УДК 519.152

Постан М.Я., д.э.н., профессор, Одесский национальный морской университет, postan@ukr.net
Румянцев Н.В., д.э.н., профессор, ДонНУ, mmme@dongu.donetsk.ua

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СНОСОМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ ХРАНЕНИЯ ЗАПАСОВ

Аннотация. *Для моделирования и анализа многих реальных систем массового обслуживания и хранения запасов, встречающихся в промышленности, на транспорте и в логистике, удобно использовать аппарат так называемых марковских и полумарковских процессов со сносом. В статье демонстрируется применение этих процессов для моделирования двухфазной системы обслуживания/хранения запасов однородного продукта с обратной связью и переналадкой канала обслуживания на первой фазе после завершения периода занятости. Для нахождения стационарного распределения вероятностей такой системы предложен простой рекуррентный алгоритм.*

1. Введение. Как известно [1, 2, 3], марковские процессы, содержащие наряду с дискретной компонентой (цепью) также одну или несколько непрерывных компонент типа случайных блужданий, являются весьма гибким математическим аппаратом для описания и анализа широкого класса обслуживающих систем и систем хранения запасов. Непрерывные компоненты в таких системах могут описывать, например, объем работ по обслуживанию требований с заданными скоростями работы прибора обслуживания. В моделях хранения запасов они интерпретируются как текущий уровень запаса некоего продукта.

Моделированию такого рода стохастических систем с помощью аппарата линейчатых марковских процессов, а также марковских и полумарковских процессов со сносом посвящены работы [4-7]. В данной статье применение указанных типов марковских процессов демонстрируется для моделирования и анализа более общих систем обслуживания, чем ранее исследовавшиеся [4-7]. Изучаемая система состоит из двух фаз, на первую фазу прибывает некоторый продукт партиями случайного размера (требования) для переработки и последующего хранения. Ее поведение описывается обслуживающей системой типа M/G/1 с ожиданием. В процессе обслуживания этот продукт с заданной скоростью поступает во вторую фазу, откуда он покидает систему с определенной скоростью. Указанные скорости зависят от числа требований, находящихся в первой фазе системы. После опустошения первой фазы входящий поток требований в нее не поступает в течение случайного промежутка времени (происходит переналадка прибора), по истечении которого поступление требований возобновляется.

Показано, что в такой системе, как и в более простых изученных ранее случаях, стационарное распределение вероятностей состояний может быть вычислено с помощью некоторой рекуррентной процедуры.

2. Описание системы. Рассмотрим обобщение одноканальной системы обслуживания с входящим потоком требований случайной интенсивности и переменной скоростью обслуживания, впервые изучавшейся В.А. Ивницким [8]. В нашей модели эта система описывает функционирование первой фазы.

Обозначим через $\nu(t)$ число требований, находящихся в системе обслуживания в момент времени *t*. При условии $\nu(t) = k$ за малое время Δt в систему может поступить новое требование с вероятностью $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$. Обслуживание требования состоит в выполнении определенной работы, объем которой зависит от числа требований, находящихся в системе сразу после начала указанного обслуживания. Если это число равно k, то величина работы имеет функцию распределения (ф.р.) $G_k(x)$, причем скорость выполнения работы равна W_k. Иными словами, если в момент t в системе находится k требований и на прибор поступает требование с необходимой величиной работы по его обслуживанию x, а до окончания обслуживания другие требования в систему не поступят, то данное обслуживание завершится в момент $t + x / W_k$.

После завершения периода занятости прибор немедленно начинает переналаживаться, причем время переналадки – случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром a. В течение переналадки прибора требования в систему не поступают.

Результатом обслуживания требований в первой фазе является выход из нее продукта со скоростями $W_1, W_2, \ldots,$ который попадает непосредственно во вторую фазу. Из нее он выходит со скоростью U_k при условии $\nu(t) = k.$

Описанная двухфазовая система обслуживания/хранения запасов служит моделью многих реальных систем: коммуникационных, производственно-транспортных и др.

Далее будем считать, что $U_0 > 0,\ W_k > U_k, k = 1,2,\ldots,$ и $\sup_k W_k, \sup_k U_k < \infty.$

3. Математическая модель системы и ее анализ. Введем несколько дополнительных условных обозначений. В случае, когда $\nu(t) = k \geq 1,$ т.е. очередная переналадка уже завершена и прибор в момент t обслуживает какое-то требование, обозначим через $\gamma(t)$ величину работы, оставшейся после момента t до окончания этого обслуживания. Обозначим через $\delta(t)$ случайную переменную, принимающую два значения:

- $\delta(t) = 0,$ если в момент t прибор доступен для обслуживания требований,
- $\delta(t) = 1,$ если он находится под переналадкой в момент t.

Пусть $\xi(t)$ означает содержимое хранилища во второй фазе в момент t. Рассмотрим следующий случайный процесс:

$$\zeta(t) = \begin{cases} (0, \xi(t)), & \text{если } \nu(t) = 0,\ \delta(t) = 0, \\ (1, \xi(t)), & \text{если } \delta(t) = 1, \\ (0, \nu(t), \gamma(t), \xi(t)), & \text{если } \nu(t) > 0, \delta(t) = 0. \end{cases}$$

В силу сделанных выше допущений этот процесс может быть отнесен к комбинации линейчатого марковского процесса с фиксированным остатком и случайного блуждания на полуоси $[0,\infty)$ с задержкой в нуле [2,77]. Обозначим его предельное распределение следующим образом (в предположении его существования):

$$F_0(x)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\delta(t)=0,\nu(t)=0,\xi(t)<x\},$$

$$F_1(x)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\delta(t)=1,\xi(t)<x\},$$

$$F_{0k}(x_1,x_2)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{\delta(t)=0,\nu(t)=k,\gamma(t)<x_1,\xi(t)<x_2\},\quad k\ge 1$$

Обозначим также через $p_0=F_0(\infty),\ p_1=F_1(\infty),\ p_{0k}=F_{0k}(\infty,\infty),\ k=1,2,\ldots$.

<u>ТЕОРЕМА 1.</u> Функции $F_0(x),F_1(x),F_{0k}(x_1,x_2),\quad k\ge 1$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}U_0F_0'(x_2)-\lambda_0F_0(x_2)+aF_1(x_2)=0, & (1)\\ -aF_1(x_2)+U_0F_1'(x_2)+W_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{01}(0,x_2)=0, & (2)\\ -W_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{01}(0,x_2)+W_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{01}(x_1,x_2)-V_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}F_{01}(x_1,x_2)+\lambda_0G_1(x_1)F_0(x_2)- & \\ -\lambda_1F_{01}(x_1,x_2)+G_1(x_1)W_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{02}(0,x_2)=0, & (3)\\ W_k\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{0k}(0,x_2)+W_k\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{0k}(x_1,x_2)-V_k\dfrac{\partial}{\partial x_2}F_{0k}(x_1,x_2)+ & \\ +G_k(x_1)W_{k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}F_{0,k+1}(0,x_2)-\lambda_kF_{0k}(x_1,x_2)+\lambda_{k-1}F_{0,k-1}(x_1,x_2)=0,\ k\ge 2, & (4)\end{cases}$$

$$F_{0k}(x_1,0)=F_{0k}(0,x_2)=0,k\ge 1, \qquad (5)$$

где $\quad V_k=W_k-U_k,\quad k\ge 1.$

Справедливость теоремы 1 доказывается с помощью обычных вероятностных рассуждений (см. [2,4]).

Система уравнений (1)-(5) должна решаться с учетом условия нормировки:

$$F_0(\infty)+F_1(\infty)+\sum_{k\ge 1}F_{0k}(\infty,\infty)=1.$$

В частности, при $x_2\to\infty$ из (1)-(5) вытекает соответствующая система дифференциальных уравнений для нахождения стационарного распределения $F_{0k}(x_1)=F_{0k}(x_1,\infty), k\ge 1,\quad p_0=F_0(\infty), p_1=F_1(\infty)$ линейчатого марковского процесса

$$\zeta_1(t)=\begin{cases}0, & \text{если } \nu(t)=0, \delta(t)=0,\\ 1, & \text{если } \delta(t)=1,\\ (0,\nu(t),\gamma(t)), & \text{если } \nu(t)>0,\ \delta(t)=0.\end{cases}$$

Эта система имеет следующий вид:

$$\begin{cases}-\lambda_0 p_0+ap_1=0,\\ -ap_1+W_1F_{01}'(0)=0,\\ -W_1F_{01}'(0)+W_1F_{01}'(x_1)+\lambda_0G_1(x_1)p_0+G_1(x_1)W_2F_{02}'(0)-\lambda_1F_{01}(x_1)=0,\\ -W_kF_{0k}'(0)+W_kF_{0k}'(x_1)+G_k(x_1)W_{k+1}F_{0,k+1}'(0)-\lambda_kF_{0k}(x_1)+\lambda_{k-1}F_{0,k-1}(x_1)=0,\ k\ge 2,\\ F_{0k}(0)=0,\quad k\ge 1.\end{cases}\qquad(6)$$

Обозначим через

$$g_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dG_k(x), \varphi_{0k}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF_{0k}(x), \mathrm{Re}\, s\ge 0.$$

Почти дословно повторяя доказательство, приведенное в [2,76; 8] для случая $a=\infty$, можно показать, что функции $\varphi_{0k}(s)$ и постоянные p_0, p_1, p_{0k} вычисляются с помощью нижеприведенных рекуррентных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = \frac{\lambda_0}{a} p_0 \\
&p_{01} = \frac{\lambda_0[1 - g_1(\lambda_1 / W_1)] p_0}{\lambda_1 g_1(\lambda_1 / W_1)}, \\
&\varphi_{01}(s) = \frac{\lambda_0[g_1(\lambda_1 / W_1) - g_1(s)] p_0}{(sW_1 - \lambda_1) g_1(\lambda_1 / W_1)}, \\
&p_{0k} = \frac{\lambda_{k-1}[p_{0,k-1} - \varphi_{0,k-1}(\lambda_k / W_k)]}{\lambda_k g_k(\lambda_k / W_k)}, k \ge 2, \\
&\varphi_{0k}(s) = \frac{1}{sW_k - \lambda_k}[\lambda_{k-1} p_{0,k-1} - \lambda_k p_{0k} g_k(s) - \lambda_{k-1}\varphi_{0,k-1}(s)], k \ge 2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Постоянная p_0 находится из условия нормировки

$$
p_0 + p_1 + \sum_{k \ge 1} p_{0k} = 1. \tag{8}
$$

Суммирование всех уравнений системы (6) и почленное интегрирование результата сложения приводит к такому равенству:

$$
\lambda_0 g_1^{(1)} p_0 = \sum_{k \ge 1} p_{0k}(W_k - \lambda_k g_k^{(1)}), \tag{9}
$$

где $g_k^{(1)} = \int_0^\infty x dG_k(x) < \infty, k \ge 1$. Нетрудно убедиться, что условия

$$
W_k > 0, \quad k \ge 1, \quad \sum_{k \ge 0} \lambda_k^{-1} = \infty, \quad p_0 > 0 \tag{10}
$$

достаточны, для того, чтобы распределение вероятностей $\{p_0, p_1, F_{0k}(x)\}$ было эргодическим. Действительно, при выполнении условий (10) распределение, заданное формулами (7), (8), определяет собственное распределение вероятностей. Непосредственной подстановкой в преобразованную по Лапласу-Стилтьесу систему уравнений (6) можно убедиться в том, что это распределение стационарно. Поскольку в силу условий (10) состояния марковского процесса $\zeta_1(t)$ - сообщающиеся, то данное распределение является эргодическим.

Приступим теперь к решению системы уравнений (1)-(5). Обозначим через

$$f_{0k}(s_1,s_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1x_1-s_2x_2}dF_{0k}(x_1,x_2),\ k\ge 1,$$

$$f_i(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF_i(x),\quad i=0,1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если процесс $\zeta(t)$ обладает стационарным эргодическим распределением, то функции $f_{0k}(s_1,s_2)$, $f_{0k}(s_2)\equiv f_{0k}(0,s_2)$ определяются с помощью нижеприведенных соотношений:

$$\begin{aligned}&(s_1W_k-s_2V_k-\lambda_k)f_{0k}(s_1,s_2)=s_2(1-g_k(s_1))[U_0F_1(0)+U_0(1-\frac{s_2U_0}{a})-\\&-s_2U_0(1+\frac{\lambda_0-s_2U_0}{a})f_0(s_2)+\sum_{i=1}^{k-1}V_if_{0i}(s_2)]-g_k(s_1)(\lambda_k+s_2V_k)f_{0k}(s_2)]-\\&-\lambda_{k-1}f_{0,k-1}(s_1,s_2),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&(s_2V_k+\lambda_k)f_{0k}(s_2)=\{s_2[\sum_{i=1}^{k-1}V_if_{0i}(s_2)+U_0F_1(0)+U_0F_0(0)(1-\frac{s_2U_0}{a})-\\&-s_2U_0(1+\frac{\lambda_0-s_2U_0}{a})f_0(s_2)](1-g_k(\frac{\lambda_k+s_2V_k}{W_k}))+\lambda_{k-1}f_{0,k-1}(s_2)-\\&-\lambda_{k-1}f_{0,k-1}(s_2)-\lambda_{k-1}f_{0,k-1}(\frac{\lambda_k+s_2V_k}{W_k})\}/g_k(\frac{\lambda_k+s_2V_k}{W_k}),\qquad k\ge 2,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&(s_1W_1-s_2V_1-\lambda_1)f_{01}(s_1,s_2)=(1-g_1(s_1))\{s_2U_0[F_1(0)+(1-\frac{s_2U_0}{a})F_0(0)]+\\&+[\lambda_0-s_2U_0(1+\frac{\lambda_0-s_2U_0}{a})]f_0(s_2)\}-(s_2V_1+\lambda_1)f_{01}(s_2),\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&(s_2V_1+\lambda_1)f_{01}(s_2)=[1-g_1(\frac{s_2V_1+\lambda_1}{W_1})]\{s_2U_0[F_1(0)+(1-\frac{s_2U_0}{a})\times\\&\times F_0(0)]+(\lambda_0-s_2U_0)f_0(s_2)\}/g_1(\frac{s_2V_1+\lambda_1}{W_1}),\qquad \mathrm{Re}\,s_1,\ \mathrm{Re}\,s_2\ge 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя к уравнениям (1)-(4) двойное преобразование Лапласа-Стилтьеса с учетом условий (5), придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}(\lambda_0 - s_2 U_0) f_0(s_2) = a f_1(s_2) - s_2 U_0 F_0(0), & (15)\\ (a - s_2 U_0) f_1(s_2) = W_1 d_1(s_2) - s_2 U_0 F_1(0), & (16)\\ (s_1 W_1 - s_2 V_1 - \lambda_1) f_{01}(s_1, s_2) = W_1 d_1(s_2) - g_1(s_1) W_2 d_2(s_2) - \lambda_0 g_1(s_1) f_0(s_2), & (17)\\ (s_1 W_k - s_2 V_k - \lambda_k) f_{0k}(s_1, s_2) = W_k d_k(s_2) - g_k(s_1) W_{k+1} d_{k+1}(s_2) - \lambda_{k-1} f_{0,k-1}(s_1, s_2),\ k \ge 2, & (18).\end{cases}$$

где $d_k(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d(\frac{\partial}{\partial x_1} F_{0k}(0, x))$.

Из (15), (16) находим, что

$$[-\lambda_0 + s_2(1 + \frac{\lambda_0 - s_2 U_0}{a})] f_0(s_2) = -W_1 d_1(s_2) + s_2 U_0 [F_1(0) + (1 - \frac{s_2 U_0}{a}) F_0(0)]. \qquad (19)$$

При $s_1 \to +0$ из (17), (18) вытекает такая система уравнений:

$$\begin{cases}-(s_2 V_1 + \lambda_1) f_{01}(s_2) = W_1 d_1(s_2) - W_2 d_2(s_2) - \lambda_0 f_0(s_2),\\ -(s_2 V_k + \lambda_k) f_{0k}(s_2) = W_k d_k(s_2) - W_{k+1} d_{k+1}(s_2) - \lambda_{k-1} f_{0,k-1}(s_2),\ k \ge 2.\end{cases} \qquad (20)$$

Последовательно складывая уравнение (19) с первым уравнением системы (20), затем его же с первым и вторым уравнением и т.д., находим

$$\begin{aligned} W_{k+1} d_{k+1}(s_2) &= s_2 U_0 [F_1(0) + (1 - \frac{s_2 U_0}{a}) F_0(0) - (1 + \frac{\lambda_0 - s_2 U_0}{a}) f_0(s_2)] + \\ &+ (s_2 V_k + \lambda_k) f_{0k}(s_2) + s_2 \sum_{i=1}^{k-1} V_i f_{0i}(s_2),\ k \ge 1. \end{aligned} \qquad (21)$$

Подставляя соотношения (21) в (18), получим (11). В левой части равенства (11) стоит произведение выражения $(s_1 W_k - s_2 V_k - \lambda_k)$ на функцию, заведомо аналитическую в области $\operatorname{Re} s_1 \ge 0,\ \operatorname{Re} s_2 \ge 0$. Поэтому при

$s_1 = (s_2 V_k + \lambda_k)/W_k$ правая часть равенства (11) также должна обращаться в нуль, откуда получаем соотношение (12).

Если сложить все уравнения (15)-(18), то придем к следующему равенству:

$$(1 + \frac{\lambda_0 - s_2 U_0}{a}) f_0(s_2) = F_1(0) + (1 - \frac{s_2 U_0}{a}) F_0(0) + \frac{1}{U_0} \sum_{k \geq 1} V_k f_{0k}(s_2) . \qquad (22)$$

Таким образом, с помощью соотношений (11)-(14) все функции $f_{0k}(s_1, s_2)$ выражаются через функцию $f_0(s_2)$. Последняя же находится с помощью равенства (22).

Из (22) при $s_2 \to +0$ получим

$$F_0(0) + F_1(0) = (1 + \frac{\lambda_0}{a}) p_0 - \frac{1}{U_0} \sum_{k \geq 1} V_k p_{0k} , \qquad (23)$$

где вероятности $p_0, p_{0k}, k \geq 1,$ определены выше (см. (7), (8)). Оставшаяся неизвестная постоянная $F_0(0)$ находится из условия аналитичности функции $f_0(s_2)$ в области $\operatorname{Re} s_2 \geq 0$.

Поскольку для эргодического процесса выражение в левой части формулы (23) должно быть строго положительным, то отсюда вытекает необходимое условие эргодичности процесса $\zeta(t)$:

$$U_0 (1 + \frac{\lambda_0}{a}) p_0 > \sum_{k \geq 1} V_k p_{0k} . \qquad (24)$$

Равенство (23) аналогично соотношению (9) и также относится к категории законов сохранения. Оно выражает условие статистического равновесия во второй фазе в виде равенства средних скоростей поступающего в нее и покидающего ее продукта.

При $a \to \infty, x_2 \to \infty$ найденные соотношения (11)-(14), (21)-(24) совпадают с результатами, полученными В.А Ивницким [8].

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (10). Тогда для существования эргодического распределения у процесса $\zeta(t)$ достаточно выполнения условия $F_0(0) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что моменты времени, в которые процесс $\zeta(t)$ оказывается в состоянии $(\delta(t) = 0, \nu(t) = 0, \xi(t) = 0)$ являются его точками регенерации. Распределение длины интервала между соседними точками регенерации процесса $\zeta(t)$ имеет плотность вероятностей, равную $\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$ (считаем, что $\lambda_0 > 0$).

Обозначим через θ_p длину произвольного периода регенерации. Очевидно, $\theta_p = \theta_p^{(1)} + \theta_p^{(2)}$, где $\theta_p^{(1)}$ - длина периода, в течение которого процесс $\zeta(t)$ находится в состоянии $(\delta(t) = 0, \nu(t) = 0, \xi(t) = 0)$ (распределена по показательному закону с параметром λ_0), $\theta_p^{(2)}$ - длина периода, в течение которого процесс не находится в указанном состоянии. Поскольку последовательность пар случайных величин $\{\theta_p^{(1)}, \theta_p^{(2)}\}$ образует альтернирующий процесс восстановления, то предельная вероятность $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\delta(t) = 0, \nu(t) = 0, \xi(t) = 0\}$ равна (см. [9]):

$$F_0(0) = (1 + \lambda_0 \mathrm{M}\theta_p^{(2)})^{-1}.$$

Откуда

$$\mathrm{M}\theta_p^{(2)} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{F_0(0)} - 1\right).$$

Ясно, что математическое ожидание

$$\mathrm{M}\theta_p = \frac{1}{\lambda_0} + \mathrm{M}\theta_p^{(2)} = \frac{1}{\lambda_0 F_0(0)}$$

конечно тогда и только тогда, когда $F_0(0) > 0$. Следовательно, в силу предельной теоремы для регенерирующих процессов [9], предельное распределение процесса $\zeta(t)$ существует при условиях, указанных в формулировке теоремы 3.

Отметим, что при выполнении условия $F_0(0) > 0$ неравенство (24) выполняется и подавно.

4. Анализ частного случая. В частности, когда $\lambda_k = \lambda,\ k \ge 0; G_k(x) = G(x),\ W_k = W, U_k = U,\ k \ge 1,$ причем $W > U$, решение системы уравнений (1)-(5) может быть получено в замкнутой форме. Для его нахождения введем следующую производящую функцию:

$$\Phi(x_1, x_2; z) = \sum_{k \ge 1} z^k F_{0k}(x_1, x_2), \quad |z| \le 1,$$

и преобразуем с ее помощью уравнения (1)-(4). Умножая обе части уравнения (3) на *z*, уравнений (4) - на z^k, а затем суммируя их, придем к следующему дифференциальному уравнению относительно производящей функции:

$$W\frac{\partial \Phi(x_1, x_2; z)}{\partial x_1} - V\frac{\partial \Phi(x_1, x_2; z)}{\partial x_2} - \lambda(1-z)\Phi(x_1, x_2; z) -$$

$$-W\left(1 - \frac{G(x_1)}{z}\right)\frac{\partial \Phi(0, x_2; z)}{\partial x_1} - WG(x_1)\frac{\partial F_{01}(0, x_2)}{\partial x_1} + \lambda z F_0(x_2) = 0, \quad (25)$$

где $V = W - U$.

Выразив функцию $\partial F_{01}(0, x_2)/\partial x_1$ через $F_0(x_2)$ с помощью уравнений (1) и (2), а затем применив двойное преобразование Лапласа-Стилтьеса к уравнениям (25), получим

$$[s_1W - s_2V - \lambda(1-z)]\varphi(s_1, s_2; z) = W(1 - \frac{g(s_1)}{z})d(s_2; z) +$$
$$+ g(s_1)\{[(1 - \frac{s_2U_0}{a})(\lambda - s_2U_0) - \lambda z]f_0(s_2) + \qquad (26)$$
$$+ s_2U_0[(1 - \frac{s_2U_0}{a})F_0(0) + F_1(0)]\}, \mathrm{Re}\, s_1 \ge 0, \mathrm{Re}\, s_2 \ge 0,\ |z| \le 1,$$

где

$$\varphi(s_1, s_2; z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1x_1 - s_2x_2} d\Phi(x_1, x_2; z);$$
$$d(s_2; z) = \int_0^\infty e^{-s_2x} d(\frac{\partial}{\partial x}\Phi(0, x; z)); g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x).$$

Поскольку в левой части равенства (26) стоит произведение выражения $(s_1W - s_2V - \lambda(1-z))$ на функцию, аналитическую в области $\mathrm{Re}\, s_1 \ge 0, \mathrm{Re}\, s_2 \ge 0, |z| \le 1,$ то при $s_1 = (s_2V + \lambda(1-z))/W$ обе части равенства (26) должны обращаться в нуль одновременно. Отсюда следует, что

$$Wd(s_2; z) = zg(s_2)\{[1 - \frac{s_2U_0}{a})(\lambda - s_2U_0) - \lambda z]f_0(s_2) +$$
$$+ s_2U_0[(1 - \frac{s_2U_0}{a})F_0(0) + F_1(0)]\}[z - g(\frac{s_2V + \lambda(1-z)}{W})]^{-1}. \qquad (27)$$

Из (27) при $s_2 \to +0,$ с учетом аналитичности функции $\varphi(s_1, 0; z)$ в точке $s_1 = \lambda(1-z)/W$, находим

$$Wd(0; z) = \frac{\lambda z(1-z)g(\lambda(1-z)/W)p_0}{g(\lambda(1-z)/W) - z},$$

а из (26), с учетом последнего равенства, получаем

$$\varphi(s_1, 0; z) = \frac{\lambda z(1-z)[g(\lambda(1-z)/W) - g(s_1)]p_0}{[s_1W - \lambda(1-z)][g(\lambda(1-z)/W) - z]}. \qquad (28)$$

Поскольку (см. (7)) $\lim_{z\to 1-0}\varphi(0,0;z)=1-(1+\frac{\lambda}{a})p_0$, то с учетом (28), используя правило Лопиталя, находим

$$p_0=(1+\frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda g^{(1)}}{W-\lambda g^{(1)}})^{-1} \quad (29)$$

где $g^{(1)}=\int_0^\infty xdG(x)<\infty.$

Отметим, что в силу равенства (9) для того, чтобы $p_0>0,$ необходимо выполнение условия $\lambda g^{(1)}<W$.

Неравенство (24) в данном случае принимает вид

$$(1+\frac{\lambda}{a})p_0>\frac{V}{V+U_0}, \quad (30)$$

где p_0 определяется по формуле (29). Очевидно, из условия (30) следует, что $p_0>0.$

Далее, из теории систем массового обслуживания типа M/G/1 с ожиданием [10, 34] известно, что уравнение

$$z=g(\frac{s_2V+\lambda(1-z)}{W}) \quad (31)$$

имеет единственное решение $z_0(s_2)$, аналитическое в полуплоскости $\operatorname{Re}s_2>0,$ в которой $|z_0(s_2)|<1,$ причем

$$z_0(0)=\begin{cases}1, & \text{если } \lambda g^{(1)}\le W,\\ \rho, & \text{если } \lambda g^{(1)}>W,\end{cases}$$

где ρ есть единственный корень уравнения $\rho=g(\lambda(1-\rho)/W),$ лежащий в (0,1). Кроме того,

$$z_0'(0) = -\frac{Vg^{(1)}}{W - \lambda g^{(1)}},\ \text{если}\ \lambda g^{(1)} < W\ \text{и}\ z_0'(0) = -\infty,\ \text{если}\ \lambda g^{(1)} \geq W.$$

Из условия аналитичности функции $d(s_2; z)$ при $z = z_0(s_2)$ находим, что

$$f_0(s_2) = \frac{s_2 U_0[(1 - s_2 U_0 / a)F_0(0) + F_1(0)]}{\lambda z_0(s_2) - (1 - s_2 U_0 a)(\lambda - s_2 U_0)}. \tag{32}$$

Поскольку, согласно (23),

$$F_0(0) + F_1(0) = (1 + \frac{\lambda}{a})(1 + \frac{V}{U_0})p_0 - \frac{V}{U_0}, \tag{33}$$

то осталось найти только постоянную $F_0(0)$. Она находится из условия аналитичности функции $f_0(s_2)$ в точке $s_2 = s_{20}$, где s_{20} – единственный положительный корень уравнения

$$\lambda z_0(s_2) = (1 - \frac{s_2 U_0}{a})(\lambda - s_2 U_0) \tag{34}$$

в области $\operatorname{Re} s_2 > 0$. Из уравнения (31) видно, что $z_2(s_2)$ – убывающая функция s_2. Графический анализ (см. рис. 1)

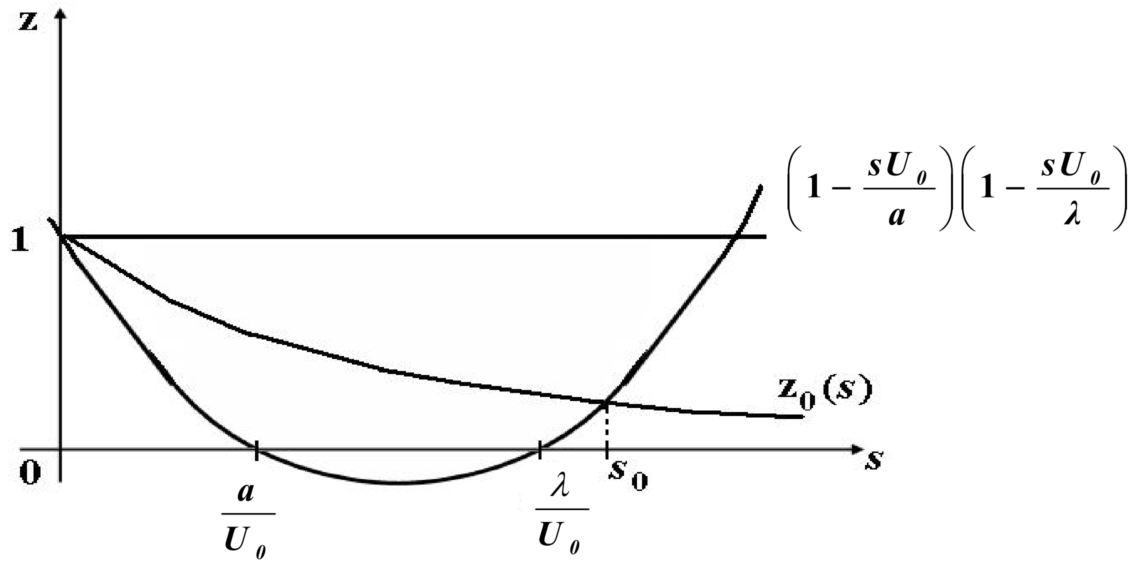

Рис. 1 Расположение положительного корня s_0 уравнения (34)

показывает существование указанного корня, причем $s_{20} > \max(a, \lambda)/U_0$. Следовательно, из (32) имеем

$$F_1(0) = (\frac{s_{20}U_0}{a} - 1)F_0(0).$$

С учетом этого соотношения выражение (32) $f_0(s_2)$ можно представить в таком виде:

$$f_0(s_2) = \frac{s_2 U_0 (s_{20} - s_2) F_0(0)}{a[\lambda z_0(s_2) - (1 - \frac{s_2 U_0}{a})(\lambda - s_2 U_0)]}.$$

Окончательное выражение для $F_0(0)$, полученное из условия $\lim_{s \to +0} f_0(s) = p_0$, имеет следующий вид:

$$F_0(0) = [(a + \lambda)U_0 - \frac{\lambda g^{(1)} V a}{W - \lambda g^{(1)}}] p_0 / s_{20} U_0^2. \tag{35}$$

Из (35) вытекает условие эргодичности процесса $\zeta(t)$ (наряду с $\lambda g^{(1)} < W$)

$$(1 + \frac{\lambda}{a})U_0 > \frac{\lambda g^{(1)} V}{W - \lambda g^{(1)}},$$

которое эквивалентно неравенству (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю.К. Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности // Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. 1960.- Вильнюс: Гос. изд-во политической и научной литературы Литовской ССР.- 1962.- С.309-323.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, исправ. и доп. – М.: КомКнига, 2005.
3. Prabhu, N.U. Stochastic Storage Processes:Queues, Insurance Risk, and Dams.-Springer Verlag. 2nd Ed. - New York, Heidelberg, Berlin, 1997.
4. 4. Постан М.Я. Об одном классе смешанных марковских процессов и их применение в теории телетрафика// Пробл. перед. информ. -1992.- Т.28, вып.3. - С.40-53.
5. Постан М.Я. Экономико-математические модели смешанных перевозок.- Одесса: Астропринт, 2006.
6. Румянцев Н.В. Моделирование гибких производственно-логистических систем. – Донецк: ДНУ, 2004.
7. Лысенко Ю.Г., Румянцев Н.В. Моделирование технологической гибкости производственно-экономических систем. - Донецк: ДНУ, 2007.
8. Ивницкий В.А. Однолинейная система с очередью и переменными интенсивностями входящего потока и скоростью обслуживания // Литов. мат. сб. – 1966, Т.6, №1. – С.122-128.
9. Смит В. Теория восстановления и ее приложения // Математика.- 1961, Т.5, №3.- С.95-150.
10. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания.- М.: Наука, 1966.