

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1. Расчет статически определимой стержневой системы	3
на прочность и жесткость	
1.1. Краткие теоретические сведения	3
1.2. Пример расчета	4
1.3. Замечания по вариантам расчетных схем	10
1.4. Вопросы для самопроверки	12
2. Расчет статически неопределимой стержневой системы	13
2.1. Краткие теоретические сведения	13
2.2. Пример расчета статически неопределимой системы при силовом нагружении	15
2.3. Замечания по вариантам расчетных схем	20
2.4. Пример расчета статически неопределимой системы при тепловом нагружении	25
2.5. Пример расчета статически неопределимой системы при монтажном нагружении	29
2.6. Вопросы для самопроверки	34
3. Геометрические характеристики сложного сечения	35
3.1. Краткие теоретические сведения	35
3.2. Пример расчета	36
3.3. Вопросы для самопроверки	44
4. Приложения	45
Таблица швеллеров	45
Таблица двутавров	46
Таблица уголков неравнополочных	47
Таблица уголков равнополочных	49
5. Пример оформления расчетной работы	52
Расчет статически определимой стержневой системы	54
на прочность и жесткость	
Расчет статически неопределимой стержневой системы	59
Геометрические характеристики сложного сечения	64

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов является важнейшей учебной дисциплиной в инженерном образовании, которая дает не только основы знаний о расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, но и способствует формированию структурного, логического мышления будущего инженера.

В формировании такого мышления большую роль имеют расчетные работы, охватывающие все разделы курса сопротивления материалов. Решение расчетных работ позволяет студенту приобрести навыки применения стандартных отработанных схем и подходов для решения однотипных задач и, в то же время, оставляет возможность для развития творческого мышления ввиду большого разнообразия возможных вариантов расчетных схем и условий нагружения в каждом типе задач.

В данном пособии рассмотрены примеры решения расчетных работ по двум разделам курса сопротивления материалов «Одноосное растяжение-сжатие» и «Геометрические характеристики плоских сечений». В разделе «Одноосное растяжение-сжатие» рассмотрены два типа задач: «Расчет статически определимой стержневой системы на прочность и жесткость» и «Расчет статически неопределимой стержневой системы», охватывающие все виды расчета на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. В разделе «Геометрические характеристики плоских сечений» рассмотрена задача определения геометрических характеристик сложного сечения, имеющая наибольшее практическое применение.

Для всех типов задач приведены два варианта решения: один – с подробными комментариями, обзором теории и методов расчета, анализом особенностей возможных разновидностей и вариантов расчетных схем, второй – в качестве примера оформления расчетной работы как одного из видов инженерной технической документации.

В приложениях приведены все необходимые данные для решения задачи по выбору геометрических характеристик стандартных прокатных профилей (швеллера, двутавра, уголка неравнополочного и уголка равнополочного), необходимые для определения геометрических характеристик сложного сечения.

Для закрепления теоретических знаний в пособии приводятся вопросы для самопроверки по все рассматриваемым типам задач.

В пособии используется три типа нумерации аналитических зависимостей: двойная численная нумерация для фундаментальных зависимостей, например, (1.1), одинарная численная нумерация для обозначения ключевых зависимостей при решении данной задачи и буквенное обозначение для текущих промежуточных зависимостей, например, (a). Рисунки имеют двойную нумерацию в пределах каждого раздела или примера оформления.

Пособие предназначено для студентов машиностроительных и строительных специальностей высших учебных заведений любого профиля.

§ 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Условие задачи: Для заданной статически определимой стержневой системы:

- 1) Определить геометрические параметры заданной системы;
- 2) Определить усилия в упругих элементах стержневой системы;
- 3) Подобрать поперечное сечение заданной формы для упругих элементов системы из условия прочности;
- 4) Найти абсолютную продольную деформацию упругих элементов системы;
- 5) Найти перемещение точки К.

Цель задачи: отработка навыков расчета на прочность и жесткость элементов статически определимой стержневой системы, в том числе: определение внутренних усилий в упругих элементах при помощи метода сечений, расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, подбор размеров поперечного сечения упругих элементов из условия прочности, определение деформаций упругих элементов и перемещений точек стержневой системы.

Ключевые слова: метод сечений, метод вырезания узлов, внутренние усилия, продольное усилие, продольная деформация, перемещение, вертикальное перемещение, горизонтальное перемещение, полное перемещение, упругие элементы, абсолютно жесткие элементы, внешняя нагрузка, сосредоточенный момент, сосредоточенная сила, распределенная нагрузка, условие прочности, модуль упругости, допускаемое напряжение, статически определимая стержневая система, уравнения равновесия, узловая точка.

§ 1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Одноосным растяжением-сжатием называется напряженное состояние, при котором в поперечных сечениях одноосных элементов возникают только продольные усилия N . Растягивающие продольные усилия считаются положительными, сжимающие – отрицательными. Одноосный элемент, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем. Система, все упругие элементы которой испытывают растяжение или сжатие, называется стержневой системой. Продольные усилия N в упругих элементах таких систем не изменяются по длине элемента. Величина продольного усилия, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения, называется напряжением и определяется зависимостью

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (1.1)$$

где F – площадь поперечного сечения. Условием прочности стержня является:

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{k}, \quad (1.2)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, σ_{on} – опасное напряжение, при котором в материале стержня возникают необратимые деформации, k – коэффициент запаса. Все виды расчета на основе зависимости (1.2) называются расчетом на прочность по допускаемым напряжениям.

Изменение первоначальной длины стержня l при нагружении

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (1.3)$$

где E – модуль упругости, называется абсолютной продольной деформацией.

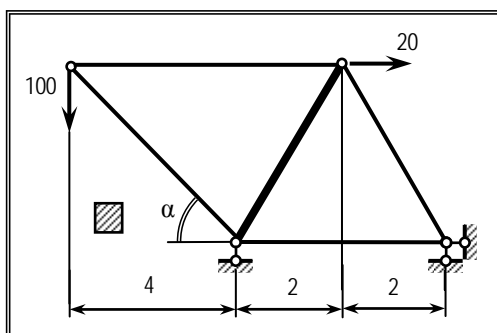
Зависимость (1.3) называется законом Гука. Вычисление деформаций и перемещений стержней и стержневых систем на основе (1.3) называется расчетом на жесткость.

§ 1.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Исходные данные: $\alpha = 45^\circ$, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Форма поперечного сечения: квадрат.

Заданная расчетная схема:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем длины упругих стержней, углы наклона элементов расчетной схемы и их функции (рис.1.1).

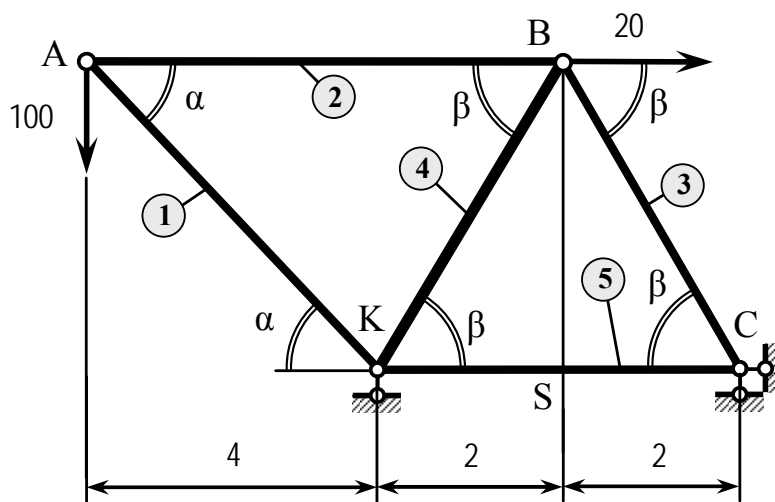


Рис. 1.1. Заданная схема

Расчетные схемы стержневых систем могут содержать упругие (деформируемые) стержневые элементы, абсолютно жесткие (недеформируемые) балки и абсолютно жесткие плоские тела (блоки). Абсолютно жесткие балки на расчет-

ных схемах выделяются более жирной линией. Абсолютно жесткие блоки выделяются жирной линией или заштриховываются.

Пронумеруем элементы в заданной системе (рис.1.1). Упругими являются стержневые элементы системы 1 (АК), 2 (АВ), 3 (ВС), 5 (КС). Элемент 4 (КВ) является абсолютно жесткой балкой.

Заданная расчетная схема может содержать ряд параметров, величина которых неизвестна. В статически определимых стержневых системах неизвестными могут быть длины упругих и абсолютно жестких элементов, а также углы их наклона. Если эти параметры на схеме не показаны, то необходимо их определить на основе известных данных. При определении углов наклона элементов системы рекомендуется измерять их от горизонтали, а не от вертикали. Также необходимо показывать острые, а не тупые углы.

1.1. Определяем неизвестные геометрические размеры системы.

Определяем высоту стержневой системы BS:

$$BS = 4 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 4 \text{ м.}$$

1.2. Определяем углы наклона элементов расчетной схемы.

Угол наклона первого стержня АК известен: $\alpha = 45^\circ$. Его функции:

$$\sin \alpha = 0,707, \quad \cos \alpha = 0,707.$$

Угол наклона β третьего упругого КВ и балки КВ можно определить из прямоугольного треугольника KBS:

$$\Delta KBS \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} 2 = 63,43^\circ \Rightarrow \sin \beta = 0,894, \quad \cos \beta = 0,447.$$

1.3. Определяем длины элементов системы.

Длина первого упругого стержня АК равна: $l_1 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,657 \text{ м.}$

Длина второго упругого стержня АВ равна: $l_2 = 4 + 2 = 6 \text{ м,}$

Длина третьего упругого стержня ВС и балки КВ равна гипотенузе прямоугольного треугольника KBS:

$$l_3 = l_4 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,471 \text{ м.}$$

Длина пятого упругого стержня КС равна: $l_5 = 4 \text{ м.}$

2. Определяем усилия в упругих элементах стержневой системы.

В курсе сопротивления материалов внутренние усилия в одноосных элементах определяются методом сечений. Согласно этого метода для определения внутренних усилий необходимо мысленно рассечь одноосный элемент поперечным сечением, отбросить одну из частей, действие отброшенной части компенсировать внутренними усилиями, приложенными в рассекающем сечении, и определить эти усилия из условия равновесия оставшейся части. Однако

в стержневых системах одноосные элементы образуют замкнутые контуры. Поэтому рассечение только одного элемента не позволяет отбрасывать одну из частей. В этом случае необходимо рассекать одновременно несколько стержней, сходящихся в одном узле или закрепленных на одном абсолютно жестком элементе. Метод определения внутренних усилий применительно к стержневым системам называется методом вырезания узлов. Единственным внутренним усилием, которое может возникать в упругих элементах стержневых систем является продольное усилие N_i . Однако следует помнить, что абсолютно жесткие элементы, которые в стержневых системах служат для связи между упругими элементами, могут испытывать более сложное нагружение и поэтому рассекать их не рекомендуется. Поэтому балки и блоки необходимо вырезать целиком, рассекая только примыкающие к ним упругие элементы.

Вырезанный узел представляют собой систему сходящихся элементов, для которой существует только два независимых уравнения равновесия. Поэтому первым нужно вырезать тот узел, к которому подходят не более двух стержней с неизвестными внутренними усилиями или с неизвестными опорными реакциями. Этим же правилом нужно руководствоваться и для последующих узлов. Балки и блоки представляют собой плоские системы, для которых существует три независимых уравнения равновесия. Поэтому можно вырезать только те абсолютно жесткие элементы, к которым подходят не более трех стержней с неизвестными внутренними усилиями или с неизвестными опорными реакциями.

В заданной системе (рис.1.2), первым сечением необходимо вырезать узел А (рис.1.3), вторым – балку ВК (рис.1.4).

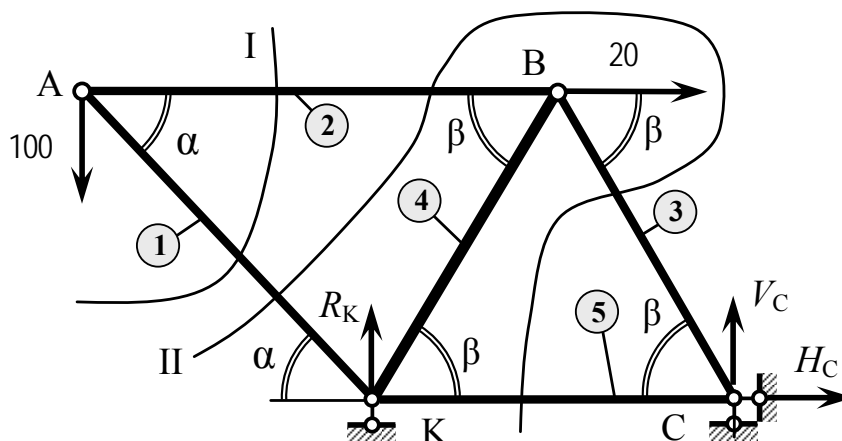


Рис. 1.2. Определение внутренних усилий

2.1. Рассмотрим равновесие узла А (рис.1.3).

В этом узле соединены два стержня 1 (АК) и 2 (АВ) (рис.1.2). Поэтому для определения двух неизвестных продольных усилий N_1 и N_2 в этих стержнях достаточно двух уравнений равновесия ($\sum x_A = 0$ и $\sum y_A = 0$). Во многих схемах можно сразу предугадать направление действия неизвестного продольного усилия, то есть – его знак. Однако, это не всегда возможно. Поэтому рекомендуется направлять неизвестные продольные усилия «от сечения» или «в сторо-

ну отброшенной части». В этом случае направление внутренних усилий будет соответствовать растяжению стержней, то есть возникновению в них положительных продольных усилий. Такой подход позволяет определить не только величину внутреннего усилия, но и его знак.

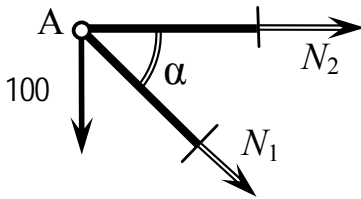


Рис.1.3. Узел А

Из условия равновесия узла А (рис.1.3) следует:

$$\sum y_A = 0 \Rightarrow 100 + N_1 \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum x_A = 0 \Rightarrow N_2 + N_1 \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получаем:

$$(1) \Rightarrow N_1 = -\frac{100}{\sin \alpha} = -\frac{100}{0,707} = -141,421 \text{ кН},$$

$$(2) \Rightarrow N_2 = -N_1 \cos \alpha = -(-141,421) \cdot 0,707 = 100 \text{ кН}.$$

2.2. Рассмотрим равновесие балки ВК (рис.1.4).

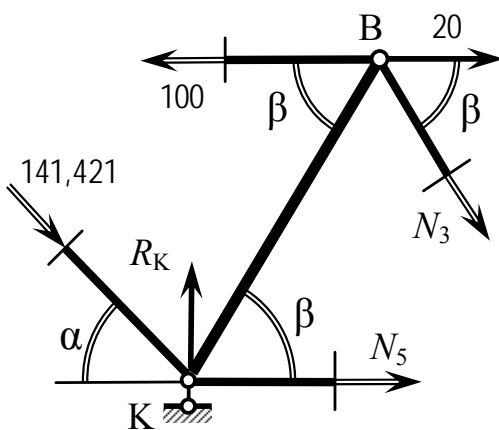


Рис.1.4. Балка КВ

К балке подсоединены четыре упругих стержня 1 (АК), 2 (АВ), 3 (ВС) и 5 (КС) (рис.1.2). Она также опирается в точке К на односвязный шарнир, в котором возникает неизвестная опорная реакция R_K . Однако, в двух стержнях (стержни 1 и 2) продольные усилия уже известны. Поэтому для определения неизвестных продольных усилий в стержнях 3 и 5 и опорной реакции R_K достаточно трех уравнений равновесия ($\sum x = 0$ и $\sum y = 0$, $\sum M = 0$). Реакция R_K не нужна для дальнейших расчетов. Следовательно, для

определения продольного усилия в стержне 5 можно ограничиться рассмотрением только двух уравнений равновесия ($\sum x = 0$ и $\sum M_K = 0$), в которые эта реакция не входит.

Из условия равновесия балки ВК (рис.1.4) следует:

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow (100 - 20) \cdot 4 - 2 \cdot N_3 \sin \beta - 4 \cdot N_3 \cos \beta = 0, \quad (3)$$

$$\sum x = 0 \Rightarrow 141,421 \cdot \cos \alpha + 20 - 100 + N_5 + N_3 \cos \beta = 0 \quad (4)$$

Решая систему уравнений (3) и (4), получаем:

$$(3) \Rightarrow N_3 = \frac{(100 - 20) \cdot 4}{2 \cdot \sin \beta - 4 \cdot \cos \beta} = \frac{(100 - 20) \cdot 4}{2 \cdot 0,894 - 4 \cdot 0,447} = 89,443 \text{ кН},$$

$$(4) \Rightarrow N_5 = 100 - 20 - 141,421 \cdot \cos \alpha - N_3 \cos \beta = \\ = 100 - 20 - 141,421 \cdot 0,707 - 89,443 \cdot 0,447 = 60 \text{ кН}.$$

3. Подбираем квадратное поперечное сечение для упругих элементов системы из условия прочности.

Согласно (1.1) и (1.2) условием прочности i -го стержня является:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma], \quad (1.4)$$

где N_i – продольное усилие (по абсолютной величине) в i -м стержне.

Тогда площадь F_i поперечного сечения i -го стержня из условия прочности согласно (1.4) будет определяться зависимостью:

$$F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}. \quad (1.5)$$

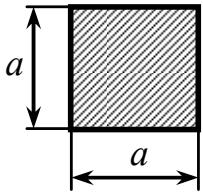


Рис.1.5

Для заданной стержневой системы необходимо подобрать поперечное сечение в форме квадрата (рис.1.5). Площадь квадрата равна $F = a^2$, а его сторона $a = \sqrt{F}$. Тогда, согласно (1.5) минимальное значение стороны a_i квадратного поперечного сечения i -го стержня будет определяться зависимостью:

$$a_i \geq \sqrt{\frac{N_i}{[\sigma]}}. \quad (5)$$

Стержни квадратного поперечного сечения являются прокатными профилями и их размеры регламентирует ГОСТ. Поэтому при выборе a_i будем принимать ближайшие большие значения, кратные 5мм.

Для заданной стержневой системы согласно (5) размеры a_i и площади поперечных сечений F_i упругих стержней будут равны:

$$a_1 \geq \sqrt{\frac{N_1}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{141,421 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 2,97 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow a_1 = 3 \text{ см}, \quad F_1 = a_1^2 = 3^2 = 9 \text{ см}^2,$$

$$a_2 \geq \sqrt{\frac{N_2}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow a_2 = 2,5 \text{ см}, \quad F_2 = a_2^2 = 2,5^2 = 6,25 \text{ см}^2,$$

$$a_3 \geq \sqrt{\frac{N_3}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{89,443 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 2,36 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow a_3 = 2,5 \text{ см}, \quad F_3 = a_3^2 = 2,5^2 = 6,25 \text{ см}^2,$$

$$a_5 \geq \sqrt{\frac{N_5}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow a_5 = 2,5 \text{ см}, \quad F_5 = a_5^2 = 2,5^2 = 6,25 \text{ см}^2.$$

4. Находим абсолютную продольную деформацию упругих элементов системы.

Абсолютная продольная деформация Δl_i упругих стержней согласно (1.3) определяется зависимостью:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i}. \quad (1.6)$$

где EF_i - жесткость i -го стержня при растяжении-сжатии.

Для заданной стержневой системы абсолютная продольная деформация Δl_i упругих стержней согласно (1.6) будут равна:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{-141 \cdot 10^3 \cdot 5,657}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = -4,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -4,4 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,8 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{89,42 \cdot 10^3 \cdot 4,471}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-4}} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,8 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = \frac{N_5 l_5}{EF_5} = \frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -3,2 \text{ мм}.$$

5. Находим перемещение точки К (рис.1.2).

Определение перемещений точек стержневых систем является наиболее творческой частью задачи и в каждой конкретной расчетной схеме зависит от привязки этих точек к неподвижным точкам при помощи упругих элементов.

При определении перемещений следует иметь в виду, что положительные значения перемещений соответствуют смещению вверх и вправо. Рекомендуется сначала определять вертикальную y_K и горизонтальную x_K проекции перемещений точки и лишь затем полное перемещение

$$\Delta_K = \sqrt{x_K^2 + y_K^2}. \quad (1.7)$$

Для сложных случаев определения перемещения необходимо дополнительно вычерчивать деформированную схему системы (см. пример оформления этой задачи). Для простых случаев достаточно только расчетной схемы.

В заданной расчетной схеме (рис.1.1) вертикальное перемещение точки К ограничено вертикальной опорной связью. Поэтому $y_K = 0$.

В горизонтальном направлении точка К привязана к неподвижной точке С при помощи стержня 5 и ее перемещение определяется его деформацией. Поскольку это перемещение отмеряется влево, то $x_K = -\Delta l_5$ или

$$x_K = -\Delta l_5 = -(-3,2 \text{ мм}) = 3,2 \text{ мм}.$$

Полное перемещение точки К равно

$$\Delta_K = \sqrt{x_K^2 + y_K^2} = x_K = 3,2 \text{ мм}.$$

Положительное значение Δ_K соответствует смещению точки К вправо.

§ 1.3. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВАРИАНТАМ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

1.3.1. Расчет на прочность.

Поперечные сечения упругих элементов могут иметь различную форму. Ниже приведены алгоритмы выбора размеров некоторых типов поперечных сечений из условия прочности согласно (1.4) и определение размеров поперечного сечения для стержня 1 из рассмотренного выше примера.

а) Круглое сечение диаметром d .

Площадь сечения $F_i = \frac{\pi d_i^2}{4}$. Диаметр $d_i \geq \sqrt{\frac{4N_i}{\pi[\sigma]}}$.

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 141,421 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 3,35 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = 3,5 \text{ см}, F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,5^2}{4} = 9,61 \text{ см}^2.$$

б) Квадратное сечение со стороной a .

Площадь сечения $F_i = a_i^2$. Сторона $a_i \geq \sqrt{\frac{N_i}{[\sigma]}}$.

$$a_1 \geq \sqrt{\frac{N_1}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{141 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 2,97 \cdot 10^{-2} \text{ м} \Rightarrow a_1 = 3 \text{ см}, F_1 = a_1^2 = 3^2 = 9 \text{ см}^2.$$

в) Сечение в форме равностороннего треугольника со стороной a .

Площадь сечения $F_i = \frac{\sqrt{3}a_i^2}{4} = 0,433a_i^2$. Сторона $a_i \geq \sqrt{\frac{N_i}{0,433 \cdot [\sigma]}}$.

$$a_1 \geq \sqrt{\frac{N_i}{0,433 \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{141 \cdot 10^3}{0,433 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 4,51 \cdot 10^{-4} \text{ м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 5 \text{ см}, F_1 = 0,433a_1^2 = 0,433 \cdot 5^2 = 10,825 \text{ см}^2.$$

г) Сечение в форме двутавра (ГОСТ 8239-86) согласно (1.5).

$$F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]} = \frac{141 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 8,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow \text{Двутавр № 10}, F_1 = 12 \text{ см}^2.$$

д) Сечение в форме швеллера (ГОСТ 8240-86).

$$F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]} = \frac{141 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 8,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow \text{Швеллер № 8}, F_1 = 8,98 \text{ см}^2.$$

е) Сечение в форме двух неравнополочных уголков (ГОСТ 8510-86).

$$F_i \geq \frac{N_i}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{141 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4,41 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow \text{Уголок } 5,6 \times 3,6 \times 5, F_1 = 4,41 \text{ см}^2.$$

1.3.2. Определение внутренних усилий.

При определении внутренних усилий методом сечений или методом вырезания узлов нельзя рассекать абсолютно жесткие элементы, нагруженные поперечной внешней нагрузкой, и не рекомендуется вообще рассекать абсолютно жесткие балки и блоки.

1.3.3. Определение перемещений.

Как уже указывалось выше, единого алгоритма для определения перемещений точек стержневых систем не существует. При определении перемещений рекомендуется положительные направления смещений относительно неподвижных точек отмерять вверх и вправо. В этом случае можно получить не только значения перемещений, но и их знак.

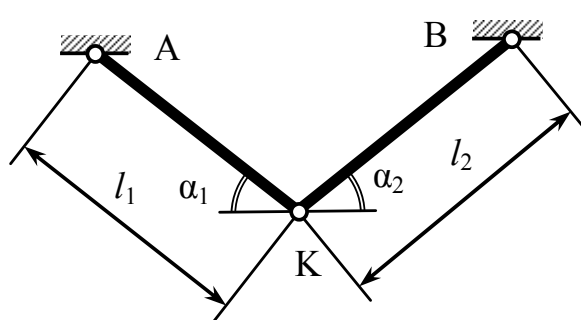


Рис.1.6

Наиболее сложным является случай определения перемещений, когда заданная точка К или какая-то промежуточная связующая точка привязаны к неподвижным точкам при помощи двух наклонных упругих связей (рис.1.6).

Определить вертикальное y_K и горизонтальное x_K перемещения точки К в этом случае можно, если выразить через них деформации Δl_1 и Δl_2 наклонных упругих связей (рис.1.7) :

$$\Delta l_1 = y_K \sin \alpha_1 + x_K \cos \alpha_1, \quad (a)$$

$$\Delta l_2 = y_K \sin \alpha_2 - x_K \cos \alpha_2. \quad (б)$$

Решая систему уравнений (a) и (б), получаем:

$$y_K = \frac{\Delta l_1 \cos \alpha_2 + \Delta l_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (1.8)$$

$$x_K = \frac{\Delta l_1 \sin \alpha_2 - \Delta l_2 \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (1.9)$$

где l_1 и l_2 — длины наклонных стержней, α_1 и α_2 — углы их наклона к горизонтали.

Выражения (1.5) и (1.6) можно также применять для определения

перемещений при любых вариантах привязки к неподвижным точкам при помощи двух любых упругих стержней.

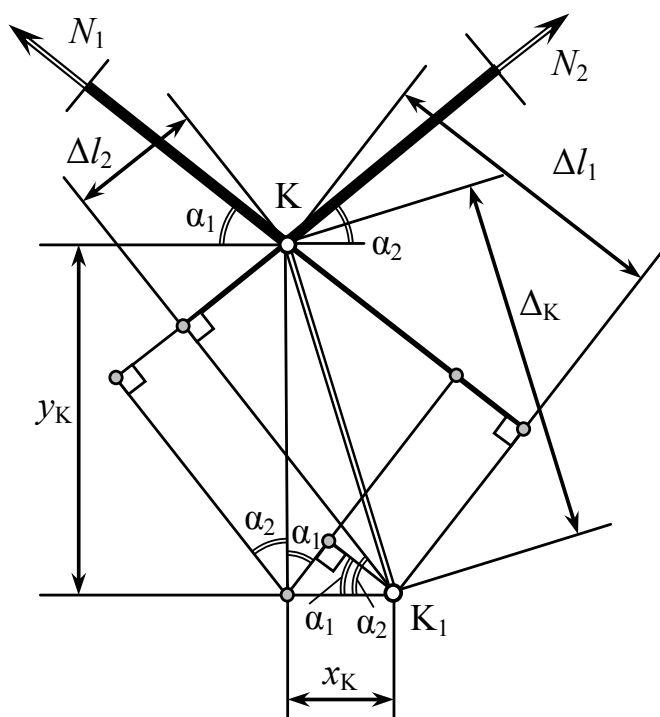


Рис.1.7

§ 1.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое напряженное состояние называется одноосным растяжением-сжатием? Какие его признаки? Какая внешняя нагрузка может вызвать одноосное растяжение-сжатие? В чем различие между растяжением и сжатием?
2. Как называется одноосный элемент, работающий на растяжение или сжатие? Чем отличается упругий элемент от абсолютно жесткого?
3. Как определяются опорные реакции в стержневых системах? В чем различие между внешней активной и внешней реактивной нагрузкой?
4. Сколько существует независимых уравнений равновесия для одноосного элемента, стержневой системы, стержневой системы сходящихся элементов, стержневой системы параллельных элементов?
5. Какие виды внешней нагрузки могут быть приложены к упругим и абсолютно жестким элементам стержневой системы? Какую размерность имеют сосредоточенная сила, сосредоточенный момент и распределенная нагрузка?
6. Как определяются внутренние усилия в упругих элементах? Какие внутренние усилия возникают при одноосном растяжении-сжатии?
7. В чем заключается метод сечений? Какое различие и какая взаимосвязь между внешней нагрузкой и внутренними усилиями?
8. В чем заключается метод вырезания узлов? Какие он имеет ограничения? В какой последовательности вырезаются узлы и абсолютно жесткие элементы?
9. Что такое напряжение? По какой формуле определяется напряжение при одноосном растяжении-сжатии? Какова размерность напряжения?
10. Какое условие прочности стержня при растяжении-сжатии?
11. Что такое допускаемое напряжение? Что такое опасное напряжение?
12. По каким формулам определяются размеры и площадь квадратного, круглого, треугольного поперечных сечений, сечений а форме двутавра, швеллера, равнополочного уголка из условия прочности при растяжении-сжатии?
13. Что такое абсолютная продольная деформация? По какой формуле она определяется? Как формулируется закон Гука?
14. Как обозначается жесткость стержня при растяжении-сжатии? Какова ее размерность?
15. Что такое модуль упругости? Какова его размерность?
16. Чем отличается деформация от перемещения?
17. По каким формулам определяется перемещение узловой точки стержневой системы в наиболее сложном случае?
18. Как определяется полное перемещение точки стержневой системы? В каком направлении откладывается его положительное значение?

§ 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Условие задачи: Для заданной статически неопределимой стержневой системы:

- 1) Определить геометрические характеристики заданной системы;
- 2) Определить степень статической неопределимости;
- 3) Записать уравнение равновесия;
- 4) Записать уравнения совместности деформаций;
- 5) Определить усилия в упругих стержнях;
- 6) Определить допускаемое значение внешней нагрузки.

Цель задачи: отработка навыков расчета на прочность и жесткость элементов статически неопределимой стержневой системы, в том числе – кинематического анализа и определения степени статической неопределимости системы, формирования возможного деформированного состояния системы, составления уравнений совместности деформаций.

Ключевые слова: статически неопределимая стержневая система, кинематический анализ, степень статической неопределимости, деформированная схема, уравнение совместности деформаций, возможные перемещения, температурные напряжения, монтажные напряжения, линейная температурная деформация, коэффициент линейного температурного расширения, монтажный зазор.

§ 2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Если число внешних связей в стержневой системе превышает число независимых уравнений равновесия или число внутренних связей больше, чем необходимо для сохранения геометрической неизменяемости системы, такая система называется статически неопределимой. При наличии «лишних» внешних связей система имеет внешнюю, при наличии «лишних» внутренних связей – внутреннюю статическую неопределимость. Для решения статически неопределимых систем необходимо использовать дополнительные уравнения совместности деформаций упругих элементов, полученные в любом возможном деформированном состоянии системы. Число «лишних» внешних или внутренних связей называется степенью статической неопределимости и определяет число необходимых уравнений совместности деформаций.

Статически неопределимые системы встречаются достаточно часто при рассмотрении всех видов напряженного состояния. Поэтому в сопротивлении материалов существуют универсальные методы решения таких задач (метод сил, метод перемещений) с использованием канонической (универсальной) формы отображения условий совместности деформаций. Однако, некоторые простейшие статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии могут быть решены на основе непосредственного рассмотрения деформаций системы. Проще всего деформированную схему строить при внешней статической неопределимости. Степень статической неопределимости таких систем можно определить по формуле

$$ССН = n - m, \quad (2.1)$$

где n – число неизвестных (внутренние усилия в упругих элементах, опорные реакции), m – число независимых уравнений равновесия.

Наиболее сложным этапом расчета статически неопределимых стержневых систем является построение возможного деформированного состояния системы и составление уравнений совместности деформаций. Это связано с большим разнообразием расчетных схем таких систем.

Построение возможного деформированного состояния статически неопределимой стержневой системы осуществляется в следующей последовательности:

- 1) Мысленно рассоединяются все внутренние шарниры системы;
- 2) Показывается новое возможное положение абсолютно жестких (недеформируемых) элементов системы;
- 3) Деформируются упругие элементы системы и смещаются до соединения в новых положениях внутренних шарниров.

При построении деформированной схемы необходимо соблюдать следующие правила:

- 1) Абсолютно жесткие элементы системы не искривляются и не деформируются, а лишь поворачиваются и смещаются под действием внешней нагрузки;
- 2) Упругие элементы системы сначала деформируются и лишь затем поворачиваются и смещаются в новое положение;
- 3) Точки элементов системы при повороте перемещаются не по дуге окружности, а перпендикулярно к радиусу поворота относительно фиксированного или мгновенного центра поворота;
- 4) Если выбранное в расчетной схеме направление внутреннего усилия N_i в упругом элементе не согласуется с направлением деформации Δl_i этого элемента на деформированной схеме, то эта деформация на деформированной схеме показывается со знаком «-».

В статически неопределимых системах могут возникать внутренние усилия даже при отсутствии внешней нагрузки. Причиной этого может быть неравномерный нагрев или погрешности изготовления отдельных элементов системы. В первом случае возникают температурные, а во втором – монтажные напряжения. Температурные напряжения возникают вследствие увеличения длины отдельных элементов за счет линейной температурной деформации при нагреве или охлаждении

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta t, \quad (2.2)$$

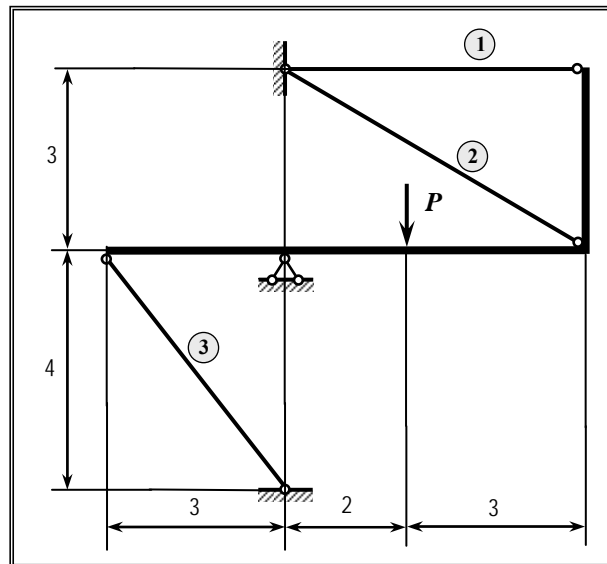
где α_t – коэффициент линейного температурного расширения, l – длина элемента, Δt – изменение температуры.

Расчет статически неопределимой системы при температурных и монтажных напряжениях осуществляется так же, как и при силовом нагружении.

§ 2.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Исходные данные: $F_1 = 12 \text{ см}^2$, $F_2 = 8 \text{ см}^2$, $F_3 = 16 \text{ см}^2$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Заданная расчетная схема:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем длины упругих стержней, углы наклона элементов расчетной схемы и их функции (рис.2.1).

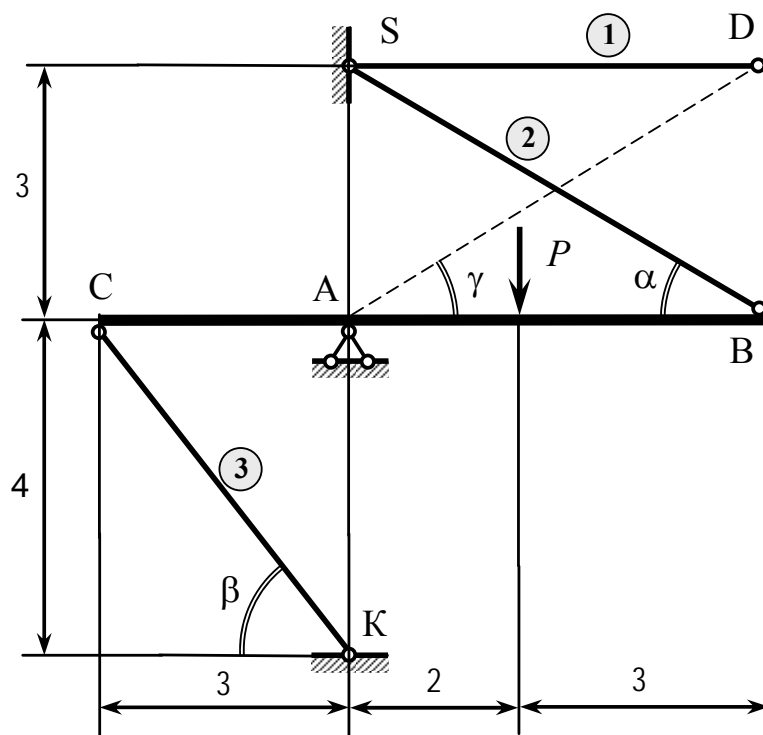


Рис. 2.1. Заданная схема

Заданная расчетная схема может содержать ряд параметров, величина которых неизвестна, но которые могут быть определены на основе известных

данных. В статически неопределимых стержневых системах неизвестными могут быть не только длины упругих и абсолютно жестких элементов и углы их наклона, но и радиусы поворота точек расчетной системы. Углы наклона необходимо привязывать к горизонтали и измерять острый, а не тупой угол. Для определения длин обозначим на схеме (рис.2.1) характерные точки системы.

1.1. Определяем длины упругих элементов системы.

Длина первого упругого стержня SD равна: $l_1 = 5$ м.

Длина второго упругого стержня SB равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABS:

$$\Delta ABS \Rightarrow l_2 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5,831 \text{ м.}$$

Длина третьего упругого стержня СК равна гипотенузе прямоугольного треугольника АСК:

$$\Delta ACK \Rightarrow l_3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ м.}$$

1.2. Определяем радиусы поворота характерных точек системы.

При формировании деформированной схемы все точки заданной расчетной схемы могут смещаться или поворачиваться относительно неподвижных точек. В заданной схеме неизвестен радиус поворота AD точки D относительно опоры А. Он равен гипотенузе прямоугольного треугольника ABD:

$$\Delta ABD \Rightarrow R_D = AD = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5,831 \text{ м.}$$

1.3. Определяем углы наклона наклонных элементов расчетной схемы.

Угол наклона второго упругого стержня α можно определить из прямоугольного треугольника ABS:

$$\Delta ABS \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,6 = 30,964^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 0,515, \cos \alpha = 0,857.$$

Угол наклона третьего упругого стержня β можно определить из прямоугольного треугольника АСК:

$$\Delta ACK \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} = 1,333 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} 1,333 = 53,130^\circ \Rightarrow \sin \beta = 0,8, \cos \beta = 0,6.$$

Угол наклона γ радиуса поворота R_D можно определить из прямоугольного треугольника ABD:

$$\Delta ABD \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} 0,6 = 30,964^\circ \Rightarrow \sin \gamma = 0,515, \cos \gamma = 0,857.$$

2. Определяем степень статической неопределимости заданной стержневой системы.

Заданная стержневая система является внешне статически неопределимой поскольку имеет несколько «лишних» внешних связей. Для определения степе-

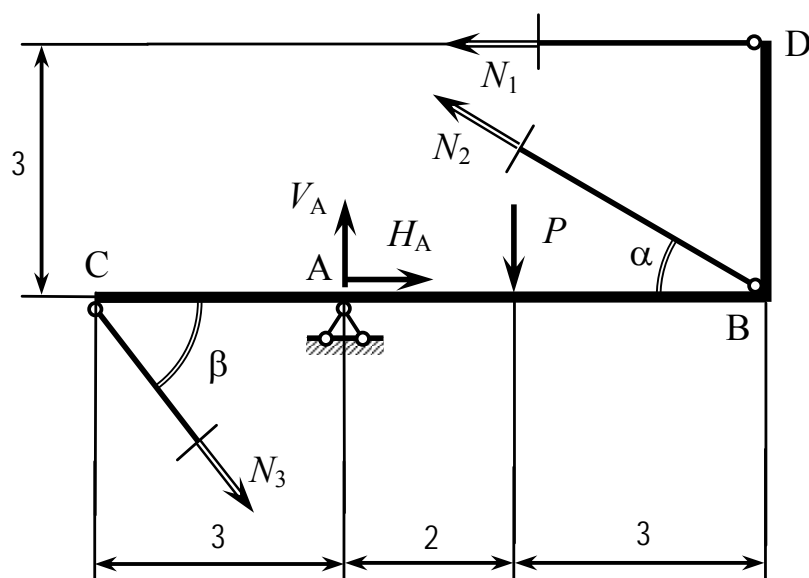


Рис. 2.2. Расчетная схема

ни статической неопределимости удобно преобразовать заданную систему (рис.2.1) к виду расчетной схемы (рис.2.2), в которой в качестве неизвестных выступают не реакции в опорах, а продольные усилия в упругих стержнях.

Определяем степень статической неопределимости согласно (2.1) как разницу между числом неизвестных n (N_1, N_2, N_3, V_A, H_A) и числом независимых уравнений равновесия статики m ($\sum x = 0, \sum y = 0, \sum M = 0$) для плоской системы (рис.2.2):

$$ССН = n - m = 5 - 3 = 2.$$

Для решения задачи (нахождения неизвестных) необходимо составить три уравнения равновесия и два уравнения совместности деформаций.

3. Записываем уравнение равновесия.

Для плоской системы существуют три независимых уравнений равновесия. В эти уравнения входят неизвестные опорные реакции (V_A, H_A) из расчетной схемы (рис.2.2). Однако, определение этих реакций не является целью данной задачи. Поскольку два уравнения совместности деформаций являются соотношениями между деформациями, а, следовательно, и между усилиями N_i в упругих элементах, достаточно составить не три, а лишь одно уравнение равновесия, не содержащее опорных реакций. В данном случае это уравнение:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{3 \cdot N_1 \sin \alpha + 5 \cdot N_2 \sin \beta + 3 \cdot N_3 = 2P} \quad (1)$$

4. Составляем уравнение совместности деформаций.

Для этого изображаем систему в деформированном виде и устанавливаем сначала аналитическую зависимость между деформациями Δl_i упругих стержней. При формировании возможного деформированного состояния системы необходимо придерживаться следующего допущения – все точки упругих и жестких элементов перемещаются не по дуге окружности, а перпендикулярно радиусу поворота (рис.2.3). При этом сначала показывается новое положение аб-

солютно жестких элементов системы, а затем деформируются упругие элементы и привязываются к новому положению жестких элементов.

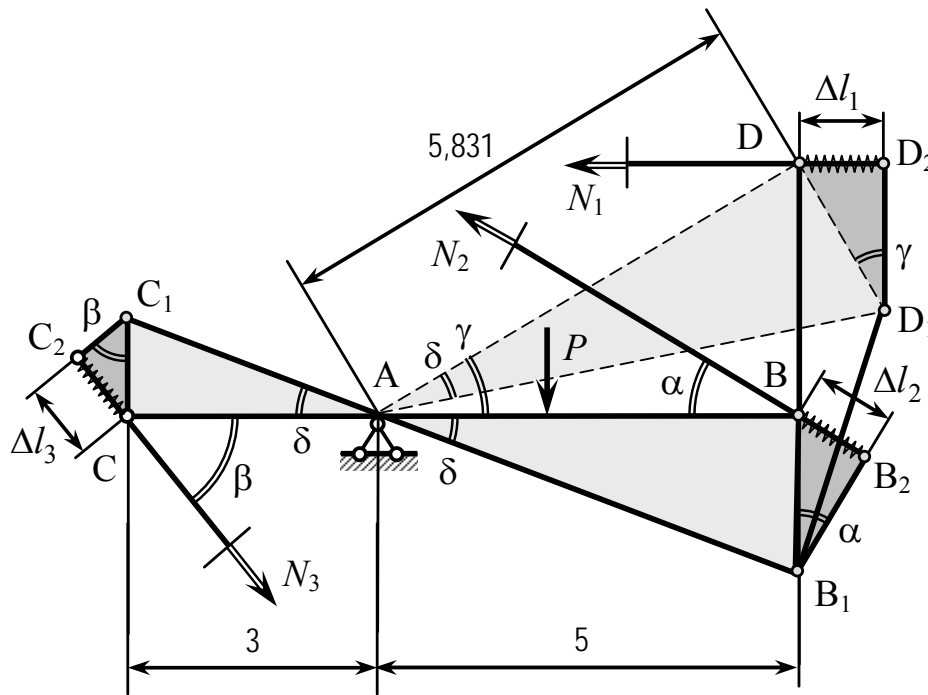


Рис.2.3. Деформированная схема

Уравнение совместности деформаций составляется на основе простых геометрических соотношений между деформациями Δl_i упругих элементов стержневой системы. Это можно сделать на основе подобия прямоугольных треугольников, полученных при формировании деформированной схемы, или на основе соотношений в треугольниках деформаций.

В рассматриваемой деформированной схеме существуют только подобные треугольники ΔACC_1 , ΔBB_1 и ΔDD_1 (рис.2.3). Из этого подобия следует пропорциональность размеров сторон треугольников:

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{DD_1}{AD}. \quad (a)$$

В соотношении (a): $AC = 3$ м, $AB = 5$ м, $AD = R_D = 5,831$ м.

Из треугольника ΔCC_1C_2 определяем параметр CC_1 :

$$\Delta CC_1C_2 \Rightarrow CC_1 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta}.$$

Из треугольника ΔBB_1B_2 определяем параметр BB_1 :

$$\Delta BB_1B_2 \Rightarrow BB_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}.$$

Из треугольника ΔDD_1D_2 определяем параметр DD_1 :

$$\Delta DD_1D_2 \Rightarrow DD_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \gamma}.$$

С учетом этого выражение (а) принимает вид:

$$\frac{\Delta l_3}{3 \cdot \sin \beta} = \frac{\Delta l_2}{5 \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{5,831 \cdot \sin \gamma}. \quad (б)$$

Выразим деформации Δl_i в соотношении (б) через закон Гука:

$$\frac{N_3 \cdot l_3}{3 \cdot E \cdot F_3 \cdot \sin \beta} = \frac{N_2 \cdot l_2}{5 \cdot E \cdot F_2 \cdot \sin \alpha} = \frac{N_1 \cdot l_1}{5,831 \cdot E \cdot F_1 \cdot \sin \gamma}. \quad (в)$$

Для удобства вычислений выразим площади F_i через единый кратный параметр (в данном случае это может быть $F = 4 \text{ см}^2$):

$$F_1 = 12 \text{ см}^2 = 3F, \quad F_2 = 8 \text{ см}^2 = 2F, \quad F_3 = 16 \text{ см}^2 = 4F.$$

Тогда, с учетом значений l_i , соотношение (в) принимает вид:

$$\frac{N_3 \cdot 5}{3 \cdot E \cdot 4 \cdot F \cdot 0,8} = \frac{N_2 \cdot 5,831}{5 \cdot E \cdot 2 \cdot F \cdot 0,515} = \frac{N_1 \cdot 5}{5,831 \cdot E \cdot 3 \cdot F \cdot 0,515},$$

или
$$0,521 \cdot N_3 = 1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1. \quad (г)$$

Из соотношения (г) можно получить два независимых уравнения совместности деформаций:

$$\boxed{0,521 \cdot N_3 = 1,132 \cdot N_2} \quad (2)$$

$$\boxed{1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1.} \quad (3)$$

5. Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), определяем усилия N_1 , N_2 и N_3 , выразив их через неизвестную внешнюю нагрузку P .

Из уравнения (2) выражаем усилие N_3 через N_2 :

$$(2) \Rightarrow N_3 = 2,173 \cdot N_2. \quad (д)$$

Из уравнения (3) выражаем усилие N_1 через N_2 :

$$(3) \Rightarrow N_1 = 2,040 \cdot N_2. \quad (е)$$

Подставляя (д) и (е) в (1), получаем:

$$(д), (е) \rightarrow (1) \Rightarrow 3 \cdot 2,040 \cdot N_2 \cdot 0,515 + 5 \cdot N_2 \cdot 0,8 + 3 \cdot 2,173 \cdot N_2 = 2P,$$

откуда
$$N_2 = \frac{2P}{3 \cdot 2,040 \cdot 0,515 + 5 \cdot 0,8 + 3 \cdot 2,173} = 0,146P.$$

Из (д) и (е) находим:

$$(д) \Rightarrow N_3 = 2,173 \cdot 0,146 \cdot P = 0,317 \cdot P,$$

$$(е) \Rightarrow N_1 = 2,040 \cdot 0,146 \cdot P = 0,298 \cdot P.$$

6. Определяем допускаемое значение внешней нагрузки.

Сначала определим напряжения, возникающие в упругих элементах:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,298 \cdot P}{12 \cdot 10^{-4}} = 248 \cdot P,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,146 \cdot P}{8 \cdot 10^{-4}} = 182,5 \cdot P,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{0,317 \cdot P}{16 \cdot 10^{-4}} = 198 \cdot P.$$

По условию прочности (1.2) максимальное из этих напряжений не должно превышать допускаемое напряжение

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Максимальные нормальные напряжения будут возникать в первом стержне $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 248 \cdot P \leq [\sigma]$. Тогда

$$P \leq \frac{[\sigma]}{248} = \frac{160 \cdot 10^6}{248} = 645 \cdot 10^3 \text{ Н} = 645 \text{ кН}.$$

Таким образом максимальное значение силы P , которое может выдержать заданная статически неопределимая система равно $[P] = 645 \text{ кН}$.

§ 2.3. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВАРИАНТАМ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

2.3.1. Разновидности статически неопределимых стержневых систем.

Статически неопределимые стержневые системы с внешней статической неопределимостью можно разбить на следующие основные группы:

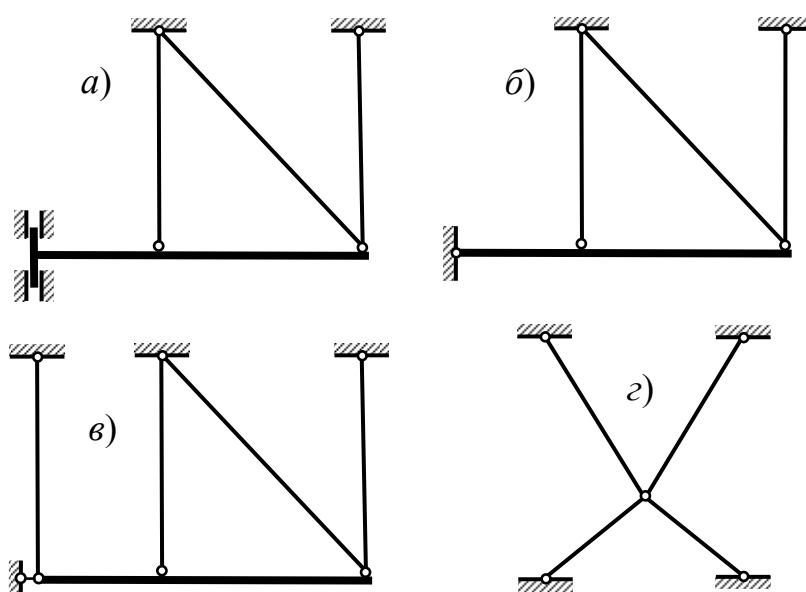


Рис. 2.4. Статически неопределимые стержневые системы:

a) с плоскопараллельным смещением; *б)* с поворотом; *в)* с комбинированным смещением жестких элементов; *з)* без жестких элементов

а) Системы с плоскопараллельным смещением жестких элементов (рис.2.4а). В таких системах абсолютно жесткий элемент закреплен при помощи скользящей заделки.

б) Системы с поворотом жестких элементов (рис.2.4б). В таких системах абсолютно жесткий элемент закреплен при помощи двухсвязного шарнира.

в) Системы со сложным комбинированным смещением жестких элементов (рис.2.4в). В таких системах абсолютно жесткий элемент закреплен при помощи односвязного шарнира.

г) Системы без жестких элементов (рис.2.4г). Обычно содержит одну узловую точку, в которой сходятся все упругие элементы.

Все представленные на рис.2.4 статически неопределимые стержневые системы являются дважды статически неопределимыми.

2.3.2. Составление уравнений равновесия.

Как правило, для плоских систем существуют три независимых уравнения равновесия. Однако, эти уравнения могут содержать неизвестные опорные реакции, определение которых не является обязательным. Для упрощения расчетов и уменьшения числа неизвестных целесообразно использовать только те уравнения равновесия, в которые не входят опорные реакции.

а) Системы с плоскопараллельным смещением жестких элементов.

Такие системы имеют три независимых уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; \quad \sum x = 0; \quad \sum M = 0.$$

Применительно к схеме, показанной на рис.2.5а, эти уравнения имеют вид:

$$\sum y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 \sin \alpha + N_3 = P, \quad (1)$$

$$\sum x = 0 \Rightarrow H_A + N_2 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_1 \cdot a + N_2 \cdot c \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot c + M_A = P \cdot b. \quad (3)$$

Для определения продольных усилий в упругих элементах таких систем достаточно использовать только уравнение (1), которое не содержит неизвестные опорные реакции.

б) Системы с поворотом жестких элементов.

Такие системы также имеют три независимых уравнения равновесия. Применительно к схеме, показанной на рис.2.5б, эти уравнения имеют вид:

$$\sum y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 \sin \alpha + N_3 + V_A = P, \quad (1)$$

$$\sum x = 0 \Rightarrow H_A + N_2 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_1 \cdot a + N_2 \cdot c \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot c = P \cdot b. \quad (3)$$

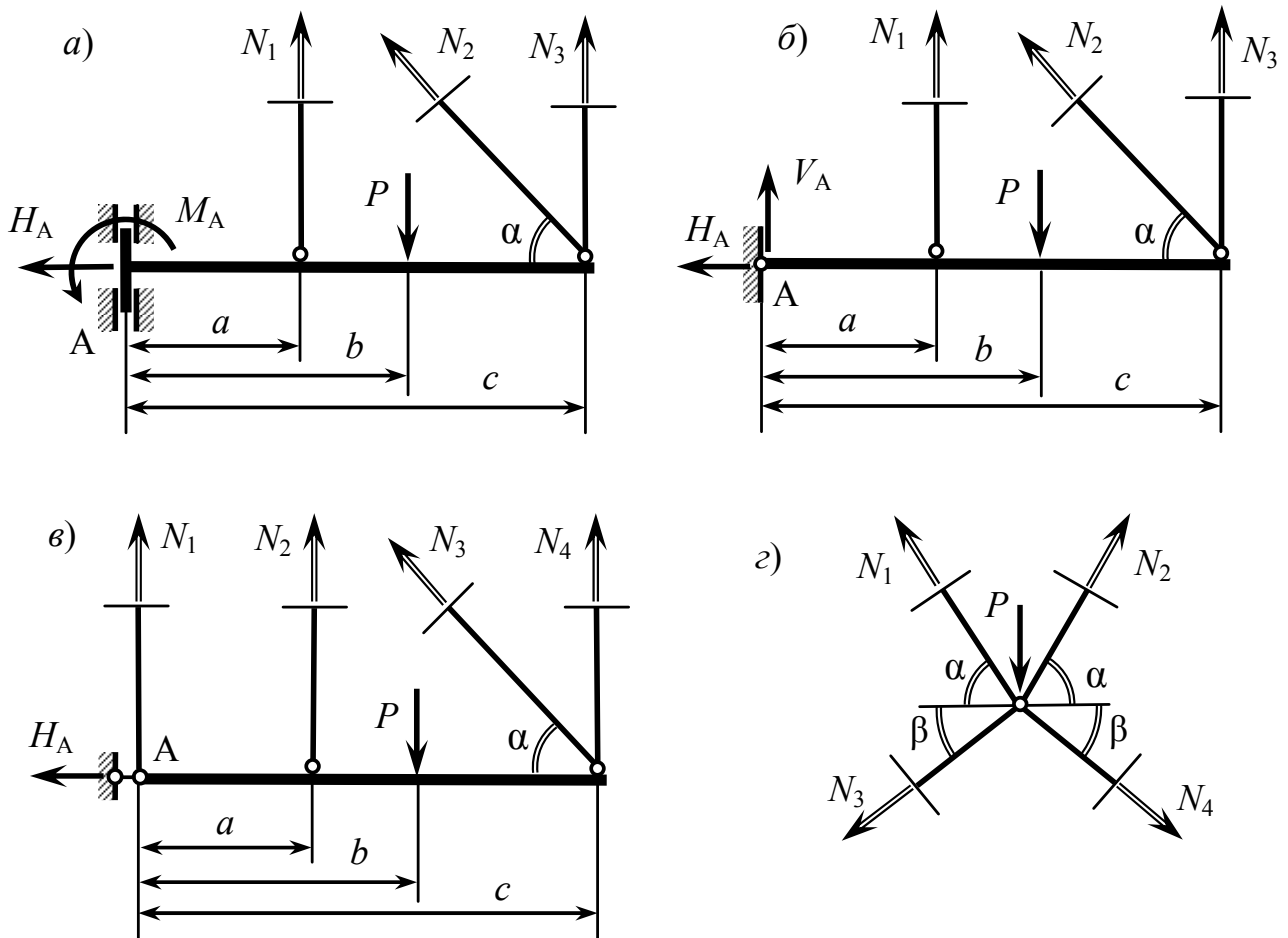


Рис. 2.5. Составление уравнений равновесия статически неопределимых стержневых систем: а) с плоскопараллельным смещением; б) с поворотом; в) с комбинированным смещением жестких элементов; г) без жестких элементов

Для определения продольных усилий в упругих элементах таких систем достаточно использовать только уравнение (3).

в) Системы с комбинированным смещением жестких элементов.

Такие системы также имеют три уравнения равновесия. Применительно к схеме, показанной на рис.2.5в, эти уравнения имеют вид:

$$\sum y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 \sin \alpha + N_4 = P, \quad (1)$$

$$\sum x = 0 \Rightarrow H_A + N_3 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_2 \cdot a + N_3 \cdot c \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot c = P \cdot b. \quad (3)$$

Для определения продольных усилий в упругих элементах таких систем необходимо использовать два уравнения (1) и (3).

г) Системы без жестких элементов.

Такие системы обычно содержат одну узловую точку, в которой сходятся все упругие элементы, и имеют два независимых уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; \quad \sum x = 0.$$

Применительно к схеме, показанной на рис.2.5з, эти уравнения имеют вид:

$$\sum y = 0 \Rightarrow N_3 \sin \beta + N_4 \sin \beta - N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = P, \quad (1)$$

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta - N_4 \cos \beta = 0. \quad (2)$$

Для определения продольных усилий в упругих элементах статически неопределимой системы необходимо использовать оба уравнения, однако, для симметричных систем, таких как система, представленная на рис.2.5з, можно ограничиться только одним уравнением. Для заданной схемы это уравнение (1), которое с учетом $N_3 = N_4$ и $N_1 = N_2$ принимает вид

$$2N_3 \sin \beta - 2N_1 \sin \alpha = P.$$

2.3.3. Построение деформированных схем

На рис.2.6. показаны возможные деформированные схемы и уравнения совместности деформаций для различных типов статически неопределимых стержневых систем.

а) Системы с плоскопараллельным смещением жестких элементов .

Уравнение совместности деформаций применительно к схеме, показанной на рис.2.5а, имеет вид:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}, \quad \text{или} \quad \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2 \sin \alpha},$$

откуда получаются два независимых уравнения

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3}, \quad (1)$$

$$\frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2 \sin \alpha}. \quad (2)$$

б) Системы с поворотом жестких элементов.

Уравнение совместности деформаций применительно к схеме, показанной на рис.2.5б, имеет вид:

$$\frac{\Delta l_1}{AB} = \frac{\Delta l_3}{AC} = \frac{\Delta l_2}{AC \cdot \sin \alpha}, \quad \text{или} \quad \frac{N_1 \cdot l_1}{AB \cdot E \cdot F_1} = \frac{N_3 \cdot l_3}{AC \cdot E \cdot F_3} = \frac{N_2 \cdot l_2}{AC \cdot E \cdot F_2 \sin \alpha},$$

откуда получаются два независимых уравнения

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{AB \cdot E \cdot F_1} = \frac{N_3 \cdot l_3}{AC \cdot E \cdot F_3}, \quad (1)$$

$$\frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2 \sin \alpha}. \quad (2)$$

в) Системы с комбинированным смещением жестких элементов.

Уравнения совместности деформаций применительно к схеме, показанной на рис.2.5в, имеет вид:

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{AB} = \frac{\Delta l_4 - \Delta l_2}{BC} \quad \text{и} \quad \Delta l_4 = \frac{\Delta l_3}{\sin \alpha},$$

или
$$BC \cdot \left(\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \right) = AB \cdot \left(\frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} - \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \right) \quad (1)$$

и
$$\frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3 \sin \alpha}. \quad (2)$$

г) Системы без жестких элементов.

Уравнение совместности деформаций применительно к схеме, показанной на рис.2.5г, с учетом симметрии имеет вид:

$$\frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta} \quad \text{или} \quad \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2 \sin \alpha} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2 \sin \beta}. \quad (1)$$

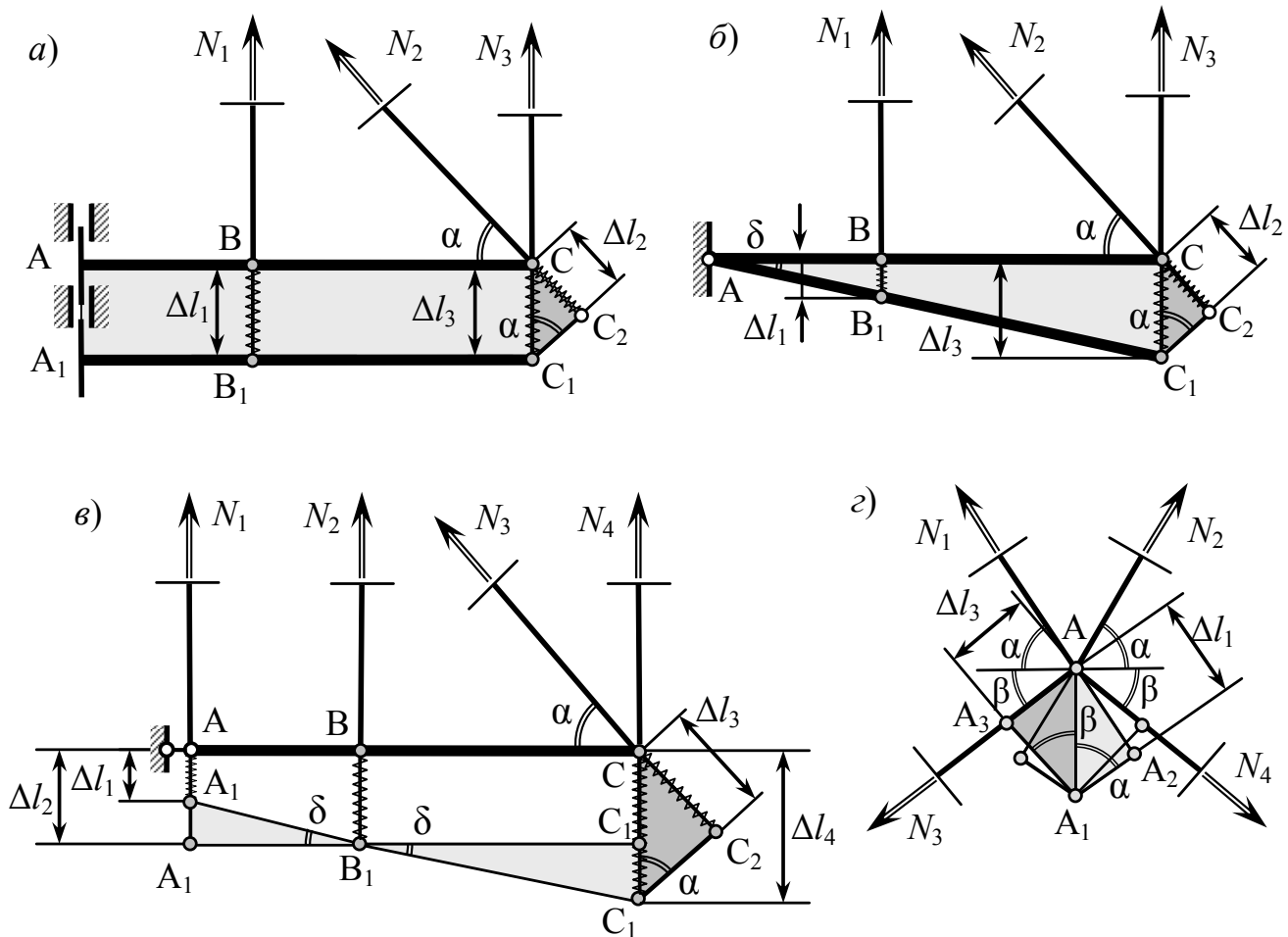


Рис. 2.6. Построение деформированных схем для статически неопределимых стержневых систем: а) с плоскопараллельным смещением; б) с поворотом; в) с комбинированным смещением жестких элементов; г) без жестких элементов

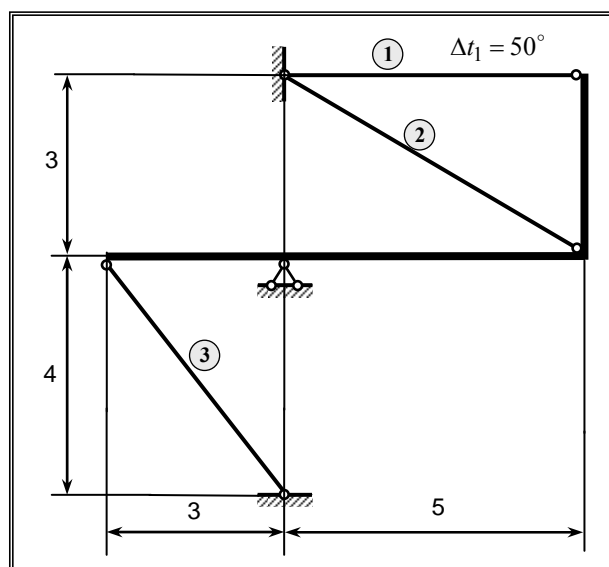
§ 2.4. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Условие задачи: В заданной статически неопределимой стержневой системе стержень 1 нагрет до температуры Δt_1 . Требуется:

- 1) Определить геометрические характеристики заданной системы;
- 2) Определить степень статической неопределимости;
- 3) Записать уравнение равновесия;
- 4) Записать уравнения совместности деформаций;
- 5) Определить усилия в упругих стержнях;
- 6) Определить напряжения в упругих стержнях.

Исходные данные: $\Delta t_1 = 50^\circ$, $\alpha_t = 12,5 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, $F_1 = 12 \text{ см}^2$, $F_2 = 8 \text{ см}^2$, $F_3 = 16 \text{ см}^2$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Заданная расчетная схема:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1.1. Определяем длины упругих стержней, углы наклона элементов расчетной схемы и их функции (рис.2.7).

Все данные берем из примера расчета при силовом нагружении.

1.1. Длины упругих элементов системы.

$$l_1 = 5 \text{ м}, \quad l_2 = 5,831 \text{ м}, \quad l_3 = 5 \text{ м}.$$

1.2. Длины радиусов поворота характерных точек расчетной системы.

$$R_D = 5,831 \text{ м}.$$

1.3. Углы наклона элементов расчетной схемы.

$$\alpha = 30,964^\circ, \quad \sin \alpha = 0,515, \quad \cos \alpha = 0,857.$$

$$\beta = 53,130^\circ, \quad \sin \beta = 0,8, \quad \cos \beta = 0,6.$$

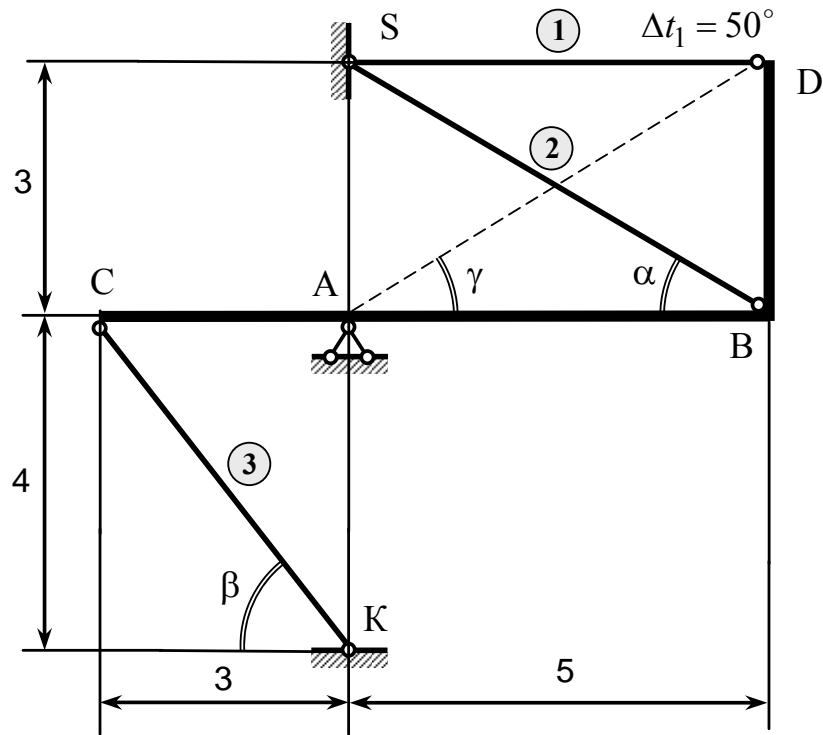


Рис. 2.7. Заданная схема

$$\gamma = 30,964^\circ, \quad \sin \gamma = 0,515, \quad \cos \gamma = 0,857.$$

2. Определяем степень статической неопределимости (рис.2.8).

$$CCH = n - m = 5 - 3 = 2.$$

3. Записываем уравнение равновесия.

В отличие от силового нагружения, для которого уравнение равновесия было линейным неоднородным, при тепловом нагружении это уравнение будет линейным однородным (рис.2.8):

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot N_2 \cdot \sin \alpha + 3 \cdot N_3 \cdot \sin \beta + 3 \cdot N_1 = 0 \quad (1)$$

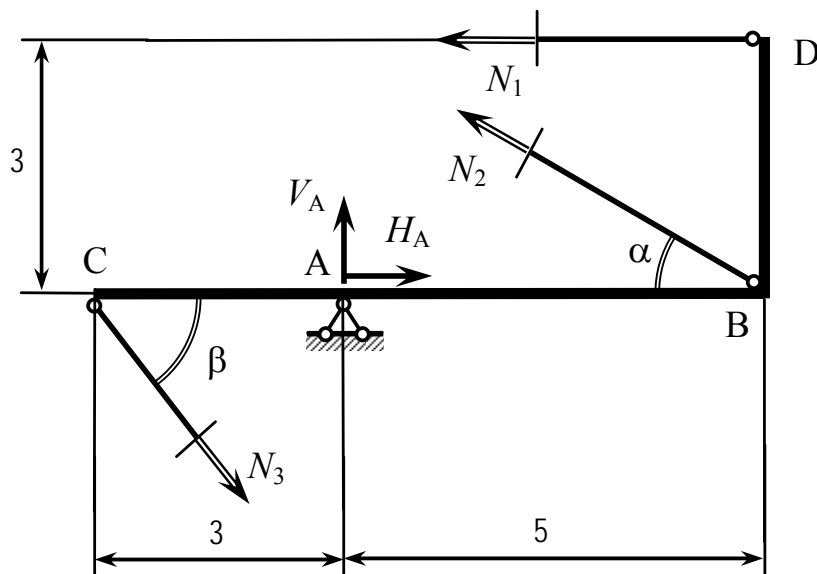


Рис. 2.8. Расчетная схема

4. Составляем уравнение совместности деформаций.

При тепловом нагружении деформированная схема строится в такой же последовательности и с теми же допущениями, что и при силовом нагружении. При нагреве стержень 1 согласно (2.2) удлиняется на величину

$$\Delta l_t = \alpha_t l_1 \Delta t_1. \quad (a)$$

Если бы заданная система была статически определимой, то точка D заняла бы новое положение D_4 (при повороте – D_3). Однако стержни 2 и 3 будут препятствовать удлинению стержня 1 и поэтому точка D_4 займет какое-то промежуточное положение D_2 (при повороте – D_1) и абсолютно жесткий элемент САВD принимает положение $C_1A_1B_1D_1$ (рис.2.9), а абсолютная деформация стержня 1 составит

$$DD_2 = DD_4 - D_2D_4 = \Delta l_t - (-\Delta l_1) = \Delta l_t + \Delta l_1. \quad (б)$$

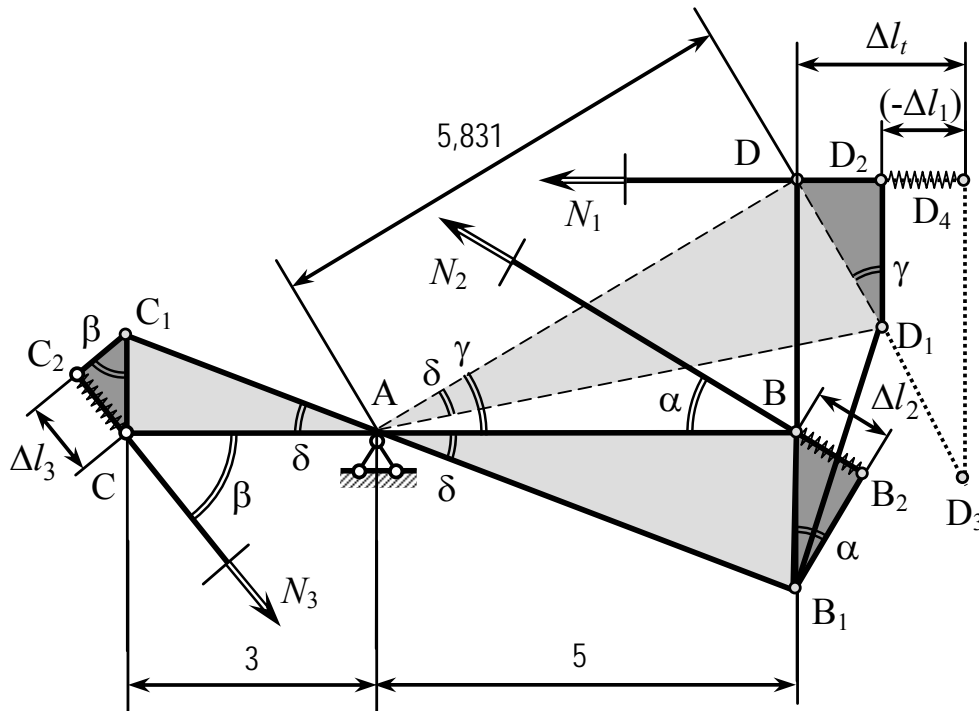


Рис.2.9. Деформированная схема

Особое внимание следует обращать на знак деформаций. В рассматриваемом примере отрезок D_2D_4 отражает деформацию первого стержня от продольного усилия N_1 . Так как это усилие показано на схеме растягивающим, а деформация D_2D_4 соответствует сжатию стержня, необходимо или перенаправить усилие N_1 на расчетной схеме (рис.2.8) в противоположную сторону или учесть это рассогласование знаком «-», то есть $D_2D_4 = -\Delta l_1$. Второй вариант реализовать легче, так как при этом не надо исправлять уравнение равновесия (1).

Из подобия треугольников ΔACC_1 , ΔABB_1 и ΔADD_1 (рис.2.9) следует пропорциональность размеров сторон треугольников:

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{DD_1}{AD}, \quad (6)$$

где $AC = 3 \text{ м}$, $AB = 5 \text{ м}$, $AD = R_D = 5,831 \text{ м}$, $CC_1 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta}$, $BB_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$.

Параметр DD_1 определяется из треугольника ΔDD_1D_2 с учетом (6):

$$\Delta DD_1D_2 \Rightarrow DD_1 = \frac{DD_2}{\sin \gamma} = \frac{(\Delta l_t + \Delta l_1)}{\sin \gamma}.$$

Тогда выражение (6) принимает вид:

$$\frac{\Delta l_3}{3 \cdot \sin \beta} = \frac{\Delta l_2}{5 \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta l_t + \Delta l_1}{5,831 \cdot \sin \gamma}. \quad (2)$$

Выразим деформации Δl_i в соотношении (2) через закон Гука (1.3), а Δl_t согласно (а):

$$\frac{N_3 \cdot l_3}{3 \cdot E \cdot F_3 \cdot \sin \beta} = \frac{N_2 \cdot l_2}{5 \cdot E \cdot F_2 \cdot \sin \alpha} = \frac{N_1 \cdot l_1}{5,831 \cdot E \cdot F_1 \cdot \sin \gamma} + \frac{\alpha_t l_1 \Delta t_1}{5,831 \cdot \sin \gamma}. \quad (d)$$

Выражая площади F_i через $F = 4 \text{ см}^2$, получаем:

$$F_1 = 12 \text{ см}^2 = 3F, \quad F_2 = 8 \text{ см}^2 = 2F, \quad F_3 = 16 \text{ см}^2 = 4F.$$

Тогда, с учетом l_i , соотношение (d) принимает вид:

$$\frac{N_3 \cdot 5}{3 \cdot E \cdot 4 \cdot F \cdot 0,8} = \frac{N_2 \cdot 5,831}{5 \cdot E \cdot 2 \cdot F \cdot 0,515} = \frac{N_1 \cdot 5}{5,831 \cdot E \cdot 3 \cdot F \cdot 0,515} + \frac{\alpha_t \cdot 5 \cdot \Delta t_1}{5,831 \cdot 0,515},$$

или $0,521 \cdot N_3 = 1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1 + 1,665 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1. \quad (e)$

Из соотношения (e) можно получить два независимых уравнения совместности деформаций:

$$\boxed{0,521 \cdot N_3 = 1,132 \cdot N_2} \quad (2)$$

$$\boxed{1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1 + 1,665 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1} \quad (3)$$

5. Решая систему уравнений (1), (2) и (3), определяем усилия N_1 , N_2 и N_3

Из уравнения (2) выражаем усилие N_3 через N_2 :

$$(2) \Rightarrow N_3 = 2,173 \cdot N_2. \quad (ж)$$

Подставляя (ж) в уравнение (1), выражаем усилие N_1 через N_2 :

$$(ж) \rightarrow (1) \Rightarrow 5 \cdot N_2 \cdot \sin \alpha + 3 \cdot 2,173 \cdot N_2 \cdot \sin \beta + 3 \cdot N_1 = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = -\frac{5 \cdot N_2 \cdot 0,515 + 3 \cdot 2,173 \cdot N_2 \cdot 0,8}{3} = -2,596 \cdot N_2. \quad (3)$$

Подставляя (з) в (3), получаем:

$$(з) \rightarrow (3) \Rightarrow 1,132 \cdot N_2 = -0,555 \cdot 2,596 \cdot N_2 + 1,665 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1,$$

откуда
$$N_2 = \frac{1,665 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1}{1,132 + 0,555 \cdot 2,596} = 0,647 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1.$$

Из (ж) и (з) находим:

$$(ж) \Rightarrow N_3 = 2,173 \cdot 0,647 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1 = 1,405 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1,$$

$$(з) \Rightarrow N_1 = -2,596 \cdot 0,647 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1 = -1,679 \cdot \alpha_t \cdot E \cdot F \cdot \Delta t_1.$$

Для заданных условий

$$N_2 = 0,647 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = 32,35 \text{ кН},$$

$$N_3 = 1,405 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = 70,25 \text{ кН},$$

$$N_1 = -1,679 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = -83,95 \text{ кН}.$$

6. Определяем напряжения в упругих стержнях из условия прочности. Для этого определим напряжения, возникающие в упругих элементах:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = -\frac{83,95 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -69,96 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{32,35 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 40,44 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{70,25 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} = 43,91 \text{ МПа}.$$

Напряжения во всех стержнях не превышают допустимых $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

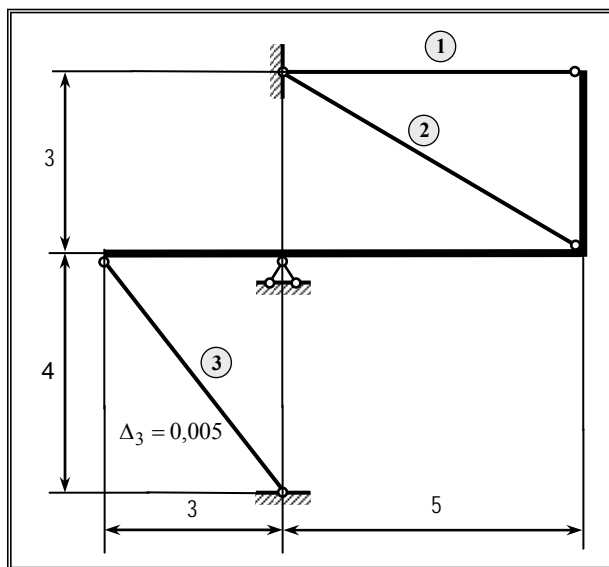
§ 2.5. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МОНТАЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Условие задачи: При монтаже заданной стержневой системы стержень 3 оказался длиннее заданных размеров на величину Δ_3 . Требуется:

- 1) Определить геометрические характеристики заданной системы;
- 2) Определить степень статической неопределимости;
- 3) Записать уравнение равновесия статики;
- 4) Записать уравнения совместности деформаций;
- 5) Определить усилия в упругих стержнях;
- 6) Определить напряжения в упругих стержнях.

Исходные данные: $\Delta_3 = 0,005 \text{ м}$, $F_1 = 12 \text{ см}^2$, $F_2 = 8 \text{ см}^2$, $F_3 = 16 \text{ см}^2$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Заданная расчетная схема:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем длины упругих стержней, углы наклона элементов расчетной схемы и их функции (рис.2.10).

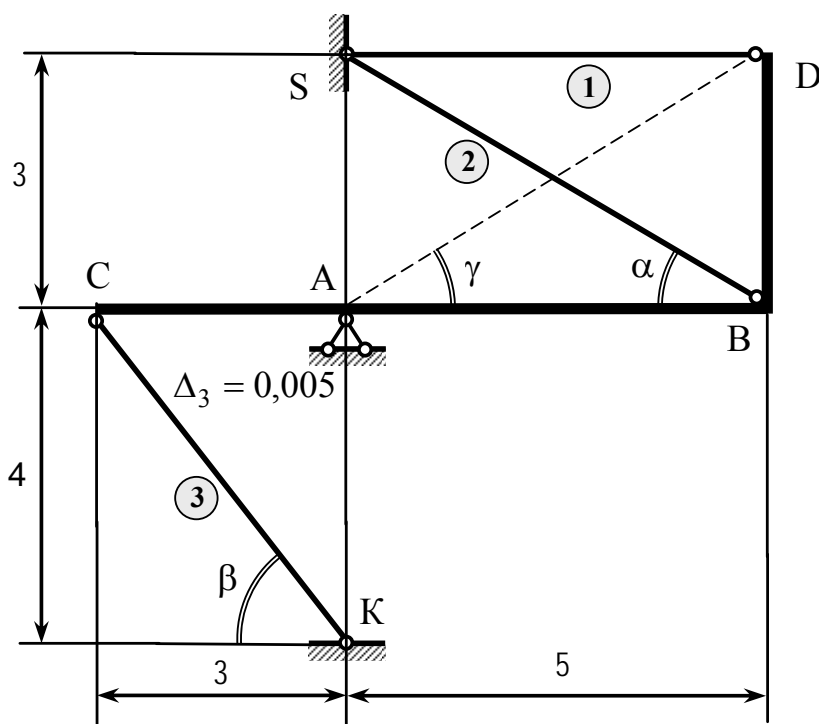


Рис. 2.10. Заданная схема

Все данные берем из примера расчета при силовом нагружении.

1.1. Длины упругих элементов системы.

$$l_1 = 5 \text{ м}, \quad l_2 = 5,831 \text{ м}, \quad l_3 = 5 \text{ м}.$$

1.2. Длины радиусов поворота характерных точек расчетной системы.

$$R_D = 5,831 \text{ м}.$$

1.3. Углы наклона элементов расчетной схемы.

$$\alpha = 30,964^\circ, \quad \sin \alpha = 0,515, \quad \cos \alpha = 0,857.$$

$$\beta = 53,130^\circ, \quad \sin \beta = 0,8, \quad \cos \beta = 0,6.$$

$$\gamma = 30,964^\circ, \quad \sin \gamma = 0,515, \quad \cos \gamma = 0,857.$$

2. Определяем степень статической неопределимости (рис.2.11).

$$CCH = n - m = 5 - 3 = 2.$$

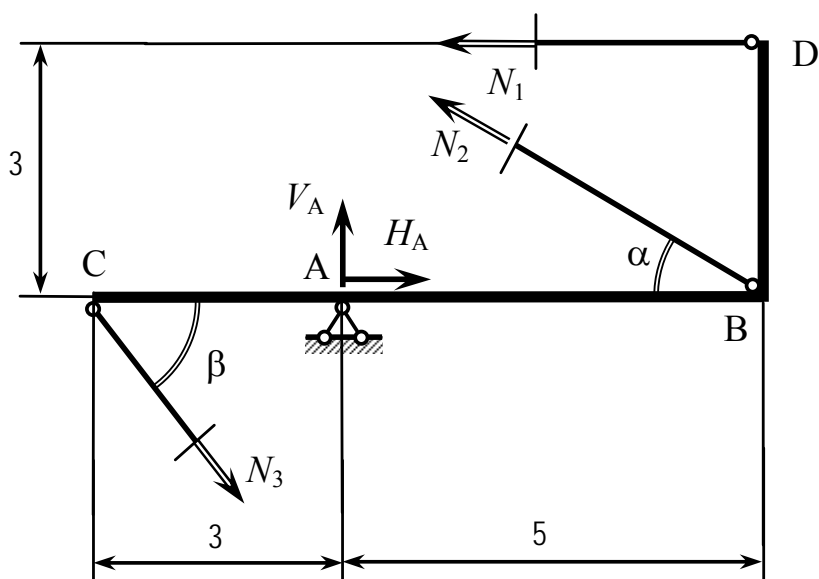


Рис. 2.11. Расчетная схема

3. Записываем уравнение равновесия.

Как и при тепловом нагружении это уравнение будет линейным однородным (рис.2.11):

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot N_2 \cdot \sin \alpha + 3 \cdot N_3 \cdot \sin \beta + 3 \cdot N_1 = 0 \quad (1)$$

4. Составляем уравнение совместности деформаций (рис.2.12).

При монтажном нагружении деформированная схема строится аналогично деформированным схемам при силовом и тепловом нагружении.

За счет погрешности изготовления стержень 3 удлиняется на величину Δ_3 . Если бы заданная система была статически определимой, то точка С заняла бы новое положение C_4 (при повороте $-C_3$). Однако стержни 1 и 2 будут препятствовать удлинению стержня 3 и поэтому точка C_4 займет какое-то промежуточное положение C_2 (при повороте $-C_1$) и абсолютно жесткий элемент $CABD$ принимает положение $C_1A_1B_1D_1$ (рис.2.12), а абсолютная деформация стержня 3 составит

$$CC_2 = CC_4 - C_2C_4 = \Delta_3 - (-\Delta l_3) = \Delta_3 + \Delta l_3. \quad (a)$$

Отрезок C_2C_4 отражает деформацию третьего стержня от продольного усилия N_3 . Поскольку это усилие показано на схеме растягивающим, а деформация C_2C_4 соответствует сжатию стержня, то $C_2C_4 = -\Delta l_1$.

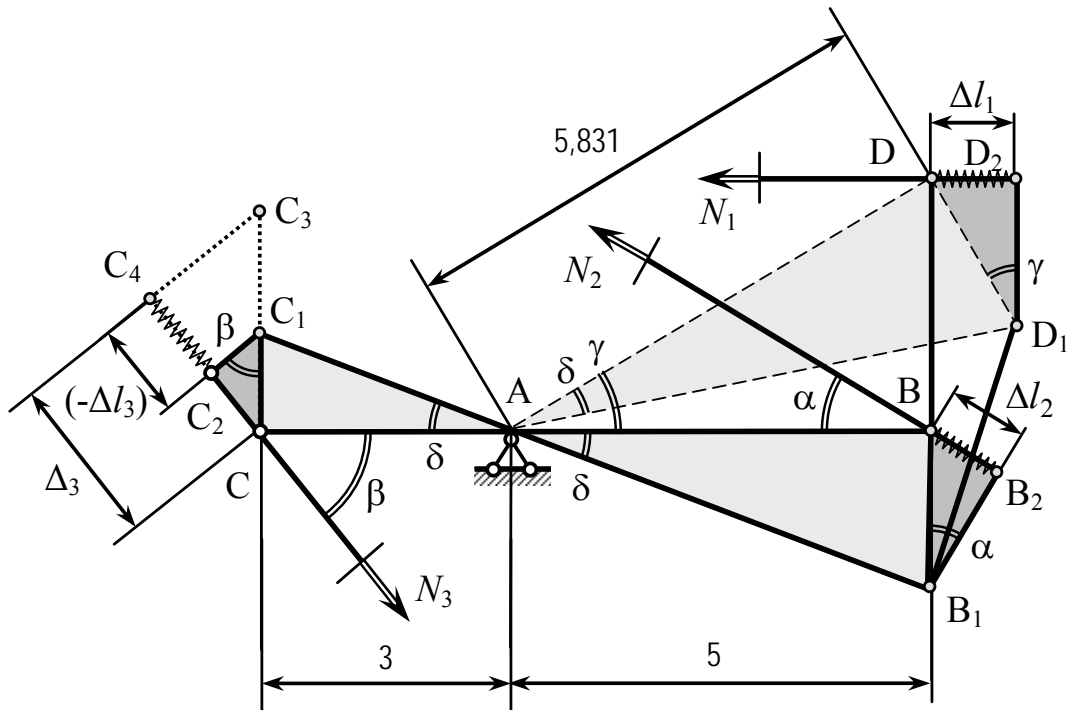


Рис.2.12. Деформированная схема

Из подобия треугольников ΔACC_1 , ΔABB_1 и ΔADD_1 (рис.2.12) следует пропорциональность размеров сторон треугольников:

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{DD_1}{AD}, \quad (б)$$

где $AC = 3$ м, $AB = 5$ м, $AD = R_D = 5,831$ м, $DD_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \gamma}$, $BB_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$.

Параметр CC_1 определяется из треугольника ΔCC_1C_2 с учетом (а):

$$\Delta CC_1C_2 \quad CC_1 = \frac{CC_2}{\sin \beta} = \frac{(\Delta_3 + \Delta l_3)}{\sin \beta}.$$

Тогда выражение (а) принимает вид:

$$\frac{\Delta_3 + \Delta l_3}{3 \cdot \sin \beta} = \frac{\Delta l_2}{5 \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{5,831 \cdot \sin \gamma}. \quad (в)$$

Выразим деформации Δl_i в соотношении (1.3) через закон Гука, а Δl_i согласно (2.2):

$$\frac{N_3 \cdot l_3}{3 \cdot E \cdot F_3 \cdot \sin \beta} + \frac{\Delta_3}{3 \cdot \sin \beta} = \frac{N_2 \cdot l_2}{5 \cdot E \cdot F_2 \cdot \sin \alpha} = \frac{N_1 \cdot l_1}{5,831 \cdot E \cdot F_1 \cdot \sin \gamma}. \quad (г)$$

Выражая площади F_i через $F = 4$ см², получаем:

$$F_1 = 12 \text{ см}^2 = 3F, \quad F_2 = 8 \text{ см}^2 = 2F, \quad F_3 = 16 \text{ см}^2 = 4F.$$

Тогда, с учетом l_i , соотношение (г) принимает вид:

$$\frac{N_3 \cdot 5}{3 \cdot E \cdot 4 \cdot F \cdot 0,8} + \frac{\Delta_3}{3 \cdot 0,8} = \frac{N_2 \cdot 5,831}{5 \cdot E \cdot 2 \cdot F \cdot 0,515} = \frac{N_1 \cdot 5}{5,831 \cdot E \cdot 3 \cdot F \cdot 0,515},$$

или
$$0,521 \cdot N_3 + 0,416 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F = 1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1. \quad (д)$$

Из соотношения (д) можно получить два независимых уравнения совместности деформаций:

$$\boxed{0,521 \cdot N_3 + 0,416 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F = 1,132 \cdot N_2} \quad (2)$$

$$\boxed{1,132 \cdot N_2 = 0,555 \cdot N_1} \quad (3)$$

5. Решая систему уравнений (1), (2) и (3), определяем усилия N_1 , N_2 и N_3 .

Из уравнения (3) выражаем усилие N_1 через N_2 :

$$(3) \Rightarrow N_1 = 2,039 \cdot N_2. \quad (е)$$

Подставляя (е) в уравнение (1), выражаем усилие N_1 через N_2 :

$$(е) \rightarrow (1) \Rightarrow 5 \cdot N_2 \cdot \sin \alpha + 3 \cdot N_3 \cdot \sin \beta + 3 \cdot 2,039 \cdot N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$N_3 = -\frac{5 \cdot N_2 \cdot 0,515 + 3 \cdot 2,039 \cdot N_2}{3 \cdot 0,8} = -3,622 \cdot N_2. \quad (ж)$$

Подставляя (ж) в (2), получаем:

$$(ж) \rightarrow (2) \Rightarrow 0,521 \cdot 3,622 \cdot N_2 + 0,416 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F = 1,132 \cdot N_2,$$

откуда
$$N_2 = \frac{0,416 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F}{0,521 \cdot 3,622 + 1,132} = 0,138 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F.$$

Из (е) и (ж) находим:

$$(ж) \Rightarrow N_3 = -3,622 \cdot 0,138 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F = -0,5 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F$$

$$(е) \Rightarrow N_1 = 2,039 \cdot 0,138 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F = 0,281 \cdot \Delta_3 \cdot E \cdot F.$$

Для заданных условий

$$N_2 = 0,138 \cdot 0,005 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 55,2 \text{ кН},$$

$$N_3 = -0,5 \cdot 0,005 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = -200 \text{ кН},$$

$$N_1 = 0,281 \cdot 0,005 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 112,4 \text{ кН}.$$

6. Определяем напряжения в упругих стержнях из условия прочности. Для этого определим напряжения, возникающие в упругих элементах:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{112,4 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 93,66 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{55,2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 69 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = -\frac{N_3}{F_3} = \frac{200 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} = -125 \text{ МПа}.$$

Таким образом, расчетные напряжения во всех стержнях не превышают допустимых напряжений $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

§ 2.6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая система называется статически неопределимой?
2. Сколько существует независимых уравнений равновесия для одноосной, плоской и пространственной систем?
3. В чем заключается кинематический анализ системы?
4. По какой формуле определяется степень статической неопределимости?
5. В какой последовательности строится возможная деформированная схема нагруженной системы?
6. Какие допущения принимаются при построении возможной деформированной схемы?
7. Что такое уравнения совместности деформаций? Какой их физический смысл?
8. Какие существуют кинематические разновидности статически неопределимых стержневых систем?
9. Какие особенности формирования деформированных схем для различных разновидностей статически неопределимых стержневых систем?
10. Что является причиной возникновения температурных и монтажных напряжений в статически неопределимых стержневых системах?
11. Могут ли возникать температурные напряжения в статически определимых стержневых системах?
12. Могут ли возникать монтажные напряжения в статически определимых стержневых системах?
13. Могут ли возникать температурные напряжения в статически неопределимых стержневых системах при равномерном нагреве всех элементов?
14. В чем различие расчета статически неопределимых стержневых систем при силовом, тепловом и монтажном нагружении?
15. Чем отличаются уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций при этих расчетах?
16. По какой формуле определяется линейная температурная деформация? Какая размерность коэффициента линейного температурного расширения?

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО СЕЧЕНИЯ

Условие задачи: Для заданного сложного сечения:

- 1) Определить геометрические характеристики простых сечений;
- 2) Определить положение центра тяжести сложного сечения;
- 3) Определить центральные моменты инерции сложного сечения;
- 4) Определить положение главных центральных осей сложного сечения;
- 5) Определить главные центральные моменты инерции сложного сечения;
- 6) Проверить правильность определения главных моментов инерции;
- 7) Определить максимальный момент сопротивления сложного сечения относительно главных центральных осей.

Цель задачи: отработка навыков определения основных геометрических характеристик сложных (составных) поперечных сечений одноосных элементов, в том числе: определение геометрических характеристик простых сечений, определение центра тяжести сложного сечения, применение правил параллельного переноса и поворота осей, определение геометрических характеристик сложного сечения в системах собственных центральных и главных центральных осей, определение положения главных осей.

Ключевые слова: простые сечения, сложные сечения, площадь сечения, центр тяжести сечения, осевые и центробежные моменты инерции сечения, момент сопротивления сечения, главные оси, главные моменты инерции, параллельный перенос и поворот координатных осей, двутавр, швеллер, уголок, уголок равнополочный, уголок неравнополочный.

§ 1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

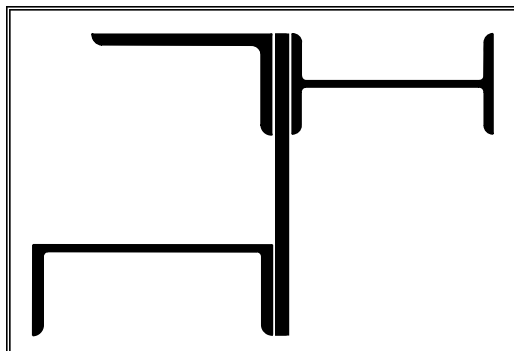
Способность одноосного элемента противостоять различной внешней нагрузке отражают геометрические характеристики его поперечного сечения: площадь, моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции. В зависимости от формы, все сечения делятся на простые и сложные. Для простых сечений все геометрические характеристики известны в виде аналитических зависимостей (сечения простой геометрической формы) или таблиц (стандартные прокатные профили). Для сложных сечений все геометрические характеристики вычисляются на основе известных данных для простых сечений.

Ключевыми геометрическими характеристиками сложного сечения являются осевые моменты инерции, на основе которых можно определить большинство других характеристик, и, в первую очередь, моменты инерции относительно главных центральных осей. Это связано с тем, что все процессы нагружения и деформирования одноосных элементов происходят относительно этих осей, то есть внешняя нагрузка сама «находит» эти оси в поперечном сечении. Поэтому для оценки напряженно-деформированного состояния одноосных элементов главные центральные оси играют важнейшую роль. Центральными называются все оси, проходящие через центр тяжести, а главными – только те из них, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

§ 3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Исходные данные для расчета: Швеллер № 24, уголок неравнобокий 18×11×10, полоса 300×12, двутавр № 20

Заданная расчетная схема:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Определяем геометрические характеристики простых сечений, которые составляют заданное сложное сечение.

Для этого введем нумерацию простых сечений в произвольном порядке, например, швеллер будет первым простым сечением, полоса – вторым, уголок – третьим, двутавр – четвертым. В дальнейшем все размеры и параметры, касающиеся простых сечений, будут иметь индексы, соответствующие выбранным номерам. Условимся обозначать все вертикальные габаритные размеры сечений как h_i , а горизонтальные – как b_i . Вертикальные центральные оси простых сечений будем обозначать как y_i , горизонтальные – как z_i .

1.1. Швеллер №24. Швеллер относится к стандартным прокатным профилям. Для таких сечений все необходимые данные приводятся в справочных таблицах. При этом все данные в таблицах соответствуют определенному положению сечения. Если положение стандартного профиля в заданном сечении не соответствует табличному положению этого профиля, необходимо учитывать это при выборе и назначении геометрических характеристик.

Для швеллера все необходимые данные выбираем из таблиц согласно ГОСТ 8240-86 с учетом поворота заданного положения (рис.3.1) относительно табличного. При этом все выбранные параметры будут иметь индекс 1:

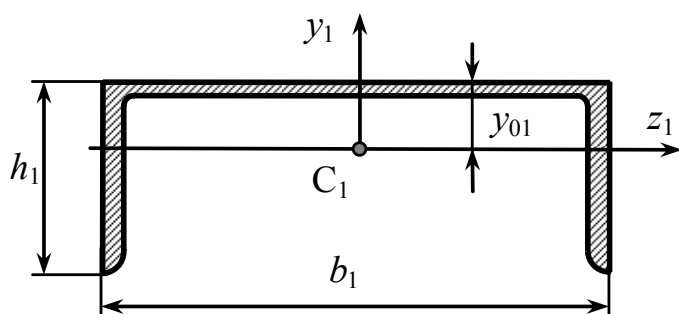


Рис. 3.1

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 9 \text{ см}, \quad b_1 = 24 \text{ см}, \\
 F_1 &= 30,6 \text{ см}^2, \\
 J_{y_1}^{(1)} &= 2900 \text{ см}^4, \\
 J_{z_1}^{(1)} &= 208 \text{ см}^4, \\
 J_{y_1 z_1}^{(1)} &= 0, \\
 y_{01} &= 2,42 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

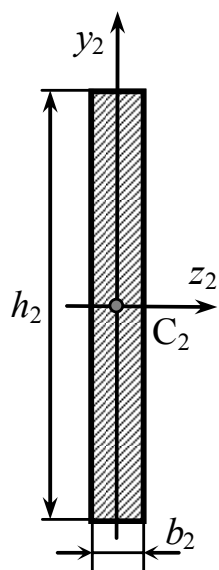


Рис.3.2

1.2. Полоса 30×1,2. Полоса является простой геометрической фигурой в форме прямоугольника (рис.3.2). Для таких фигур все геометрические характеристики определяются по известным аналитическим зависимостям. Все вычисленные параметры для полосы будут иметь индекс 2:

$$h_2 = 30 \text{ см}, \quad b_2 = 1,2 \text{ см}, \quad F_2 = b_2 \cdot h_2 = 1,2 \cdot 30 = 36 \text{ см}^2,$$

$$J_{z_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} = 2700 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2}^{(2)} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{30 \cdot 1,2^3}{12} = 4,32 \text{ см}^4, \quad J_{y_2 z_2}^{(2)} = 0.$$

1.3. Уголок неравнополочный 18×11×10. Все необходимые геометрические характеристики для неравнополочного уголка, кроме центрального момента инерции, выбираем из таблиц согласно ГОСТ 8510-86. Центральный момент инерции вычисляется по формуле:

$$J_{yx} = (J_y - J_z) \frac{\text{tg} \alpha}{(1 - \text{tg}^2 \alpha)}, \quad (3.1)$$

где $\text{tg} \alpha$ – тангенса угла наклона главной оси уголка, относительно которой момент инерции минимален. В зависимости от положения уголка величина $\text{tg} \alpha$ может быть как положительной (если угол α откладывается против хода часовой стрелки), так и отрицательным (если угол α откладывается по ходу часовой стрелки).

Все параметры для уголка будут иметь индекс 3. С учетом поворота заданного положения уголка (рис.3) относительно табличного его геометрические характеристики будут равны:

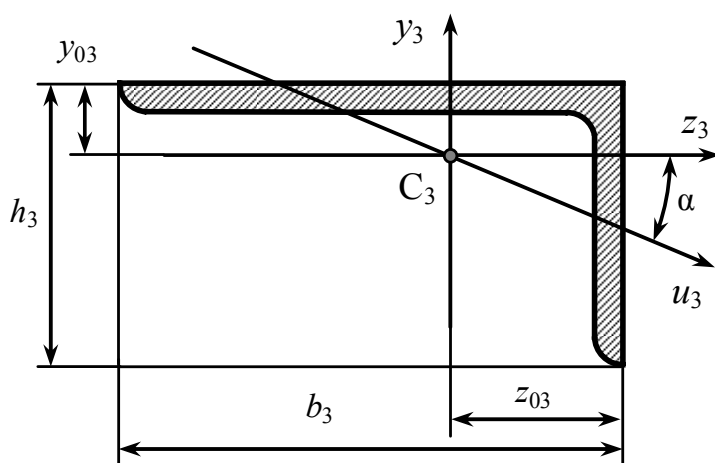


Рис.3.3

$$h_3 = 11 \text{ см}, \quad b_3 = 18 \text{ см},$$

$$F_3 = 28,33 \text{ см}^2,$$

$$J_{y_3}^{(3)} = 952,28 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_3}^{(3)} = 276,37 \text{ см}^4,$$

$$y_{03} = 2,44 \text{ см}, \quad z_{03} = 5,88 \text{ см},$$

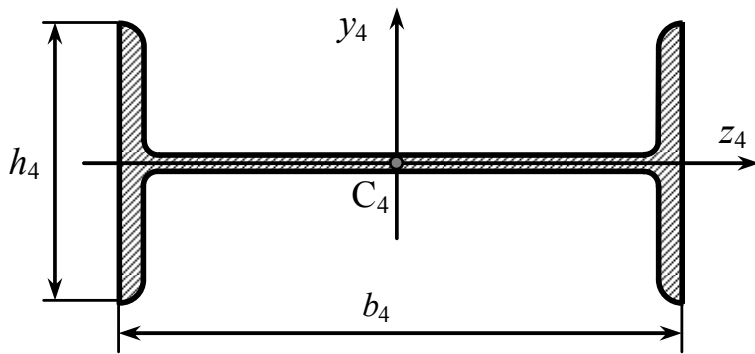
$$\text{tg} \alpha = -0,376,$$

$$J_{y_3 z_3}^{(3)} = (J_{y_3}^{(3)} - J_{z_3}^{(3)}) \frac{\text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= (952,28 - 276,37) \frac{(-0,376)}{1 - (-0,376)^2} =$$

$$= -295,99 \text{ см}^4.$$

1.4. Двутавр № 20. Необходимые данные выбираем из таблиц согласно ГОСТ 8239-86 с учетом поворота заданного положения двутавра (рис.4) относительно табличного. Все параметры для двутавра будут иметь индекс 4:



$$\begin{aligned}
 h_4 &= 10 \text{ см}, \\
 b_4 &= 20 \text{ см}, \\
 F_4 &= 26,8 \text{ см}^2, \\
 J_{y_4}^{(4)} &= 1840 \text{ см}^4, \\
 J_{z_4}^{(4)} &= 115 \text{ см}^4, \\
 J_{y_4 z_4}^{(4)} &= 0,
 \end{aligned}$$

Рис.3.4

2. Определяем положение центра тяжести сложного сечения.

Положение центра тяжести определяем в такой последовательности:

2.1. Вычерчиваем заданное сложное сечение в масштабе (рис.3.5).

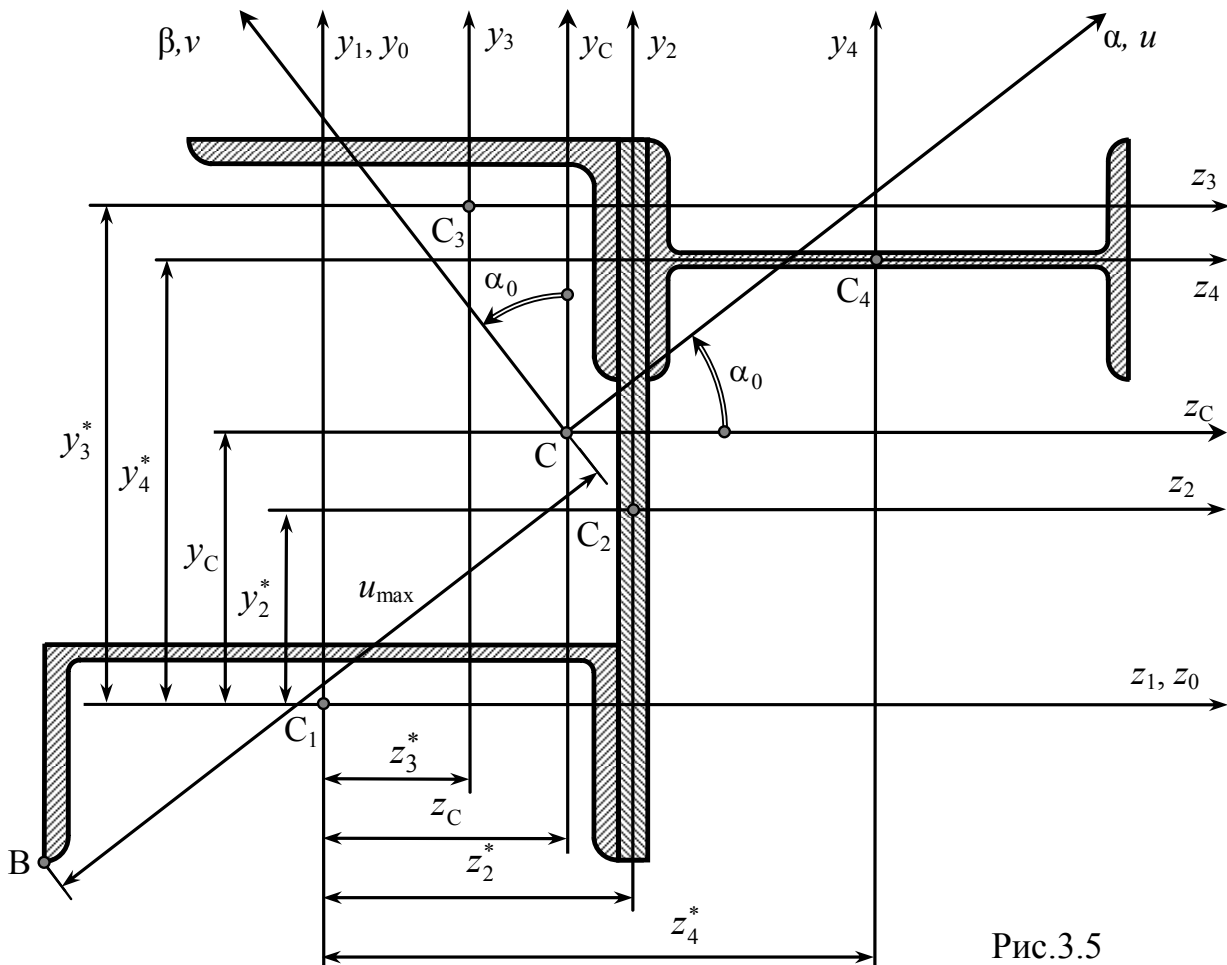


Рис.3.5

2.2. Выбираем вспомогательную систему координат.

Положение центра тяжести сложного сечения находится через координаты центра тяжести в определенной вспомогательной системе координат $y_0 z_0$:

$$y_C = \frac{\sum S_{z_0}^{(i)}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum S_{y_0}^{(i)}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (3.2)$$

В качестве вспомогательной системы координат можно выбирать любую из уже существующих в данном сечении систем координат центральных осей $y_i z_i$ простых сечений (рис.3.5) или создать новую систему координат. Наиболее удобно для определения координат центра тяжести принимать систему координат крайней левой и самой нижней из имеющихся центральных осей простых сечений – в этом случае все координаты центров тяжести простых сечений будут положительными.

Для заданного сложного сечения такой системой координат будет центральная система координат $y_1 z_1$ первого сечения. Поэтому эту систему выберем в качестве вспомогательной $y_0 z_0$ и будем определять в ней координаты центров тяжести простых сечений.

2.3. Определяем координаты центров тяжести y_i^* и z_i^* (рис.3.5) простых сечений во вспомогательной системе координат $y_0 z_0$. Эти координаты выражаем через выбранные ранее геометрические размеры простых сечений:

$$\begin{aligned} y_1^* &= 0, & y_2^* &= \frac{h_2}{2} - (h_1 - y_{01}) = \frac{30}{2} - (9 - 2,42) = 8,42 \text{ см}, \\ y_3^* &= h_3 - (h_1 - y_{01}) - y_{03} = 30 - (9 - 2,42) - 2,44 = 20,98 \text{ см}, \\ y_4^* &= h_3 - (h_1 - y_{01}) - \frac{h_4}{2} = 30 - (9 - 2,42) - \frac{10}{2} = 18,42 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0, & z_2^* &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1,2}{2} = 12,6 \text{ см}, \\ z_3^* &= \frac{b_1}{2} - z_{03} = \frac{24}{2} - 5,88 = 6,12 \text{ см}, \\ z_4^* &= \frac{b_1}{2} + b_2 + \frac{b_4}{2} = \frac{24}{2} + 1,2 + \frac{20}{2} = 23,2 \text{ см} \end{aligned}$$

2.4. Определяем координаты центра тяжести сложного сечения y_C и z_C во вспомогательной системе координат $y_0 z_0$. Согласно (3.2) они будут равны:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum S_{z_0}^{(i)}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y_i^*}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_1^* + F_2 y_2^* + F_3 y_3^* + F_4 y_4^*}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} = \\ &= \frac{30,6 \cdot 0 + 36 \cdot 8,42 + 28,33 \cdot 20,98 + 26,8 \cdot 18,42}{30,6 + 36 + 28,33 + 26,8} = 11,43 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$z_C = \frac{\sum S_{y_0}^{(i)}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i z_i^*}{\sum F_i} = \frac{F_1 z_1^* + F_2 z_2^* + F_3 z_3^* + F_4 z_4^*}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} =$$

$$= \frac{30,6 \cdot 0 + 36 \cdot 12,6 + 28,33 \cdot 6,12 + 26,8 \cdot 23,2}{30,6 + 36 + 28,33 + 26,8} = 10,26 \text{ см.}$$

2.5. Откладываем координаты центра тяжести y_C и z_C во вспомогательной системе координат $y_0 z_0$ и показываем положение центра тяжести C сложного сечения и центральные оси y_C и z_C (рис.3.5).

3. Определяем центральные осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей y_C и z_C .

Для этого используем правило определения моментов инерции сложного сечения:

$$J_{y_C} = \sum J_{y_C}^{(i)}, \quad J_{z_C} = \sum J_{z_C}^{(i)}, \quad J_{y_C z_C} = \sum J_{y_C z_C}^{(i)}. \quad (3.3)$$

Поскольку центральные оси простых сечений y_i и z_i не совпадают с центральными осями сложного сечения y_C и z_C и параллельно смещены относительно них на некоторое расстояние a и b , для вычисления моментов инерции (3) необходимо использовать правило определения моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$J_y = J_{y_C} + a^2 F, \quad J_z = J_{z_C} + b^2 F, \quad J_{yz} = J_{y_C z_C} + abF, \quad (3.4)$$

где J_{y_C} , J_{z_C} , $J_{y_C z_C}$ – центральные моменты инерции, a и b – расстояния параллельного переноса осей.

С учетом (3.4) моменты инерции (3.3) можно определить по формулам:

$$J_{y_C} = \sum J_{y_C}^{(i)} = \sum (J_{y_i}^{(i)} + z_i^2 F_i),$$

$$J_{z_C} = \sum J_{z_C}^{(i)} = \sum (J_{z_i}^{(i)} + y_i^2 F_i), \quad (3.5)$$

$$J_{y_C z_C} = \sum J_{y_C z_C}^{(i)} = \sum (J_{y_i z_i}^{(i)} + y_i z_i F_i),$$

где y_i и z_i – координаты центров тяжести простых сечений в системе центральных осей сложного сечения:

$$y_i = y_i^* - y_C, \quad z_i = z_i^* - z_C, \quad (3.6)$$

где y_C и z_C – координаты центра тяжести сложного сечения.

Вычисление центральных моментов инерции сложного сечения относительно осей y_C и z_C будем проводить в следующей последовательности:

3.1. Определяем согласно (3.6) координаты центров тяжести простых сечений y_i и z_i в системе центральных осей y_C и z_C сложного сечения:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= z_1^* - z_C = 0 - 10,26 = -10,26 \text{ см}, \\
 z_2 &= z_2^* - z_C = 12,6 - 10,26 = 2,34 \text{ см}, \\
 z_3 &= z_3^* - z_C = 6,12 - 10,26 = -4,14 \text{ см}, \\
 z_4 &= z_4^* - z_C = 23,2 - 10,26 = 12,94 \text{ см}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_1^* - y_C = 0 - 11,43 = -11,43 \text{ см}, \\
 y_2 &= y_2^* - y_C = 8,42 - 11,43 = -3,01 \text{ см}, \\
 y_3 &= y_3^* - y_C = 20,98 - 11,43 = 9,55 \text{ см}, \\
 y_4 &= y_4^* - y_C = 18,42 - 11,43 = 6,99 \text{ см}
 \end{aligned}$$

3.2. Определяем согласно (3.5) центральные моменты инерции сложного сечения в системе центральных осей y_C и z_C :

$$\begin{aligned}
 J_{y_C} &= \sum J_{y_C}^{(i)} = \sum (J_{y_i}^{(i)} + z_i^2 F_i) = \\
 &= (J_{y_1}^{(1)} + z_1^2 F_1) + (J_{y_2}^{(2)} + z_2^2 F_2) + (J_{y_3}^{(3)} + z_3^2 F_3) + (J_{y_4}^{(4)} + z_4^2 F_4) = \\
 &= (2900 + (-10,26)^2 \cdot 30,6) + (4,32 + 2,34^2 \cdot 36) + \\
 &+ (952,28 + (-4,14)^2 \cdot 28,33) + (1840 + 12,94^2 \cdot 26,8) = 14087,96 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_C} &= \sum J_{z_C}^{(i)} = \sum (J_{z_i}^{(i)} + y_i^2 F_i) = \\
 &= (J_{z_1}^{(1)} + y_1^2 F_1) + (J_{z_2}^{(2)} + y_2^2 F_2) + (J_{z_3}^{(3)} + y_3^2 F_3) + (J_{z_4}^{(4)} + y_4^2 F_4) = \\
 &= (208 + (-11,43)^2 \cdot 30,6) + (2700 + (-3,01)^2 \cdot 36) + \\
 &+ (276,37 + 9,55^2 \cdot 28,33) + (115 + 6,99^2 \cdot 26,8) = 11516,48 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{y_C z_C} &= \sum J_{y_C z_C}^{(i)} = \sum (J_{y_i z_i}^{(i)} + y_i z_i F_i) = \\
 &= (J_{y_1 z_1}^{(1)} + y_1 z_1 F_1) + (J_{y_2 z_2}^{(2)} + y_2 z_2 F_2) + (J_{y_3 z_3}^{(3)} + y_3 z_3 F_3) + (J_{y_4 z_4}^{(4)} + y_4 z_4 F_4) = \\
 &= (0 + (-11,43) \cdot (-10,26) \cdot 30,6) + (0 + (-3,01) \cdot 2,34 \cdot 36) + \\
 &+ (-295,99 + 9,55 \cdot (-4,14) \cdot 28,33) + (0 + 6,99 \cdot 12,94 \cdot 26,8) = 4342,96 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

4. Определяем положение главных центральных осей.

Для этого определяем угол их наклона относительно центральных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_C z_C}}{J_{z_C} - J_{y_C}} = -\frac{2 \cdot 4342,86}{11516,48 - 14087,96} = 3,378 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 0,5 \cdot \operatorname{arctg}(3,378) = 36,75^\circ.$$

Откладываем угол α_0 против хода часовой стрелки (положительное направление угла α_0) относительно осей y_C и z_C и показываем положение главных осей сложного сечения (рис.3.5), обозначив их предварительно α и β .

5. Определяем главные центральные моменты инерции.

Для этого вычисляем осевые моменты инерции сложного сечения относительно главной оси α , наклоненной под углом α_0 к оси z_C (J_α) и относительно главной оси β , наклоненной под углом α_0 к оси y_C (J_β) по формулам пересчета моментов инерции при повороте координатных осей:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha, \\ J_{y_1} &= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно (3.7) моменты инерции J_α и J_β будут равны

$$\begin{aligned} J_\alpha &= J_{z_C} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_C} \sin^2 \alpha_0 - J_{y_C z_C} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 11516,48 \cdot \cos^2 36,75^\circ + 14087,96 \cdot \sin^2 36,75^\circ - 4342,96 \cdot \sin(2 \cdot 36,75^\circ) = \\ &= 8272,93 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\beta &= J_{z_C} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_C} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_C z_C} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 11516,48 \cdot \sin^2 36,75^\circ + 14087,96 \cdot \cos^2 36,75^\circ + 4342,96 \cdot \sin(2 \cdot 36,75^\circ) = \\ &= 17331,51 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Поскольку оказалось, что $J_\beta > J_\alpha$, следовательно ось β является главной осью v с максимальным моментом инерции, а ось α – главной осью u с минимальным моментом инерции. Обозначим эти оси на рис.5. Тогда

$$J_v = J_{\max} = J_\beta = 17331,51 \text{ см}^4, \quad J_u = J_{\min} = J_\alpha = 8272,93 \text{ см}^4.$$

6. Проверяем правильность определения главных моментов инерции.

Для этого должны выполняться два условия – сумма осевых моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей, проведенных через заданную точку, должна быть постоянной величиной:

$$J_{y_C} + J_{z_C} = J_v + J_u, \quad (3.8)$$

а главные моменты инерции должны быть равны:

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{J_{y_C} + J_{z_C}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_C} - J_{z_C})^2 + 4 \cdot J_{y_C z_C}^2}, \\ J_u &= \frac{J_{y_C} + J_{z_C}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_C} - J_{z_C})^2 + 4 \cdot J_{y_C z_C}^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно (3.8)

$$\begin{aligned} J_{y_c} + J_{z_c} &= 14087,96 + 11516,48 = 25604,44 \text{ см}^4, \\ J_v + J_u &= 17331,51 + 8272,93 = 25604,44 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

и, следовательно, проверка выполняется. Согласно (3.9)

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{14087,96 + 11516,48}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(14087,96 - 11516,48)^2 + 4 \cdot 4342,86^2} = 17331,51 \text{ см}^4, \\ J_u &= \frac{14087,96 + 11516,48}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(14087,96 - 11516,48)^2 + 4 \cdot 4342,86^2} = 8272,93 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

и проверка выполняется.

7. Определяем максимальный момент сопротивления по формуле

$$W_{\max} = \frac{J_v}{u_{\max}}, \quad (3.10)$$

где u_{\max} - расстояние до точки сложного сечения, наиболее удаленной от главной оси v . Наиболее удаленная точка определяется визуально из рис.3.5, выполненного в едином масштабе всех размеров. Для рассматриваемого сечения это точка В (рис.3.5). Если наиболее удаленную точку сразу определить невозможно, проверяются несколько точек.

Определение максимального момента сопротивления производится в следующей последовательности:

7.1. Определяем координаты наиболее удаленной точки в системе центральных осей y_c и z_c :

$$\begin{aligned} y_B &= -(y_c + h_1 - y_{01}) = -(11,43 + 9 - 2,42) = -18,01 \text{ см}, \\ z_B &= -(z_c + 0,5 \cdot b_1) = -(10,26 + 0,5 \cdot 24) = -22,26 \text{ см}. \end{aligned}$$

7.2. Определяем координаты точки В в системе главных центральных осей при помощи преобразования системы координат при повороте осей на угол α :

$$y_1 = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha, \quad z_1 = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha. \quad (3.11)$$

Поскольку ось u получена путем поворота оси z_c , для определения координаты u_B точки В воспользуемся вторым уравнением (3.11)

$$\begin{aligned} u_B &= z_B \cdot \cos \alpha_0 + y_B \cdot \sin \alpha_0 = \\ &= -22,26 \cdot \cos 36,75^\circ - 18,01 \cdot \sin 36,75^\circ = -28,61 \text{ см}. \end{aligned}$$

Расстояние до наиболее удаленной точки сечения составляет

$$u_{\max} = |u_B| = 28,61 \text{ см}.$$

7.3. Определяем W_{\max} согласно (3.10)

$$W_{\max} = \frac{17331,51}{28,61} = 605,78 \text{ см}^3.$$

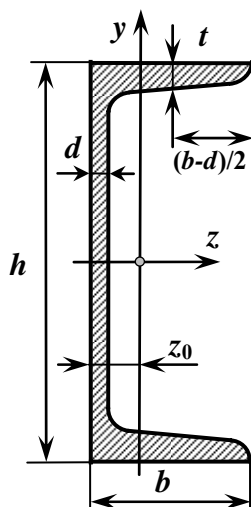
§ 3.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие сечения называются простыми? Сложными?
2. Какие сечения относятся к стандартным прокатным профилям? К сечениям простой геометрической формы?
3. Как определяется положение главных осей неравнополочного уголка? По какой формуле определяется его центробежный момент инерции?
4. Как определяется положение главных осей? Как откладывается положительное значение угла наклона главных осей α_0 ? Как находится положение главной оси с наибольшим моментом инерции?
5. Какая геометрическая характеристика плоского сечения может быть отрицательной? Почему?
6. По какой формуле определяется положение центра тяжести сложного сечения? Как выбирается наиболее рациональная вспомогательная система координат? Как определяются координаты центров тяжести простых сечений в системе центральных осей сложного сечения?
7. По какой формуле определяются моменты инерции сложного сечения? Какие особенности применения этой формулы?
8. По каким формулам пересчитываются моменты плоского сечения при параллельном переносе координатных осей? Какие особенности применения этих формул? Что такое преобразование системы координат при параллельном переносе осей?
9. Как пересчитываются моменты инерции плоского сечения при повороте координатных осей? Что такое преобразование системы координат при повороте координатных осей?
10. Какие оси называются главными осями? Центральными осями? Главными центральными осями?
11. Какими свойствами обладают главные оси? Какие существуют признаки главных осей?
12. Какие существуют соотношения между моментами инерции сечения? Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции?
13. По каким зависимостям можно определить главные центральные моменты инерции? Какие достоинства и недостатки каждой зависимости?
14. По какой формуле можно проверить правильность определения главных моментов инерции?
15. По какой формуле определяется момент сопротивления сечения? Как определяется расстояния до наиболее удаленных точек сечения?
17. Как определяются координаты точек сложного сечения при повороте координатных осей?

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ

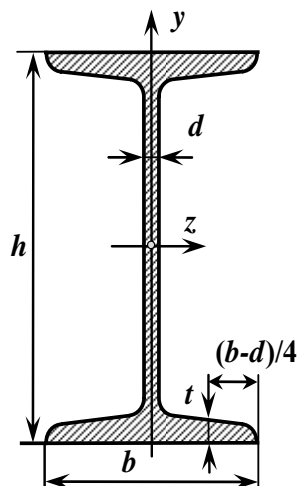
ШВЕЛЛЕРЫ

(ГОСТ 8240-86)



F – площадь поперечного сечения
 m – погонная масса
 J – момент инерции площади поперечного сечения
 W – момент сопротивления площади поперечного сечения
 S – статический момент площади половины поперечного сечения
 i – радиус инерции поперечного сечения
 h – высота профиля
 b – ширина полки
 d – толщина стенки
 t – толщина полки

№	h	b	d	t	F	m	J_z	W_z	i_z	S_z	J_y	W_y	i_y	z_0
	мм	мм	мм	мм	см ²	кг/м	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см	см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,30	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



ДВУТАВРЫ

(ГОСТ 8239-86)

F – площадь поперечного сечения

m – погонная масса

J – момент инерции площади поперечного сечения

W – момент сопротивления площади поперечного сечения

S – статический момент площади половины поперечного сечения

i – радиус инерции поперечного сечения

h – высота профиля

b – ширина полки

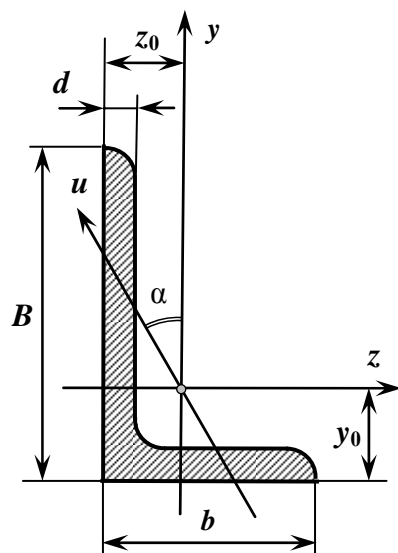
d – толщина стенки

t – толщина полки

№	h	b	d	t	F	m	J_z	W_z	i_z	S_z	J_y	W_y	i_y
	мм	мм	мм	мм	см ²	кг/м	см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,9	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,0	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,9	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,2	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

УГОЛОК НЕРАВНОПОЛОЧНЫЙ

(ГОСТ 8510-86)

 F – площадь поперечного сечения m – погонная масса J – момент инерции площади поперечного сечения W – момент сопротивления поперечного сечения u – главная ось ($J_u = J_{min}$) i – радиус инерции поперечного сечения B – ширина большей полки b – ширина меньшей полки d – толщина полки y_0, z_0 – расстояния от центра тяжести до наружных граней полки

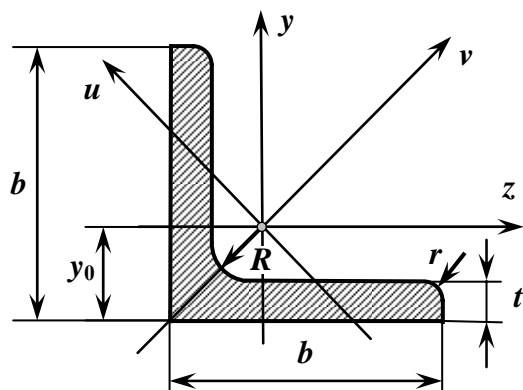
№	B	b	d	F	J_z	W_z	i_z	J_y	W_y	i_y	J_u	W_u	i_u	z_0	y_0	J_{yz}	$\operatorname{tg} \alpha$	m
	мм	мм	мм	мм ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ³	см	см	см	см ⁴		кг/м
2,5/ 1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
			4	1,86	1,61	0,82	0,93	0,50	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/ 2	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
4/ 2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,43
			4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
4/3	40	30	4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09
			5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,57
4,5/ 2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	3,68
			4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/ 3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4	3,17	7,93	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
5,6/ 3,6	56	36	4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/ 4,0	63	40	4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
6,5/ 5	65	50	5	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
			6	6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,4	0,575	5,18
			7	7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,9	0,571	5,98
			8	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,6	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,1	0,406	4,39

№	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>F</i>	<i>J_z</i>	<i>W_z</i>	<i>i_z</i>	<i>J_y</i>	<i>W_y</i>	<i>i_y</i>	<i>J_u</i>	<i>W_u</i>	<i>i_u</i>	<i>z₀</i>	<i>y₀</i>	<i>J_{yz}</i>	<i>tga</i>	<i>m</i>
7,5/ 5	75	50	5	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,0	0,436	4,79
			6	7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,23	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435	5,69
			7	8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,2	0,435	6,57
			8	9,47	52,38	10,62	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,8	0,430	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,2	0,387	4,99
			6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,5	0,386	5,92
8/6	80	60	6	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,9	0,547	6,39
			7	9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,0	0,546	7,39
			8	10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,8	0,544	8,37
9/ 5,6	90	56	5,5	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,5	0,384	6,17
			6	8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,2	0,384	6,70
			8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,3	0,380	8,77
10/ 6,3	100	63	6	9,53	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393	7,53
			7	11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392	8,70
			8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,5	0,391	9,87
			10	15,47	153,83	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,6	0,387	12,14
10/ 6,5	100	65	7	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,0	0,415	8,81
			8	12,73	138,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,6	0,414	9,99
			10	15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,2	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,8	0,402	8,98
			8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,9	0,400	10,93
12,5/ 8	125	80	7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,7	0,407	11,04
			8	15,98	255,62	30,27	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,04	84,1	0,406	12,54
			10	19,70	311,61	37,27	3,98	100,4	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102	0,404	15,47
			12	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118	0,400	18,34
14/9	140	90	8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,98	2,03	4,49	121	0,411	14,13
			10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,56	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147	0,409	17,46
16/ 10	160	100	9	22,87	605,97	56,04	5,35	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194	0,391	17,96
			10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213	0,390	19,85
			12	30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249	0,388	23,58
			14	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282	0,385	27,26
18/ 11	180	110	10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295	0,376	22,24
			12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348	0,374	26,45
20/ 12,5	200	125	11	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465	0,392	27,37
			12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503	0,392	29,74
			14	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575	0,390	34,43
			16	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643	0,388	39,07
25/ 16	250	160	12	48,30	3147,00	184,79	8,07	1032,00	82,76	4,62	604,00		3,54	3,53	7,97		0,410	37,90
			16	63,60	4091,00	242,64	8,02	1333,00	108,3	4,58	781,00		3,50	3,69	8,14		0,408	49,90
			18	71,10	4545,00	271,02	7,99	1475,00	120,6	4,56	866,00		3,49	3,77	8,23		0,407	55,80
			20	78,50	4987,00	298,80	7,97	1613,00	132,7	4,53	949,00		3,48	3,85	8,31		0,405	61,70

Данные для уголка 25/16 приведены согласно ГОСТ8510-57

УГОЛОК РАВНОПОЛОЧНЫЙ

(ГОСТ 8509-86)

 F – площадь поперечного сечения m – погонная масса J – момент инерции площади поперечного сечения W – момент сопротивления поперечного сечения u – главная ось ($J_u = J_{min}$) i – радиус инерции поперечного сечения b – ширина полки d – толщина полки y_0 – расстояния от центра тяжести до полки

№	b	t	R	r	F	J_z	W_z	i_z	J_u	i_u	J_v	W_v	i_v	J_{xy}	y_0	m
	мм	мм	мм	мм	см ²	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см	см ⁴	см ³	см	см ⁴	см	кг/м
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3			1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,43	0,59	0,76	1,46
		5			2,27	1,22	0,72	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
		8			2,78	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3,4	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3			2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		1			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	1	6	2	1,8	13,10	3,21	1,73	1,79	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25

№	b	t	R	r	F	J_z	W_z	i_z	J_u	i_u	J_v	W_v	i_v	J_{xy}	y_0	m
6	60	4	7	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
					5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58
					6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43
					9,04	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,75	7,10
					11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70
6,3	63	4			4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
					6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
					7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
					6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
					8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
					9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,40
					10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	23,20	2,02	8,47
					13,11	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29
7,5	75	5	9	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
					8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
					10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
					11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
					12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
8	80	5,5	9	3	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
					9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,14	7,36
					10,85	65,31	11,32	2,45	103,66	3,09	26,97	8,55	1,58	33,30	2,23	8,51
					12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
					15,14	88,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88
					17,90	102,74	18,42	2,40	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05
9	90	6	10	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
					12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
					13,93	106,11	16,36	2,76	163,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
					15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
					17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48
					20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96
10	100	6,5	12	4	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
					13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
					15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,93	86,30	2,75	12,25
					19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
					22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
					26,28	237,15	33,23	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63
					27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,43	24,62	1,94	145,00	3,03	21,97
					29,68	263,82	48,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30
11	110	7			15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
					17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
12	120	8			18,80	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	353,00	3,25	14,76
					23,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187,00	3,33	18,24
					27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218,00	3,41	21,67
					33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262,00	3,53	26,68

№	b	t	R	r	F	J_z	W_z	i_z	J_u	i_u	J_v	W_v	i_v	J_{xy}	y_0	m
12,5	125	8	14	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,96	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46
					22,0	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
					24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
					28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
					33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20
					37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65
14	140	9	14	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,78	19,41
					27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
					32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50
15	150	10			29,33	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374,00	4,07	23,02
					34,89	747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440,00	4,15	27,39
					43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534,00	4,27	33,82
					51,09	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621,00	4,38	40,11
16	160	10	16	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
					34,42	844,21	72,44	4,95	1340,66	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
					37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
					43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	33,97
					49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
					54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
					60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,44
					18	180	11	16	5,3	38,30	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78
42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78						7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
52,18	1607,36	123,74	5,55	2554,99						7,00	659,73	93,11	3,56	948,00	5,01	40,96
61,99	1884,07	146,36	5,51	2992,69						6,95	775,44	106,88	3,54	1108,00	5,13	48,66
68,43	2061,11	161,07	5,49	3271,31						6,91	850,92	115,71	3,53	1210,00	5,20	53,72
20	200	12	18	6	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
					50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
					54,6	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
					61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
					69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544,00	5,62	54,40
					76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
					90,78	3350,66	236,77	6,08	5313,59	7,65	1387,73	167,74	3,91	1903,00	5,85	71,26
					94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
					111,64	4019,60	288,57	6,00	5351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
					22	220	14	21	7	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56
68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37						8,53	1305,52	153,34	4,36	1862,00	6,02	53,83
25	250	16	24	8	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
					87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	3089,00	6,83	68,86
					96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
					106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
					119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
					133,12	7716,86	434,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
					141,96	8176,51	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4783,00	7,31	111,44