АЛГОРИТМЫ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАЗОВ НА БАЗЕ НЕАРХИМЕДОВЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Шибзухов З.М., Шауцукова Л.З.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, РОССИЯ
360000, КБР, г.Нальчик, ул.Шортанова 89А
e-mail: sz@zmail.ru ,

Кабардино-Балкарский государственный университет, РОССИЯ
360000, РОССИЯ, КБР, г.Нальчик, ул.Чернышевского 179
e-mail: shau@kbsu.ru

ABSTRACT

Recurrent synthesis algorithms of multy-valued polynomial and threshold polynomial neural network for modeling multivariate visual patterns are constructed. Recurrent synthesis algorithms of multy-valued neural networks, which extends neural networks of polynomial and threshold polynomial type for modeling multivariate visual patterns are constructed. Constructed algorithms allows to improve the efficiency of algebraic approach to pattern recognition and image analysis problems.

ВВЕДЕНИЕ

В алгебраическом подходе к задачам распознавания и обработки изображений используются особенности строения каждой процедуры распознавания [1]. Любой алгоритм распознавания должен по стандартному описанию $\boldsymbol{x}(\omega)=\left(x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega)\right)$ уметь определять информационный вектор $\boldsymbol{y}(\omega)=\left(y_1(\omega),\ldots,y_m(\omega)\right)$ этого объекта, т.е. вычислять значение отображения $\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(\omega)\right)$, где $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(\omega)\right)=\left(f_1\left(\boldsymbol{x}(\omega)\right),\ldots,f_m\left(\boldsymbol{x}(\omega)\right)\right)$.

Обычно это отображение представляется композицией

$$\boldsymbol{f}=\sigma\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\right)=\left(\sigma_1\left(F_1(\boldsymbol{x})\right),\ldots,\sigma_m\left(F_m(\boldsymbol{x})\right)\right),\quad \sigma(\boldsymbol{s})=\left(\sigma_1(s_1),\ldots,\sigma_m(s_m)\right),$$

где $\sigma_i(s_i)$, $i=\overline{1,m}$ — вообще говоря, многозначные функции порогового типа. Например,

$$\sigma_i(s_i)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad s_i\ge 0,\\ 0, & \text{если}\quad s_i<0;\end{cases} \tag{1}$$

$$\sigma_i(s_i)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad a<s_i<a_1,\\ 1, & \text{если}\quad a_1\le s_i<a_2\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ M_i-1, & \text{если}\quad a_{M_i-1}\le s_i<b;\end{cases} \tag{2}$$

$$\sigma_i(s_i)=\left[s_i \bmod M_i\right], \tag{3}$$

где $[z]$ обозначает целую часть числа z. Отображение $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\left(F_1(\boldsymbol{x}),\ldots,F_m(\boldsymbol{x})\right)$ – многомерное отображение, компоненты которого принимают вещественные значения.

В задачах описания изображений на каждом k-ом морфологическом (масштабном) уровне описания модель изображения характеризуется многомерным отображением $\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)=\sigma_k\left(\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)$. Различные отображения $\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x}_k)$ могут также соответствовать различным типам описания изображения (например, растровое описание, описание в терминах контуров, спектральное описание и др.)

Один из распространенных способов представления отображений $F(\boldsymbol{x})$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_0 + \sum_{j=1}^{L} \boldsymbol{w}_j \varphi_j(\boldsymbol{x}) \qquad (4)$$

где $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $j=\overline{1,L}$ – базисные функции (полиномы, сплайны, гауссовы и радиальные функции, ...), принимающие скалярные вещественные значения; $\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_j$ — вектора весовых коэф-фициентов. При этом операции сложения и умножения векторных величин рассматриваются как покомпонентные операции:

$$\left(y_1', \ldots, y_m'\right) + \left(y_1'', \ldots, y_m''\right) = \left(y_1' + y_1'', \ldots, y_m' + y_m''\right),$$
$$\left(y_1', \ldots, y_m'\right) \cdot \left(y_1'', \ldots, y_m''\right) = \left(y_1' \cdot y_1'', \ldots, y_m' \cdot y_m''\right),$$
$$c \cdot \left(y_1, \ldots, y_m\right) = \left(c \cdot y_1, \ldots, c \cdot y_m\right).$$

Каждому отображению $\boldsymbol{F}$ соответствует свой алгоритм распознавания A, который может носить эвристический характер и, возможно, решать задачу не в полном объеме [1, 2].
Для двух различных алгоритмов A_1, A_2 определяются операции $\mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2$ и $\mathsf{A}_1 \cdot \mathsf{A}_2$, которые вычисляют отображения $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})$. Для алгоритма A и вектора констант $\boldsymbol{c}$ определяется умножение $\boldsymbol{c}\cdot\mathsf{A}$, которое вычисляет отображение $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Введение алгебраических операций сложения и умножения на множестве алгоритмов $\{\mathsf{A}\}$ позволило расширить исходную совокупность алгоритмов.
На множестве алгоритмов $\{\mathsf{A}\}$ определяется их алгебраическое замыкание $\mathfrak{R}\{\mathsf{A}\}$ [1], состоящее из многочленов вида:

$$\boldsymbol{w}_0 + \sum_{j=1}^{L} \boldsymbol{w}_j \prod_{t=1}^{n_j} \mathsf{B}_{jt}, \qquad (5)$$

где $\mathsf{B}_{jt} \subseteq \{\mathsf{A}\}$. Они, соответственно, вычисляют значений многомерных отображений:

$$\boldsymbol{w}_0 + \sum_{j=1}^{L} \boldsymbol{w}_j \prod_{t=1}^{n_j} \boldsymbol{F}_{jt}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{F}_{jt} \subseteq \{\boldsymbol{F}\}$, множество $\{\boldsymbol{F}\}$ однозначно соответствует $\{\mathsf{A}\}$.
Введение расширения $\mathfrak{R}\{\mathsf{A}\}$ позволяет строить алгоритмы распознавания или анализа образов в случаях, когда в семействе $\{\mathsf{A}\}$ нет алгоритмов, которые бы правильно решали задачу. При этом достаточно, чтобы исходная обучающая информация и описания объектов, удовлетворяли некоторым легко проверяемым условиям. В этом случае алгоритм строится в явном виде [2, 3].

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ С НАИБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ

Обычно значения y_i и входные значения x_j принадлежат некоторому определенному диапазону числовых значений. Реализация систем распознавания и обработки изображений также сталкивается с ограничением диапазона обрабатываемых величин. Вычисления с вещественными полиномиальными представлениями для функций $F_i(\boldsymbol{x})$ и полиномов вида (6) сталкиваются с очень большими числовыми значениями на промежуточных этапах вычислений. В связи с этим необходимо использовать такие способы представления образов и их свойств, которые основаны на оперировании величинами из заданного диапазона (или диапазонов), предполагая при этом, что все используемые операции не выводят обрабатываемые величины (в том числе промежуточные) за пределы установленных границ.
Предположим для определенности, что все величины находятся в вещественном диапазоне $\mathsf{I}=(-C,C)$. Для наделения множества I арифметическими свойствами в [5] вводится взаимно-однозначное отображение $\mu{:}\mathsf{I} \to \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}$ – множество вещественных чисел), а арифметические операции определяются следующим образом:

$x \underset{\mu}{+} y = \mu^{-1}(\mu(x)+ \mu(y))$, $\qquad x \underset{\mu}{-} y = \mu^{-1}(\mu(x)- \mu(y))$,

$x \underset{\mu}{\times} y = \mu^{-1}(\mu(x)\cdot\mu(y))$, $x \underset{\mu}{/} y = \mu^{-1}(\mu(x)/\ \mu(y))$.

Величины $\mu^{-1}(0)$ и $\mu^{-1}(1)$$ выполняют в I роль нуля и единицы, но, как правило, C>1 и $\mu(x)$ выбирается таким образом, чтобы $\mu(0)=0$ и $\mu(1)=1$. Определенные арифметические операции $\underset{\mu}{+}$, $\underset{\mu}{-}$, $\underset{\mu}{\times}$, $\underset{\mu}{/}$ делают I алгебраическим полем. Если функция μ является монотонно возрастающей, то I становится линейно упорядоченным полем. В [5] введено алгебраическое исчисление, построенное на базе функции μ, которое будем называть μ-АИ.

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим теперь задача обучения нейронных сетей (НС) для представления моделей визуальных образов в алгебраических исчислениях с наибольшим числом. На вход НС поступают значения признаков $x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega)$ объекта-образа ω из множества объектов Ω. На выходе НС выдает значение функции $y(\omega)=F(x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega))$, сопоставляющей каждому объекту-образу $\omega\in\Omega$ искомую его характеристику, $y(\omega)$ может принимать целочисленные значения из набора $\{0,1,\ldots,m-1\}$ или вещественные значения.

Рассматриваемые НС содержат три слоя:

– слой ϕ-элементов, вычисляющих значения скалярной функции

$$v_j=\phi(x_{\iota(j)}-d_j),\ j=1,\ldots,L,$$

где L – число элементов, $\iota(j)$ — индекс входного признака;

– слой полиномиальных П-элементов, вычисляющих значения произведений вида:

$$u_k=v_{\iota(k,1)} \underset{\mu}{\times} \cdots \underset{\mu}{\times} v_{\iota(k,Nk)},$$

где $\iota(k,t)$ – номер t-го входного сигнала k-го элемента из предыдущего слоя, $k=1,\ldots,N$, N – число элементов в слое;

– слой из одного линейного Σ-элемента, вычисляющего линейное выражение

$$z = u_0 \underset{\mu}{+} w_1 \underset{\mu}{\times} u_1 \underset{\mu}{+} \ldots \underset{\mu}{+} w_N \underset{\mu}{\times} u_N,$$

где $w_1, \ldots, w_N$ – весовые коэффициенты.

Все арифметические операции интерпретируются в алгебраическом исчислении с наибольшим числом, задаваемом аксиомой-функцией μ: $(-C,C) \to \mathbf{R}$, где $(-C, C)$ – интервал изменения величин, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел.

Три слоя НС в совокупности реализуют полином от элементарных скалярных функций ϕ от любой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ в алгебраическом исчислении с аксиомой μ (в обычном алгебраическом исчислении это может быть не полиномиальная функция). Выходное значение НС формирует элемент, реализующий функцию выхода $y=\sigma(z)$.

Особенность выбора элементарной функции ϕ состоит в том, чтобы она была неотрицательной функцией и на своей области определения (включающей множества значений признаков) удовлетворяла следующему требованию:

$$\forall x_1,x_2 \exists d\ \phi(x_1-d)=0 \text{ и } \phi(x_2-d)\neq 0.$$

Приведем примеры таких функций:

$\phi(x) = x$ $\phi(x) = \operatorname{sgn} x$ $\phi(x) = |x|^p \operatorname{sgn} x$

$\phi(x) = 1-e^{-ax}$ $\phi(x) = \operatorname{sgn} x(1-e^{-ax})$ $\phi(x) = \operatorname{sgn} x|x|^p e^{-ax}$

$\phi(x) = \sin qx$ $\phi(x) = \operatorname{sgn} x \sin qx$ $\phi(x) = \operatorname{sgn} x\,|x|^p \sin qx$

где $p,q,a>0$, $\operatorname{sgn} x$ — пороговая функция, равная 1, если $x>0$ и 0 в противном случае.

В случае, когда характеристика y объекта-образа принимает целочисленные значения, в качестве функции выхода выступает функция $\operatorname{sgn} z$ или ее многозначный вариант: $\operatorname{sgn}(z-z_1)+\ldots+\operatorname{sgn}(z-z_{m-1})$, который принимает уже значения $0,1,\ldots,m-1$ в зависимости от того, в какой из промежутков $(-C,z_1]$, $(z_1, z_2]$, ..., (z_{m-1},C) попадет число z.

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z\in(-C, z_1] \\ 1, & \text{если} \quad z\in(z_1, z_2] \\ \dots & \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ m-2, & \text{если} \quad z\in(z_{m-2}, z_{m-1}] \\ m-1, & \text{если} \quad z\in(z_{m-1}, +C) \end{cases}$$

В случае, когда y принимает вещественные значения, будем считать, что $\sigma(z)\equiv 1$.

Обучение НС осуществляется по обучающему множеству, составленному из пар $< y(\omega^0),(x_1(\omega^0),\dots,x_n(\omega^0))>$ на некотором обучающем множестве объектов Ω^0.

Обучение НС сводится к задаче построения полинома от элементарных функций вида:

$$P(\mathbf{x})= w_0 \underset{\mu}{+} w_1 \underset{\mu}{\times} \phi(x_{\iota(1,1)}-d_{11}) \underset{\mu}{\times} \dots \underset{\mu}{\times} \phi(x_{\iota(1,n(1))}-d_{1n(1)}) \underset{\mu}{+} \dots \underset{\mu}{+} w \underset{\mu}{\times} \phi(x_{\iota(N,1)}-d_{N1}) \underset{\mu}{\times} \dots \underset{\mu}{\times} \phi(x_{\iota(N,n(N))}-d_{Nn(1)}),$$

для которого на некотором обучающем множестве входных значений переменных $x_1,\dots,x_n$ заданы множества, в которые попадают значения полинома ($1\le\iota(j,t)\le n$, $n(j)$ – количество сомножителей в j-ом слагаемом). Так в случае, когда y принимает целочисленные значения, значению 0 сопоставляется промежуток $(-C,z_1]$, значению 1 – $(z_1,z_2]$, ..., значению $m-2$ – $(z_{m-2},z_{m-1}]$, значению $m-1$ – $(z_{m-1},+C)$.

Задача построения НС сводится к задаче построения полинома $P(\mathbf{x})$ в алгебраическом исчислении с аксиомой μ, значения которого на обучающей выборке попадают в известные промежутки.

Особенность выбора элементарной функции позволяет упорядочить пары обучающей выборки по $\mathbf{x}$ в лексикографическом порядке таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\forall i<j \ \Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)=0 \quad \text{и} \quad \Phi(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j)\neq 0,$$

где $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{d})= \phi(x_1-d_1) \underset{\mu}{\times} \dots \underset{\mu}{\times} \phi(x_n-d_n)$. В этом случае можно применить процедуру рекуррентного обучения полинома:

$$P_0(\mathbf{x}) \equiv 0$$

$$P_k(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} P_{k-1}(\mathbf{x}), & \text{если} \quad \sigma(P_{k-1}(\mathbf{x}_k)) = \sigma(P(\mathbf{x}_k)), \\ & \\ P_{k-1}(\mathbf{x}) \underset{\mu}{+} w_k \underset{\mu}{\times} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k), & \text{если} \quad \sigma(P_{k-1}(\mathbf{x}_k)) \neq \sigma(P(\mathbf{x}_k)), \end{cases}$$

$$w_k = (Y_k \underset{\mu}{-} P_{k-1}(\mathbf{x}_k)) \underset{\mu}{\times} (\Phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k))^{-1},$$

где $k=1,2,\dots,N$, Y_k – любое число из множества $\sigma^{-1}(P(\mathbf{x}_k))$, в который попадает $P(\mathbf{x}_k)$, все арифметические операции вычисляются и интерпретируются в поле $\mathbf{R}_C$.

После N шагов получаем искомый полином $P(\mathbf{x}) \equiv P_N(\mathbf{x})$, по которому однозначно восстанавливается архитектура и веса синтезируемой НС.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№98-01-00851).

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б. Распознавание образов и анализ изображений. — В кн: Искусственный интеллект. Т.2. Кн.2. Модели и методы. М.: Радио и связь. 1990.
2. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации // Проблемы кибернетики. -- М.: Наука, 1978. — Вып.33. С.5-68.
3. Журавлев Ю.И., Зенкин А.И., Исаев И.В., Кольцов П.П., Кочетков Л.В., Рязанов В.В. Задачи распознавания и классификации со стандартной обучающей информацией // Журнал вычислительной математики и математической физики. —1980.Т.20.,№5.С.294-1309.
4. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н., Шейко Т.И. Исчисления с наибольшим числом. // Кибернетика и системный анализ. 1995. №С.71-86.
5. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.