УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А.И. Шевченко, А.С. Миненко, И.А. Сыпко**

Моделирование одного класса сложных систем с нечетким управлением

Исследуется одна задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Построено приближенное решение этой задачи с использованием малого параметра. Управление этим процессом осуществляется с применением нечеткой логики.

Постановка задачи. Рассмотрим следующий вариант кристаллизации металла. Пусть полубесконечный круговой цилиндр $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_3, < 0\}$, заполнен веществом, которое находится в двух фазовых состояниях: твердом и жидком. В рассматриваемой модели теплофизические параметры (свои в каждой фазе) считается постоянными величинами. Пусть, далее Γ_t – достаточно гладкая поверхность, граничные точки которой S лежат на Γ - боковой поверхности цилиндра Ω, т.е. $S \in \Gamma$, и пусть Γ_t отделяет твердую фазу от жидкой. Область, заполненную жидким веществом обозначим через Ω_t^+. Через Ω_t^- обозначим область занятую твердым веществом. Боковые границы этих областей обозначим соответственно через Γ^- и Γ^+. Верхний участок границы цилиндра Ω обозначим через H. Рассмотрим случай, когда каждая фаза $\Omega_t^\pm$ представляет собой односвязную область и для каждого момента времени $t > 0$ не является пустым множеством. Двухфазная задача Стефана, при наличии конвективных движений в жидкой фазе, состоит в определении скорости жидкости $\vec{V}(x,t)$, распределения температур $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах, свободной поверхности Γ_t и давления $p(x,t)$ по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_T^+,$$

$$\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0, \quad (x,t)\in D_T^+,$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+),$$

$$\nabla\vec{V}(x,t) = 0, \quad (x,t)\in D_T^+, \quad u^\pm(x,0) = A^\pm(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial n} + \omega_0^\pm u^\pm = 0, \ (x,t)\in\Gamma^-\bigcup\Gamma^+, \ \vec{V}(x,0) = \vec{C}(x), \ \vec{V}(x,t) = 0,$$

$$x\in\Gamma^+\bigcup H, \ \frac{\partial u^+}{\partial x_3}(x,t) = q(x), \ (x,t)\in H; \ u^\pm(x,t) = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[k_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n^\wedge x_i) + k\cos(n^\wedge t) = 0, \ (x,t)\in\Gamma_t,$$

где $D_T^\pm(x,t): x\in\Omega_t^\pm$, $t\in(0,T)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\omega_0^\pm, \mathrm{Re}, k, k_-, k_+$ – заданные положительные константы, $q(x)$ – известная положительная, достаточно гладкая функция, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. Здесь также $a_+^2 = \lambda_+/\mathrm{Re}_-\,\rho_+$, $a_-^2 = \lambda_-/\mathrm{Re}_-\,\rho_-$, а $\lambda_\pm, c_\pm, \rho_\pm$ – известные теплофизические параметры. Предполагается, что $\overrightarrow{C(x)}\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $A^\pm(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^\pm})$, $\vec{f}(u^+)\in C^2(R^1)$, $q(x)\in H^{2+\alpha}(H)$, где $\Omega_0^\pm$ – области со свободной границей Γ_0, которые возникают при рассмотрении стационарной задачи без конвекции с теми же условиями из (1) при $\mathrm{Re}=0$.

Задача (1) моделирует процесс кристаллизации металла при электрошлаковом переплаве с учетом конвективного переноса тепла, реально присутствующем в жидкой фазе. Наконец, разрешимость класса задач типа (1) в пространстве $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ изложена в [1].

Приближенные решения задачи (1). Введем криволинейные координаты $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ для точек поверхности Γ_0 и будем искать поверхность Γ_t в следующем виде: $\Gamma_t = \{x(\omega) + \vec{n}\rho(\omega,t)\}$, где $\rho(\omega,t)$ – функция класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0\times[0,T])\rho(\omega,0)=0$, $\vec{n}(\omega)$ – нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+, $x(\omega)\in\Gamma_0$ [2,3].

Предположим, что решения задачи (1) можно разложить в ряд по степеням Re: $u^{\pm}(x,t,\mathrm{Re})=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t), p(x,t;\mathrm{Re})=p_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^k p_k(x,t)$,

$V_i(x,t,\mathrm{Re})=V_{i0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t), \rho(\omega,t;\mathrm{Re})=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t)$.

Справедливы утверждения.

Лемма. *Пусть выполнены условия:* $\nabla^2 A^{\pm}(x)=0$, $x\in\Omega_0^{\pm}$, $\frac{\partial A^{+}}{\partial n}+\omega_0^{\pm}A^{\pm}=0$, $x\in\Gamma^{-}\bigcup\Gamma^{+}$, $\frac{\partial A^{+}}{\partial x_3}=q(x)$, $x\in H$; $\vec{C}(x)=0$, $x\in\Omega_0^{+}$; $A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma_0}=0$ *и* $k_{-}\left|\nabla A^{-}(x)\right|=k_{+}\left|\nabla A^{+}(x)\right|$ *на* Γ_0. *Тогда в качестве нулевого приближения* $u_0^{\pm}(x)$ *можно взять функции* $A^{\pm}(x)$, *а свободная поверхность* Γ_0 *принадлежит классу* C^{∞} *в каждой точке, лежащей внутри цилиндра* Ω.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы и пусть справедливы соотношения:* $\nabla p_0(x)=0$, $\nabla p_1(x,0)=0$, $x\in\Gamma_0$ *и* $c(k_{+}+k_{-})T/k<1$, *где* c *– некоторая постоянная* [4, с.364], *тогда существуют первые приближения* $u_1^{\pm}(x,t),\vec{V}_1(x,t),p_1(\omega,t)$ *и* $u_2^{\pm}(x,t),\vec{V}_2(x,t),p_2(\omega,t)$, *задачи (1) причем функции* $u_1^{\pm}(x,t)$ *и* $u_2^{\pm}(x,t)$ *принадлежат классу* $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\tilde{D}_T^{\pm})$, *а* $\rho_1(\omega,t)$ *и* $\rho_2(\omega,t)-H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\tilde{\tilde{\Gamma}}_T)$. *И кроме того при малых числах* Re *и достаточно малых значениях* t *справедлива формула* Γ_t:

$$x=x(\omega)-\mathrm{Re}\,\vec{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{\left|\nabla A^{\pm}(x(\omega))\right|}-(\mathrm{Re})^2\vec{n}\frac{u_2^{\pm}(x(\omega),t)-f_1^{\pm}(x(\omega),t)}{\left|\nabla A^{\pm}(x(\omega))\right|}+0((\mathrm{Re})^2),\ x(\omega)\in\Gamma_0.$$

Нечеткое управление процессом кристаллизации. Пусть u^{*} – температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega=\Gamma\bigcup H$. Данная задача возникает в спецметаллургии при отделении выплавленного слитка от стенок кристаллизатора [5]. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1,w_2,w_3, причем поток w_3 равномерно распределен в центре H, а два других потока w_1,w_2 сконцентрированы по краям $\Gamma\bigcup H$. Далее, предлагается метод нечеткого управления в данном классе задач.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – факторы, влияющие на процесс кристаллизации, а $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей задаче представляется в виде функционального отображения: $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, ... Y_n\}$.

Ради простоты, в качестве терм-множества лингвистических переменных x_1, x_2, x_3, где $x_1 = \{\text{"температура"}\}$, $x_2 = \{\text{"способ нагрева"}\}$, $x_3 = \{\text{"слиток металла"}\}$ будем использовать множества: $T = \{$"минимальная", "средняя", "максимальная"$\}$, $W = \{$"минимальный", "средний", "максимальный"$\}$, $L = \{$"минимальный", "средний", "максимальный"$\}$.

Таким образом, имеем: $x = \{x_1, x_2, x_3\} \to y \in [\alpha, \beta]$, где α и β – некоторые числа (они выбираются таким образом, чтобы произошло отделение слитка от стенок кристаллизатора [5]), а для выходной лингвистической переменной y (температура поверхности слитка) будет использоваться терм-множество $Q = \{$"минимальная", "средняя", "максимальная"$\}$. Для численной реализации задачи использовались следующие значения параметров [5]: $400\text{мм} \le L \le 6000\text{мм}$, $2500 MBm/\text{м}^2 \le W \le 5000 MBm/\text{м}^2$. Численный расчет, позволяющий построить графически нечеткое управление, был осуществлен с помощью стандартного алгоритма Мамдани.

Замечания. Приближенное решения класса задач типа (1) изложено в [6] и [7].

1. Шевченко А.И., Миненко А.С. Методы исследования нелинейных моделей, - Киев: Наук.думка, 2012. – 132 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук.думка, 2005 – 341 с.
3. Шевченко А.И., Миненко А.С. Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. – 2012. - №1. – С. 25-29.
4. Ладыженская О.А., Салонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967 – 756с.
5. Патон Б.Е. Избранные труды. – Киев: Институт электросварки им.Е.О.Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

6. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана// Доп. НАН України. – 2010. – №5. – С.36-40.
7. Шевченко А.И., Миненко А.С., Золотухина О.А. Численный анализ одной нелинейной математической модели // Доп. НАН України. – 2012. – №9. – С.44-47.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступила в редакцию 11.02.2013

Член-кореспондент НАН України **А.І. Шевченко, О.С. Міненко, І.О. Сипко**

Моделювання одного класу складних систем з нечітким управлінням

Досліджується одна задача Стефана з урахуванням конвекції в рідинній фазі. Побудовано наближене рішення цієї задачі з використанням малого параметру. Управління цим процесом здійснюється за допомогою нечіткої логіки.

Corresponding Member of NAS of Ukraine **A.I. Shevchenko, A.S. Minenko, I.A. Sypko**

Modeling of the one class complex systems whit fuzzy control

The Stephen convection *problem in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed using the method of the small parameter. The control this process with using fuzzy logic is realized.*