Применение нечеткой логики при задачах управления теплофизическими объектами

Сыпко И.А.
Донецкий национальный технический университет, sypko_i@i.ua

The Stephen convection problem in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed using the method of the small parameter. The control this process with using fuzzy logic is realized.

ВВЕДЕНИЕ

Широкий класс задач математического моделирования технических объектов и физических процессов приводят к нелинейным задачам математической физики. Проблема построения нелинейных моделей и их математическое исследование на современном состоянии является актуальной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий вариант кристаллизации металла. Пусть полубесконечный круговой цилиндр $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_3, < 0\}$, заполнен веществом, которое находится в двух фазовых состояниях: твердом и жидком. В рассматриваемой модели теплофизические параметры (свои в каждой фазе) считается постоянными величинами. Пусть, далее Γ_t – достаточно гладкая поверхность, граничные точки которой S лежат на Γ - боковой поверхности цилиндра Ω, т.е. $S \in \Gamma$, и пусть Γ_t отделяет твердую фазу от жидкой. Область, заполненную жидким веществом обозначим через Ω_t^+. Через Ω_t^- обозначим область занятую твердым веществом. Боковые границы этих областей обозначим соответственно через Γ^- и Γ^+. Верхний участок границы цилиндра Ω обозначим через H. Рассмотрим случай, когда каждая фаза $\Omega_t^\pm$ представляет собой односвязную область и для каждого момента времени $t > 0$ не является пустым множеством. Двухфазная задача Стефана, при наличии конвективных движений в жидкой фазе, состоит в определении скорости жидкости $\vec{V}(x,t)$, распределения температур $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах, свободной поверхности Γ_t и давления $p(x,t)$ по следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x,t) = 0, \\
(x,t) \in D_T^+,\ \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x,t) = 0,\ (x,t) \in D_T^+, \\
\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x,t) + \\
+ \vec{f}(u^+),\ \nabla \vec{V}(x,t) = 0,\ (x,t) \in D_T^+, \\
u^\pm(x,0) = A^\pm(x),\ \frac{\partial u^\pm}{\partial n} + \omega_0^\pm u^\pm = 0, \\
(x,t) \in \Gamma^- \cup \Gamma^+,\ \vec{V}(x,0) = \vec{C}(x), \\
\vec{V}(x,t) = 0,\ x \in \Gamma^+ \cup H,\ \frac{\partial u^+}{\partial x_3}(x,t) = q(x), \\
(x,t) \in H;\ u^\pm(x,t) = 1, \\
\sum_{i=1}^{3} \left[k_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n \wedge x_i) + k \cos(n \wedge t) = 0, \\
(x,t) \in \Gamma_t,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $D_T^\pm(x,t): x \in \Omega_t^\pm,\ t \in (0,T)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\omega_0^\pm, \mathrm{Re}, k, k_-, k_+$ – заданные положительные константы, $q(x)$ – известная положительная, достаточно гладкая функция, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. Здесь также $a_+^2 = \lambda_+/\mathrm{Re}_- \rho_+$, $a_-^2 = \lambda_-/\mathrm{Re}_- \rho_-$, а $\lambda_\pm, c_\pm, \rho_\pm$ – известные теплофизические параметры.

Предполагается, что $\overrightarrow{C(x)} \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $A^{\pm}(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $\vec{f}(u^+) \in C^2(R^1)$, $q(x) \in H^{2+\alpha}(H)$, где $\Omega_0^{\pm}$ – области со свободной границей Γ_0, которые возникают при рассмотрении стационарной задачи без конвекции с теми же условиями из (1) при $\mathrm{Re} = 0$.

Задача (1) моделирует процесс кристаллизации металла при электрошлаковом переплаве с учетом конвективного переноса тепла, реально присутствующем в жидкой фазе. Наконец, разрешимость класса задач типа (1) в пространстве $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ изложена в [1].

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)

Введем криволинейные координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ для точек поверхности Γ_0 и будем искать поверхность Γ_t в следующем виде: $\Gamma_t = \{x(\omega) + \vec{n}\rho(\omega,t)\}$, где $\rho(\omega,t)$ – функция класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0,T])\rho(\omega,0) = 0$, $\vec{n}(\omega)$ – нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+, $x(\omega) \in \Gamma_0$ [2].

Предположим, что решения задачи (1) можно разложить в ряд по степеням Re: $u^{\pm}(x,t,\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t)$, $p(x,t;\mathrm{Re}) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k p_k(x,t)$, $V_i(x,t,\mathrm{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t)$, $\rho(\omega,t;\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t)$. Справедливы утверждения.

Лемма. Пусть выполнены условия: $\nabla^2 A^{\pm}(x) = 0$, $x \in \Omega_0^{\pm}$, $\frac{\partial A^+}{\partial n} + \omega_0^{\pm} A^{\pm} = 0$, $x \in \Gamma^- \cup \Gamma^+$, $\frac{\partial A^+}{\partial x_3} = q(x)$, $x \in H$; $\vec{C}(x) = 0$, $x \in \Omega_0^+$; $A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma_0} = 0$ и $k_-\left|\nabla A^-(x)\right| = k_+\left|\nabla A^+(x)\right|$ на Γ_0. Тогда в качестве нулевого приближения $u_0^{\pm}(x)$ можно взять функции $A^{\pm}(x)$, а свободная поверхность Γ_0 принадлежит классу C^{∞} в каждой точке, лежащей внутри цилиндра Ω.

3. НЕЧЕТКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Пусть u^* – температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega = \Gamma \cup H$. Данная задача возникает в спецметаллургии при отделении выплавленного слитка от стенок кристаллизатора [2]. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1, w_2, w_3, причем поток w_3 равномерно распределен в центре H, а два других потока w_1, w_2 сконцентрированы по краям $\Gamma \cup H$. Далее, предлагается метод нечеткого управления в данном классе задач.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – факторы, влияющие на процесс кристаллизации, а $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей задаче представляется в виде функционального отображения: $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, ...Y_n\}$.

ВЫВОДЫ

В работе рассматривается задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Изучается процесс кристаллизации металла при электрошлаковом переплаве, когда распределение тепла связано с конвективным переносом, реально присутствующим в жидкой фазе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шевченко А.И., Миненко А.С. Методы исследования нелинейных моделей, - Киев: Наук.думка, 2012. – 132 с.

[2] Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук.думка, 2005 – 341 с.