РУМЯНЦЕВ Н.В., д.э.н., профессор,
заведующий кафедрой «Экономическая кибернетика» Донецкого национального технического университета

АНАЛИЗ ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ПРИБОРАМИ И ПЕРЕНАЛАДКОЙ В НАЧАЛЕ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ

АННОТАЦИЯ. *В работе рассматривается двухканальная система массового обслуживания переналадкой в начале периода занятости. Если требование поступает в систему, находящуюся в свободном неготовом состоянии, то оно вызывает переналадку одного из приборов, а само теряется. Второе требование, поступившее в систему, вызывает переналадку второго прибора, а само также теряется. После окончания переналадки второй прибор также переходит в состояние свободен-готов, после чего требования, поступающие в систему, принимаются к обслуживанию любым прибором.*

В последние годы в печати появилось большое число работ, посвященных вопросам гибкости оборудования или вопросам технологической гибкости оборудования, при которой приборы (или оборудование), находясь в состоянии, свободном от обработки деталей или заказов, при поступлении новых заказов начинают переналадку оборудования на выпуск этих изделий, а только уже потом начинают выпуск готовой продукции. Вопросы, связанные с организацией переналадки, с определением оптимальной партии запуска-выпуска продукции являются достаточно актуальными в условиях рыночной экономики.

Изучению вопросов экономического обоснования применения гибких производственных систем, т.е. систем, способных достаточно быстро, после проведенной переналадки, стоимость которой зависит от вида выпускаемой продукции, переходить к выпуску данной продукции, посвящены труды отечественных ученых: Б. Аникина [1], М. Блехермана [2], А. Белого, Ю. Лысенко, А. Мадых, К. Макарова [3], В. Николайчука [4], В. Самочкина [5], В. Соколова [6]. В этих работах сформированы фундаментальные и прикладные основы гибких производственных систем. Однако, для определения оптимального объема выпускаемой продукции, описания процессов, происходящих в них и связанных с вопросами технического обеспечения, т.е. выбора числа станков, необходимо знание вероятностей состояний данной системы. Вопросам моделирования гибких производственных систем, содержащих одну производственную линию или один станок, посвящены работы автора [7]. Представляет интерес рассмотрение данных вопросов, но уже для сложных систем, содержащих более одного прибора.

Целью исследования является анализ двухканальной системы массового обслуживания с переналадкой в начале периода занятости, на вход которой поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda > 0$. Оба прибора имеют одинаковую производительность, причем время обслуживания заявок или заказов имеет показательный закон распределения с параметром $\mu > 0$.

Оба прибора обладают особенностью, состоящей в том, что как только приборы освобождаются от требований, находящихся в системе, они переходят в состояние, которое будем называть состоянием свободен-неготов. Если требование поступает в систему, находящуюся в этом состоянии, то оно вызывает переналадку одного из приборов, а само теряется. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$. После окончания переналадки прибор переходит в состояние свободен-готов и может обслуживать требования.

Второе требование, поступившее в систему, вызывает переналадку второго прибора, а само также теряется. После окончания переналадки второй прибор также переходит в состояние свободен-готов. После этого вся система, состоящая из двух приборов, переходит в состояние готовности к работе, которое будем называть состоянием свободен-готов. Требования, поступающие в систему, принимаются к обслуживанию любым прибором.

Если после поступления требования один прибор, после завершения переналадки находится в состоянии свободен-готов и в систему поступает новое требование, то оно вызывает переналадку прибора и теряется. Таким образом, пока в системе не закончена переналадка приборов, требования, поступающие в систему, теряются.

Система массового обслуживания, моделирующая поведение гибкой производственной системы, может находиться в следующем множестве состояний (i, j, k), где первый индекс i характеризует число приборов, находящихся в состоянии переналадки; j – число готовых к работе приборов, т.е. число приборов закончивших переналадку и способных обслуживать заказы; k – число заявок в системе. Очевидно, что $i,\ j = 0, 1, 2$; $k \geq 0$. Тогда система массового обслуживания может находиться в следующих состояниях:

(0) – система свободна и неготова к обслуживанию клиентов;

$(1,0,0)$ – один прибор производит переналадку, второй – свободен, но неготов, в очереди нет клиентов;

$(0,1,0)$ – один прибор закончил переналадку, свободен и готов к обслуживанию требований, но в системе нет клиентов;

$(2,0,0)$ – два прибора производят переналадку, в очереди нет клиентов;

$(0,1,1)$ – один прибор свободен-неготов, второй – обслуживает клиента, очередь равна нулю;

$(1,1,0)$ – один прибор свободен – готов, второй прибор производит переналадку, в системе нет требований;

$(1,1,k)$ – один прибор находится в состоянии переналадки, второй – обслуживает клиентов, причем в очереди находится $(k-1)$-клиент $(k \ge 1)$;

$(2,0)$ – оба прибора готовы, но свободны от клиентов;

$(2,1)$ – оба прибора готовы к обработке заказов, причем один из них обслуживает имеющегося клиента, второй прибор простаивает;

$(0,2,k)$ – оба прибора заняты обслуживанием клиентов, причем в системе находится $(k-2)$ клиента $(k \ge 2)$.

Замечание. В дальнейшем удобно заменить состояние $(0,2,k)$ на двумерное состояние $(2,k)$.

Построим размеченный граф состояний, описанной системы массового обслуживания:

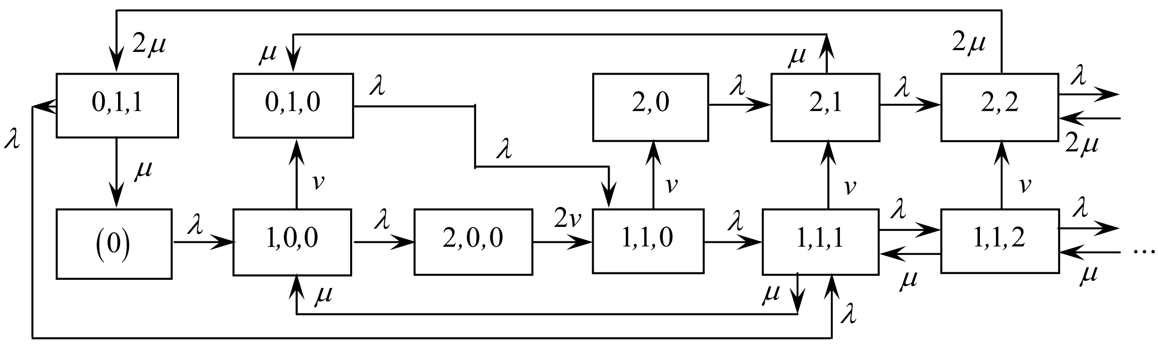

Рис. 1 Размеченный граф состояний системы с двумя приборами и отказами клиентов во время переналадки

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, заданный на множестве описанных выше состояний и пусть

$P_{00} = \mathbb{P}\{\xi(t) = 0\}$;

$P_{010} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (0,1,0)\}$;

$P_{100} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (1,0,0)\}$;

$P_{011} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (0,1,1)\}$;

$P_{200} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (2,0,0)\}$;

$P_{110} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (1,1,0)\}$;

$P_{11k} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (1,1,k)\}, \quad k \ge 1$;

$P_{2k} = \mathbb{P}\{\xi(t) = (2,k)\}, \quad k \ge 0$.

Тогда, опираясь на размеченный граф состояний, легко можно составить системы алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний процесса $\xi(t)$.

Имеем

$$\begin{cases} -\lambda P_{000} + \mu P_{011} = 0 \\ -\left(\lambda + \mu\right) P_{011} + 2\mu P_{22} = 0 \\ -\lambda P_{010} + \mu P_{21} + \nu P_{100} = 0 \\ -\left(\lambda + \nu\right) P_{100} + \mu P_{111} + \lambda P_{000} = 0 \\ -2\nu P_{200} + \lambda P_{100} = 0 \\ -\left(\lambda + \nu\right) P_{110} + \lambda P_{010} + 2\nu P_{200} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\left(\lambda + \nu + \mu\right) P_{111} + \lambda P_{110} + \lambda P_{011} + \mu P_{112} = 0 \\ -\left(\lambda + \nu + \mu\right) P_{11k} + \lambda P_{11k-1} + \mu P_{11k+1} = 0, \ k \ge 2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\lambda P_{20} + \nu P_{110} = 0 \\ -\left(\lambda + \mu\right) P_{21} + \lambda P_{20} + \nu P_{111} = 0 \\ -\left(\lambda + 2\mu\right) P_{22} + \lambda P_{21} + \nu P_{112} + 2\mu P_{23} = 0 \\ -\left(\lambda + 2\mu\right) P_{2k} + \lambda P_{2k-1} + \nu P_{11k} + 2\mu P_{2k+1} = 0, \ k \ge 3 \end{cases} \tag{3}$$

Для нахождения решений систем (2) и (3) введем производящие функции

$$a_{11}\left(z\right) = \sum_{k \ge 1} P_{1k} z^k , \qquad a_2\left(z\right) = \sum_{k \ge 0} P_{2k} z^k .$$

Тогда, умножая уравнения системы (2) на z в соответствующих степенях, суммируя и проводя несложные преобразования, получаем, что

$$a_{11}\left(z\right) = \frac{z\left(P_{111} - \rho z P_{110} - \rho z P_{011}\right)}{\rho z^2 - z\left(1 + \rho + \delta\right) + 1} \sum_{k \ge 1} P_{1k} z^k , \tag{4}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}, \quad \delta = \dfrac{\nu}{\mu}$.

Поступая аналогично, легко можно из системы (3) определить, что

$$\begin{aligned} &\left(\rho z^2 - z\left(2 + \rho\right) + 2\right) a_2\left(z\right) + \delta z a_{11}\left(z\right) = 2\left(1 - z\right) P_{20} + \\ &+ z\left(2 - z\right) P_{21} + 2z^2 P_{22} - \delta z P_{110} \end{aligned} .$$

Учитывая, что $\rho z^2 - z\left(2 + \rho\right) + 2 = \left(1 - z\right)\left(2 - \rho z\right)$ предыдущее соотношение окончательно приведем к виду:

$$\left(1 - z\right)\left(2 - \rho z\right) a_2\left(z\right) + \delta z a_{11} = 2\left(1 - z\right) P_{20} + z\left(2 - z\right) P_{21} + 2z^2 P_{22} - \delta z P_{110} . \tag{5}$$

Легко заметить, что система (2) и соотношения (4), (5) содержат неизвестные вероятности состояний системы, а именно:

$$P_{20}, P_0, P_{100}, P_{011}, P_{111}, P_{010}, P_{21}, P_{200}, P_{110}, P_{22} . \tag{6}$$

Для их нахождения необходимо к системе (1) добавить первые два уравнения системы (3) и еще одно уравнение, полученное из (4) применением теоремы Руше.

Так как знаменатель (4) имеет два корня, причем один из них по модулю меньше единицы, а само выражение для $a_{11}\left(z\right)$ является аналитической функцией в области $\left|z\right| < 1$, то это означает, что и числитель выражения (4) в этой точке обращается также в нуль.

Пусть z_0 – корень квадратного уравнения $\rho z^2 - z\left(1 + \rho + \delta\right) + 1 = 0$, по модулю меньший единицы, тогда получаем, что и

$$P_{111} - \rho z_0 P_{110} - \rho z_0 P_{011} = 0 . \tag{7}$$

Добавляя к системе (1) первые два уравнения системы (3) и соотношение (7), получаем систему уравнений для нахождения неизвестных вероятностей (6) следующего вида

$$
\begin{cases}
-\lambda P_{000}+\mu P_{011}=0\\
-(\lambda+\mu)P_{011}+2\mu P_{22}=0\\
-(\lambda+\nu)P_{100}+\mu P_{111}+\lambda P_0=0\\
-\lambda P_{010}+\mu P_{21}+\nu P_{100}=0\\
-2\nu P_{200}+\lambda P_{100}=0\\
-(\lambda+\nu)P_{110}+\lambda P_{010}+2\nu P_{200}=0\\
-\lambda P_{20}+\nu P_{110}=0\\
-(\lambda+\mu)P_{21}+\lambda P_{20}+\nu P_{111}=0\\
P_{111}-\rho z_0 P_{110}-\rho z_0 P_{011}=0
\end{cases} \tag{8}
$$

Решение системы (8) дает следующие значения для вероятностей (6), выраженные через P_0:

$$P_{011}=\rho P_0, \tag{9}$$

$$P_{22}=\frac{\rho(1+\rho)}{2}P_0, \tag{10}$$

$$P_{20}=\left[1+\rho z_0-\frac{\delta}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\delta P_0}{\rho(1-z_0)}=\left[\rho z_0+\frac{1+\rho}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\delta P_0}{\rho(1-z_0)}, \tag{11}$$

$$P_{200}=\frac{\rho}{2\delta}P_{100}=\left[1+\rho z_0-\frac{\delta z_0}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\rho^2 P_0}{2\delta(\rho+\delta)(1-z_0)}, \tag{12}$$

$$P_{111}=\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{1+\rho+\delta}\cdot\frac{\rho z_0 P_0}{1-z_0}, \tag{13}$$

$$P_{21}=\left[\rho z_0+\frac{1+\rho z_0}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\delta P_0}{1-z_0}, \tag{14}$$

$$P_{010}=\left[(1+\rho z_0)(\delta+2\rho)-\frac{(\rho+\delta)^2-\rho^2 z_0}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\delta P_0}{\rho(\rho+\delta)(1-z_0)}, \tag{15}$$

$$P_{110}=\frac{\rho P_{20}}{\delta}=\left[\rho z_0+\frac{1+\rho}{1+\rho+\delta}\right]\cdot\frac{P_0}{1-z_0}, \tag{16}$$

$$P_{100}=\left[1+\rho z_0-\frac{\delta z_0}{1+\rho+\delta}\right]\frac{\rho P_0}{(\rho+\delta)(1-z_0)}. \tag{17}$$

После подстановки значений P_{111}, P_{110}, P_{011} из соотношений (9), (13), (16), находим выражение для производящей функции $a_{11}(z)$, а именно:

$$a_{11}(z)=\frac{\rho z(z_0-z)P_0}{\rho z^2-z(1+\rho+\delta)+1}\cdot\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{(1+\rho+\delta)(1-z_0)}.$$

Так как знаменатель (4) имеет два корня z_0 и z_1, то разлагая его на множители, получаем $\rho z^2-z(1+\rho+\delta)+1=\rho(z_0-z)(z_1-z)$, тогда производящая функция $a_{11}(z)$ окончательно принимает вид

$$a_{11}(z)=\frac{z\left[(1+\rho)^2+\rho\delta\right]P_0}{(1-z_0)(1+\rho+\delta)(z_1-z)}. \tag{18}$$

Производящую функцию (18) можно, после несложных преобразований, привести к виду, удобному для определения вероятностей состояний системы в явном виде. Имеем

$$a_{11}(z)=\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{(1-z_0)(1+\rho+\delta)}\left[\frac{z}{z_1}+\left(\frac{z}{z_1}\right)^2+\left(\frac{z}{z_1}\right)^3+\ldots\right]P_0.$$

Откуда

$$P_{11k}=\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{(1-z_0)(1+\rho+\delta)}\cdot\frac{P_0}{z_1^k}=\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{(1-z_0)}(\rho z_0)^k P_0. \tag{19}$$

Теперь легко можно, преобразовав правую часть уравнения (5), подставляя в нее соотношения (10), (11), (14), (16), получить выражение для $a_2(z)$ в виде:

$$(1-z)(2-\rho z)a_2(z)=\left[\frac{\delta A(z)+\delta z_0 B(z)}{1-z_0}+\rho z^2(1+\rho)\right]P_0-\delta z a_{11}(z), \tag{20}$$

где $$A(z)=\frac{(2-2\rho+\rho z)(1-z)-\rho^2 z}{\rho(1+\rho+\delta)}, \tag{21}$$

$$B(z)=\frac{\rho z(2-z)(1-z)(2+\rho z)}{1+\rho+\delta}. \tag{22}$$

Итак, для окончательного решения поставленной задачи необходимо определить вероятность P_0 свободного состояния. Она определяется из условия нормировки, которое принимает вид

$$a_{11}(1)+a_2(1)+P_0+P_{010}+P_{011}+P_{100}+P_{200}+P_{110}=1. \tag{23}$$

Имеем

$$a_{11}(1)=\frac{\rho c P_0}{\delta}, \tag{24}$$

где $$c=\frac{(1+\rho)^2+\rho\delta}{1+\rho+\delta}.$$

Для вычисления $a_2(1)$ применим правило Лопиталя в точке $z=1$. Для этого нужно вычислить производную в правой и левой частях (19). Приведем промежуточные вычисления, а именно: вычислим производные в точке $z=1$ от следующих функций:

$$A'(1)=\frac{\rho-2-\rho^2}{\rho(1+\rho+\delta)}, \tag{25}$$

$$B'(1)=-\rho-2, \tag{26}$$

$$a'_{11}(1)=\frac{\delta-(1-z_0)(1-\rho)}{\delta^2(1-z_0)}\rho c P_0. \tag{27}$$

Производная же правой части в точке $z=1$ равная

$$\left[\frac{\delta A'(1)+\delta z_0 B'(1)}{1-z_0}+2\rho(1+\rho)\right]P_0-\delta a_{11}(1)-\delta a'_{11}(1).$$

Тогда, после преобразований $a_2(1)$, с учетом (25)-(27), принимает вид

$$a_2(1)=\left[\frac{\delta(\rho-2-\rho^2)}{\rho(1+\rho+\delta)(1-z_0)}-\frac{\delta z_0(\rho+2)}{1-z_0}+2\rho(1+\rho)-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta+(1-z_0)(\delta+\rho-1)}{\delta(1-z_0)}\cdot\rho c\right]\frac{P_0}{\rho-2}. \tag{28}$$

Итак, подставляя значения выражений (9), (10), (12), (16), (17), (24) в условие нормировки (23) можно определить величину P_0. В силу громоздкости его вычисления окончательное выражение для P_0 приводить не будем.

Замечание 1. Можно показать, что если стационарные вероятности состояний системы существуют, то должно выполняться условие $\rho<2$ и $\nu>0$.

Замечание 2. Выражение $a_{11}(1)+P_{110}$ на практике интерпретируется как вероятность того, что один прибор производит переналадку, а один прибор обслуживает требования. Аналогично $a_{20}(1)$ – интерпретируется как вероятность того, что два прибора способны обслуживать требования, т.е. оба прибора закончили переналадку и возможно обслуживают требования.

ВЫВОДЫ. Итак, в заключение следует отметить тот факт, что нами решена достаточно важная задача нахождения некоторых числовых характеристик системы обслуживания, описывающей функционирование гибкой производственной системы, состоящей из двух производственных линий, переналадка которых начинается после поступления заказов в свободные, простаивающие, нефункционирующие гибкие системы. Знание этих числовых характеристик позволит определить и все другие, необходимые для практического применения, показатели.

Литература

1. Логистика / Б.А. Аникин [и др.]; под редакцией Б.А. Аникина, Т.А. Радкиной. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. – 408 с.
2. Блехерман М.Х. Гибкие производственные системы: (Организационно экономические аспекты) / М.Х. Блехерман. – М.: Экономика, 1988. – 221 с.
3. Комплексные оценки в системе рейтингового управления предприятием / А.П. Белый, Ю.Г. Лысенко, А.А. Мадых, К.Г. Макаров. – Донецк: Юго-Восток, 2003. – 117 с.
4. Николайчук В.Е. Теория и практика управления материальными потоками (логистическая концепция): Монография / В.Е. Николайчук, В.Г. Кузнецов. – Донецк: ДонГУ, «КИТИС», 1999. – 413 с.
5. Самочкин В.Н. Гибкое развитие предприятия. Анализ и планирование / В.Н. Самочкин. – М.: Дело, 1999. – 336 с.
6. Соколов В.Г. Исследование гибкости и надежности экономических систем / В.Г. Соколов, В.А. Смирнов. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990. – 253 с.
7. Румянцев Н.В. Моделирование технологической гибкости производственно-экономических систем. Монография / Ю.Г. Лысенко, Н.В. Румянцев. – Донецк: ДонНУ, 2007. – 238 с.