з нульовими середніми значеннями, коли розподіл частки задається законом Коші [1].

Метою роботи є отримання загального розв'язку, узагальнення закону Коші на випадок залежних величин та оцінка можливості лінеаризації задачі.

Загальний випадок. Система (x, y) нормально розподілених величин характеризується середніми значеннями x_c і y_c, стандартами σ_x і σ_y та коефіцієнтом кореляції *r*. Вона має щільність розподілу [2]

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\Delta}\exp\{ -\frac{1}{2\Delta^2}(\Pi_x^2 - 2r\Pi_x\Pi_y + \Pi_y^2)\}, \tag{1}$$

де $\Delta^2 = 1 - r^2$, $\Pi_x = (x - x_c) / \sigma_x$, $\Pi_y = (y - y_c) / \sigma_y$.

У загальному випадку щільність частки дається формулою (5.1.19) з [1]:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{xy}(x, xz)dx . \tag{2}$$

Для компактності введемо позначення:

$$c = \sqrt{2}\sigma_x\sigma_y\Delta, \qquad A^2(z) = (\sigma_y^2 - 2r\sigma_x\sigma_y z + \sigma_x^2 z^2) / c^2,$$

$$B = (x_c^2\sigma_y^2 - 2rx_c y_c\sigma_x\sigma_y + y_c^2\sigma_x^2) / c^2, \qquad C(z) = \frac{x_c\sigma_y^2 - r(y_c + x_c z)\sigma_x\sigma_y + y_c\sigma_x^2 z}{c\sqrt{\sigma_y^2 - 2r\sigma_x\sigma_y z + \sigma_x^2 z}},$$

$$D(z) = C^2(z) - B, \qquad E(z) = 1 - 2\Phi[\sqrt{2}\ C(z)],$$

де Φ*(x)* – функція стандартного нормального розподілу з нульовим середнім значенням та одиничним стандартом [2].

Замінивши в (1) *x* на *xz* і підставивши отриманий вираз в (2), після інтегрування за частинами отримаємо вираз:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi c A^2(z)}[\exp\{-B\} - \sqrt{\pi}C(z)E(z)\exp\{D(z)\}] . \tag{3}$$

За щільністю розраховуються середнє значення і стандарт

$$z_c = \int_{-\infty}^{\infty} z\ f(z)dz, \qquad \sigma_z = \left[\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)dz - z_c^2\right]^{-0,5}, \tag{4}$$

а також функція розподілу

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz\,. \qquad (5)$$

Аналіз почнемо з теоретичного випадку нульових середніх значень. При $x_c = 0$ і $y_c = 0$ інтегрування згідно (2) дає формулу (5.2.12) з [1]:

$$f(z) = \frac{\Delta}{\pi(\sigma_y / \sigma_x - 2rz + \sigma_x z^2 / \sigma_y)} \text{ при } |r| \neq 1\,. \qquad (6)$$

В [1] стверджується, що, якщо величини *x* і *y* ще й незалежні, коли $r = 0$ і $\Delta = 1$, то розподіл (6) переходить в розподіл Коші

$$f(z) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{\pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)}\,. \qquad (7)$$

Покажемо, що розподіл Коші можна узагальнити і на випадок залежних величин, коли $r \neq 0$. Для цього представимо (6) у вигляді:

$$f(z) = \frac{a}{\pi[(z-\mu)^2 + a^2]} \qquad (8)$$

з параметрами $a = \sigma_y \Delta / \sigma_x$ і $\mu = \sigma_y r / \sigma_x$. При $r = 0$ параметри $a = \sigma_y / \sigma_x$ і $\mu = 0$ – тобто формула (8) дає вираз (7).

Розподіл (8) має ті ж самі властивості, що і (7): він є симетричним відносно μ і має нескінченний стандарт. Величина μ є головним середнім значенням в смислі Коші. Це дозволяє вважати розподіл (8) узагальненим законом Коші. Слід відзначити, що в табл..III.5.3 [3] закон Коші визначається саме формулою (8), але помилково вона відноситься до незалежних величин. До того ж у виразі для функції розподілу $F(z)$ в [3] пропущено множник $1/\pi$.

В практиці середні значення звичайно відрізняються від нуля. При цьому стандарт σ_z стає скінченною величиною. Якщо при незмінних середніх значеннях зменшувати стандарт, закон розподілу (3) буде все більше наближатися до нормального.

Лінеаризація. В режимі стабільного виробництва розкид параметрів режиму відносно їх середніх значень є невеликим, що дозволяє виконати лінеаризацію нелінійної функції y/x в точці (y_c, x_c). Залишивши в ряді Тейлора перші три члена, отримаємо

$$z \approx y_c / x_c - y_c(x - x_c) / x_c^2 + (y - y_c) / x_c = y_c(1 - x / x_c + y / y_c) / x_c\,. \qquad (9)$$

Середнє значення і стандарт становлять

$$z_c \approx y_c / x_c, \quad \sigma_z \approx y_c(\sigma_x^2 / x_c^2 + \sigma_y^2 / y_c^2 - 2r\sigma_x\sigma_y / x_c y_c)^{0,5} / x_c\,. \qquad (10)$$

Лінійна функція від нормального розподілених величин також має нормальний розподіл

$$F(z) \approx \Phi(\Pi_z) = \Phi[(z - z_c) / \sigma_z] \qquad (11)$$

з параметрами (10).

Теоретично можливість лінеаризації визначається оцінкою різниці між приблизними (10) і точними (4) значеннями параметрів розподілів, яка повинна знаходитися у межах допустимих похибок розрахунків: ±10% у теорії електричних навантажень. Для того, щоб не застосовувати загальні формули (3) і (4), в практиці приблизні значення можна порівнювати зі статистичними параметрами.

Розрахункові значення. Можливість і ефективність застосування теорії ймовірностей зумовлені тим, що у практичних задачах враховується не весь діапазон значень випадкової величини *x* (або *y*, або *z*) від $-\infty$ до $+\infty$, а тільки практично достовірних (ПДЗ) [2, 4].

Границі $x_{\min}$ і $x_{\max}$ діапазону ПДЗ визначаються за умови, що ймовірність E_x появи значень у межах $x_{\min} \le x$ або $x \ge x_{\max}$ є нехтувано малою. Математично ця умова дається рівняннями:

$$F(x_{\min}) = E_x\,, \qquad F(x_{\max}) = 1 - E_x\,. \qquad (12)$$

Для відомих розподілів границі ПДЗ розраховують за формулами:

$$x_{\min} = x_c - \beta_{\min}\sigma_x\,, \qquad x_{\max} = x_c + \beta_{\max}\sigma_x\,, \qquad (13)$$

в які входять статистичні коефіцієнти $\beta_{\min}$ і $\beta_{\max}$, які визначаються за граничною ймовірністю E_x. Для симетричних розподілів коефіцієнти $\beta_{\min} = \beta_{\max} = \beta$. Звичайно приймають $E_x = 0,05$, для якої при нормальному розподілі $\beta = 1,65$.

Приклад. В табл.1 у відносних одиницях приведені добові значення об'ємів $\tilde{V}$ виробництва аміаку, втрат $\tilde{W}$ і питомих витрат $\tilde{\rho}$ активної електроенергії. З ймовірністю $E_x = 0,05$ знайти допустимі відхилення питомих втрат від середнього значення.

Таблиця 1 - Добові значення об'ємів виробництва аміаку, втрат і питомих витрат активної електроенергії

$\tilde{V}$	0,878	0,875	1,034	1,0952	0,9957	1,0295	1,077	0,9921	0,8893	1,0772
$\tilde{W}$	0,9526	0,8227	1,0282	1,1524	1,0507	1,1129	0,9789	1,118	1,1181	0,9752
$\tilde{\rho}$	1,085	0,9402	0,9944	1,0522	1,0552	1,081	0,9089	1,1269	1,2573	0,9053

Продовження таблиці 1

$\tilde{V}$	0,9317	0,9342	1,0214	0,8767	1,0323	0,9314	1,0319	0,9788	0,9915	1,0062
$\tilde{W}$	1,1649	0,9562	1,0428	0,6977	0,9928	0,7604	0,8334	1,125	1,0376	1,2089
$\tilde{\rho}$	1,2503	1,0235	1,021	0,7958	0,9617	0,8164	0,8076	1,1494	1,0465	1,2015

Продовження таблиці 1

$\tilde{V}$	0,9738	1,0411	0,9194	0,9484	1,0702	1,1218	0,9756	0,9664	0,9897	1,0997	1,1028
$\tilde{W}$	0,9248	0,9314	0,974	1,1033	0,8232	1,0321	1,0308	1,0669	1,0409	0,941	1,0938
$\tilde{\rho}$	0,9497	0,8946	1,0594	1,1633	0,7692	0,92	1,0566	1,104	1,0517	0,8557	0,9918

За даними табл.1 розрахуємо середні значення і стандарти: $\tilde{V}_c = 0,9964$, $\tilde{\sigma}_V = 0,0698$, $\tilde{W}_c = 1,003$, $\tilde{\sigma}_W = 0,1196$, $\tilde{\rho}_c = 1,0096$, $\tilde{\sigma}_\rho = 0,1274$, а також коефіцієнт кореляції $\tilde{r} = 0,2168$ між $\tilde{V}$ і $\tilde{W}$. Ординати статистичних функцій розподілів на рис.1 показано кружками.

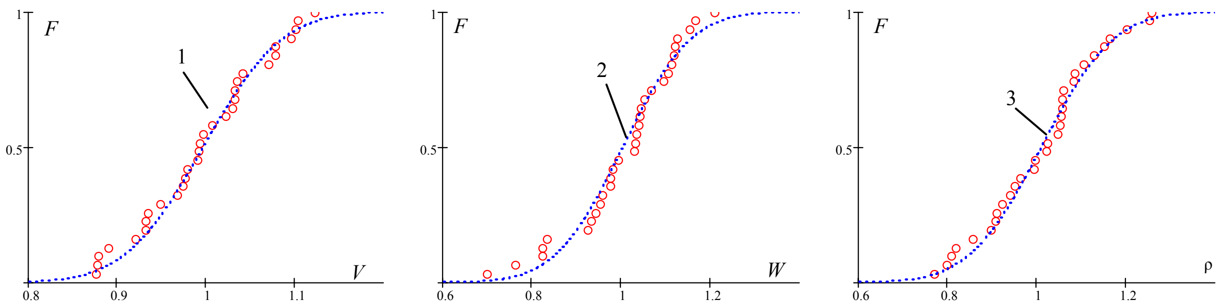

Рисунок 1 – Функції розподілів параметрів режиму виробництва аміаку

Спочатку перевіримо можливість використання нормальних законів розподілу для V і W, прийнявши за їх теоретичні характеристики дослідні значення: $V_c = \tilde{V} = 0,9964$ і інші. Відповідні теоретичні функції розподілу представлено на рис. 1 кривими 1 і 2. Перевірка за критерієм Пірсона підтвердила коректність такої гіпотези. Добре співпадіння статистичних і теоретичних функцій розподілів пояснюється тим, що за місяць спостережень технологічна лінія працювала у стаціонарному режимі без анормальних відхилень.

Середні значення V_c і W_c є суттєво більшими за стандарти σ_V і σ_W, що свідчить про малі діапазони зміни цих параметрів режимів. Тому перевіримо можливість лінеаризації. Для цього розрахуємо приблизні значення (10): $\rho_c = 1,0066$, $\sigma_\rho = 0,1253$. Порівняємо їх з точними (4): $\rho_c = 1,0098$, $\sigma_\rho = 0,1269$. Розбіжності між ними становлять $\delta_\rho = 0,317\%$, $\delta_\sigma = 1,256\%$. Тому і для питомих витрат приймемо нормальний розподіл (крива 3), коректність якого підтверджує перевірка за критерієм Пірсона. Відзначимо, що крива точної функції розподілу $F(\rho)$ повністю співпадає з кривою 3, але для її отримання довелося виконати розрахунок за громіздким виразом (3) і виконати інтегрування згідно (5). Точні значення (4) $\rho_c = 1,0098$ і $\sigma_\rho = 0,1269$ практично не відрізняються від $\tilde{\rho}_c = 1,0096$ і $\tilde{\sigma}_\rho = 0,1274$.

За формулами (13) при $\beta = 1,65$ розрахуємо граничні значення:

$$\rho_{min} = \rho_c - \beta_{min}\sigma_\rho = 1,0098 - 1,65 \cdot 0,1269 = 0,8004, \quad \rho_{max} = \rho_c + \beta_{max}\sigma_\rho = 1,0098 + 1,65 \cdot 0,1269 = 1,2192.$$

Усі дослідні значення із табл.1, окрім 9, 11, 14 та 25, знаходяться у допустимому діапазоні (ρ_{min}, ρ_{max}).

Висновки. 1. У загальному випадку частка двох нормально розподілених величин має закон розподілу (3), який відрізняється від нормального.

2. Ймовірнісний розподіл (8) узагальнює закон Коші на частку залежних нормально розподілених величин з нульовими середніми значеннями.

3. У практичних застосуваннях доцільно перевіряти можливість використання нормального закону розподілу для частки параметрів режиму при малих діапазонах їх змінення.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника, – М.: Советское радио, 1966. – 678 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 570с.
3. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.В. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. – М.: Советское радио, 1970. – 700с.
4. Дмитриева Е.Н. Принцип практической уверенности в задачах электроэнергетики. – Электричество, 2008, №6.- с.15-21.

REFERENCES

1. Tihonov V. I. *Statisticheskaya radiotehnika* [Statistical radio engineering]. Moscow: Sovetskoe radio, 1966. 678p.
2. Ventcel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Nauka, 1969. 570 p.
3. Goryainov V.T., Zhuravlev A.G., Tihonov V.V. *Primery i zadachi po statisticheskoy radiotehnike* [Examples and tasks of statistical radio engineering]. Moscow: Sovetskoe radio, 1970, 700p.
4. Dmitrieva E.N. Practical confidence principle in the power industry problems. *Elektrichestvo.* 2008; №6: 15-21

Надійшла до редакції 14.03.2013 *Рецензент: О.П. Ковальов*

Э.Г. КУРЕННЫЙ[1], А.А.БУЛГАКОВ[1], А.П. ЛЮТЫЙ[2]
[1] Государственное высшее учебное заведение «Донецкий национальный технический университет»
[2] ОАО «Днепроспецсталь»

Вероятностное моделирование отношения нормально распределенных электроэнергетических параметров. Рассмотрена задача нахождения вероятностного распределения отношения двух нормально распределенных величин. Получено общее решение без допущений касательно средних значений и стандартов. Обобщен закон Коши для случая зависимых случайных величин. Выполнено линеаризацию задачи при малых диапазонах изменения параметров режима. Приведен пример определения вероятностного распределения удельных затрат электроэнергии при производстве аммиака.
Ключевые слова: удельное электропотребление, тангенс фи, распределение делимого и делителя, распределение частного, корреляция, закон Коши, линеаризация.

E. KOURENNYI[1], A. BULGAKOV[1], A. LYUTY[2]
[1] State Institution of Higher Education «Donetsk National Technical University»
[2] PJSC «Dneprospetsstal»

Probabilistic Modeling of the Quotient Normally Distributed Electrical Power Parameters. The problem of the quotient distribution law two random variables definition is considered. Random variables have normal distributions. Examples are the specific power consumption and a tangent φ. In the first case the electric power consumption is a dividend and the production volume is a divisor. In the second case the reactive power is a dividend and the active power is a divisor. The final decision is provided in literature only for a special case. In this case mean dividend and divisor values are equal to zero. It is considered that quotient distribution obey to Cauchy distribution under an additional condition about independence of random variables. The purpose of this paper is to find an analytical solution for the general case, extension of the Cauchy distribution on quotient dependent random variables and justification possible linearization. The general formula for the quotient random variables probability density function as an improper integral is initial point. The final formula for quotient normally distributed variables probability density was received. Mean value, standard and distribution function determined by this formula. Linearization for small dividend and divisor ranges was made for the expression at the point of the mean values. The quotient distribution is also a normal distribution. Its mean value is equal to quotient of mean dividend and divisor values. Its standard can be calculated using dividend and divisor standards and the correlation coefficient. After analyzing the data, it is concluded that positive correlation reduces variations, while negative correlation increases it. As an example, we considered specific power consumption distribution law by production of ammonia. The specific power consumption numerical characteristic was calculated. As our results indicate linearization is possible.
Key words: specific power consumption, tangent φ, dividend and divisor distribution, quotient distribution, correlation, Cauchy distribution, linearization.