ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ СИСТЕМНОЙ МЕТОДОЛОГИИ

Шаповал А.Н.

Институт прикладного системного анализа НТУУ “КПИ”
Киев, проспект Победы, 37 e-mail: an_shapoval@hotmail.com

Во многих технических, экономических, социальных дисциплинах встречаются задачи восстановления функциональных зависимостей между регулируемыми параметрами и значениями величин, полученными в результате наблюдений, экспериментов, опроса мнений экспертов и т.п. Чаще всего это происходит при решении задач проектирования, диагностики, прогнозирования. Вопросы построения целевых функций, позволяющих описать определенные закономерности на основе имеющихся баз данных, изложены в [1-3].
В данной работе предлагается реализация метода построения целевых функций с учетом неопределенностей разной природы, в частности, целевой, взаимодействия /или противодействия партнеров /или конкурентов и ситуационной неопределенности [4].

Пусть m целевых функций зависят от переменных x_1, x_2, α: $F_i = f_i(x_1, x_2, \alpha)$; $i=1\ldots m$.
Вид этих функций неизвестен, они учитывают 3 вида неопределенности: цели (x_1), взаимодействия (x_2) и ситуационную неопределенность (α). Переменные определяются следующим образом:

$$x_1 = \{x_{1j1} \mid j_1 \in N_1\};\ N_1=1\ldots n_1;\ x_1 \in D_1;$$
$$x_2 = \{x_{2j2} \mid j_2 \in N_2\};\ N_2=1\ldots n_2;\ x_2 \in D_2;$$
$$\alpha = \{\alpha_{j3} \mid j_3 \in N_3\};\ N_3=1\ldots n_3;\ \alpha \in D_3$$
$$D_1 = \{D_{1j1} \mid j_1 \in N_1\};\ D_{1j1} = \{\, x_{1j1} \mid d^-_{1j1} \le x_{1j1} \le d^+_{1j1} \,\};$$
$$D_2 = \{D_{2j2} \mid j_2 \in N_2\};\ D_{2j2} = \{\, x_{2j2} \mid d^-_{2j2} \le x_{2j2} \le d^+_{2j2} \,\};$$
$$D_3 = \{D_{3j3} \mid j_3 \in N_3\};\ D_{3j3} = \{\, \alpha_{j3} \mid d^-_{3j3} \le \alpha_{j3} \le d^+_{3j3} \,\};$$

Численные значения переменных (x_1, x_2, α) и целевых функций задаются в виде совокупности массивов.
Например,

q	x_{11} [q]	x_{12} [q]	x_{21} [q]	x_{22} [q]	α_1 [q]	α_2 [q]	Y_1[q]
1	1,5	2,5	0,5	3,53	2,5	0,7	3,53
2	3	2,0	0,7	5,16	1	0,8	3,16
…	…	…	…	…	…	…	…
n	0,3	0,2	0,07	3,51	0,2	0,9	3,51

q	x_{11} [q]	x_{12} [q]	x_{21} [q]	x_{22} [q]	α_1 [q]	α_2 [q]	Y_1[q]
1	1,5	2,5	0,5	3,53	2,5	0,7	1,53
2	3	2,0	0,7	5,16	1	0,8	1,16
…	…	…	…	…	…	…	…
n	0,3	0,2	0,07	3,51	0,2	0,9	1,51

q	x_{11} [q]	x_{12} [q]	x_{21} [q]	x_{22} [q]	α_1 [q]	α_2 [q]	Y_1[q]
1	1,5	2,5	0,5	3,53	2,5	0,7	2,53
2	3	2,0	0,7	5,16	1	0,8	2,16
…	…	…	…	…	…	…	…
n	0,3	0,2	0,07	3,51	0,2	0,9	2,51

Количество таблиц равно числу целевых функций, а значения x_1, x_2, α во всех таблицах одинаковы.

Векторы x_1, x_2, α могут рассматриваться как определенные значения регулируемых параметров в технических или экономических системах, а Y – значения некоторых зависимых показателей, полученные путем наблюдений, экспериментов или опроса мнения экспертов и т.п. , q – номер выборки.

Для каждой из целевых функций F_i определяется вид аппроксимирующей функции Φ_i.

Предлагается в качестве аппроксимирующих взять аддитивные функции вида

$$\Phi_i\,(x_1, x_2, \alpha) = C_{1i}\Phi_{1i}(x_1) + C_{2i}\Phi_{2i}(x_2) + C_{3i}\Phi_{3i}(\alpha).$$

Функции $\Phi_{1i}(x_1)$, $\Phi_{2i}(x_2)$ и $\Phi_{3i}(\alpha)$ раскладываем по компонентам векторов x_1, x_2, α соответственно в аналогичном аддитивном виде

$$\Phi_{1i}(x_1) = \sum_{j1=1}^{n_1} a^{(i)}{}_{1j1}\Psi_{1j1}(x_{1j1})\,;\quad \Phi_{2i}(x_2) = \sum_{j2=1}^{n_2} a^{(i)}{}_{2j2}\Psi_{2j2}(x_{2j2})\,;\quad \Phi_{3i}(\alpha) = \sum_{j3=1}^{n_3} a^{(i)}{}_{3j3}\Psi_{3j3}(\alpha_{j3})$$

Функции Ψ_{1j1} выбираются одинаковыми для всех функций Φ_i в форме разложения по смещенным полиномам Чебышева, которые имеют вид [5]:

$T_k^*(x) = T_k(2x-1)$ (рекуррентная формула)

$T_0^*=0{,}5$

Получим:

$T_1^*\,(x) = -1+2x$

$T_2^*\,(x) = 1-8x+8x^2$

$T_3^*\,(x) = -1+18x-48x^2+32x^3$

$T_4^*\,(x) = 1-32x+160x^2-256x^3+128x^4$

$T_5^*\,(x) = -1+50x-400x^2+1120x^3-1280x^4+512x^5$

$T_6^*\,(x) = 1-72x+840x^2-3584x^3+6912x^4-6144x^5+2048x^6$

Во многих практических задачах целесообразно производить нормирование всех исходных величин (особенно разнопорядковых) к интервалу

[0; 1]. Для этого используем минимальные и максимальные значения каждой из переменных:

$$\tilde{x}_{1j1} = \frac{x_{1j1} - d^-_{1j1}}{d^+_{1j1} - d^-_{1j1}};\quad \tilde{x}_{1j1} \in [0,1];\quad x_{1j1} \in D_{1j1.}$$

$$\tilde{x}_{2j2} = \frac{x_{2j2} - d^-_{2j2}}{d^+_{2j2} - d^-_{2j2}};\quad \tilde{x}_{2j2} \in [0,1];\quad x_{2j2} \in D_{2j2.}$$

$$\tilde{\alpha}_{j3} = \frac{\alpha_{j3} - d^-_{3j3}}{d^+_{3j3} - d^-_{3j3}};\quad \tilde{\alpha}_{j3} \in [0,1];\quad \alpha_{j3} \in D_{3j3.}$$

Функции Ψ_{1j1} выбираются в виде:

$$\Psi_{1j1}(\tilde{x}_{1j1}) = \sum_{p1=0}^{P1} b_{1j1p1}T^*{}_{p1}(\tilde{x}_{1j1})$$

Аналогично функции Ψ_{2j2}, Ψ_{3j3}:

$$\Psi_{2j2}(\tilde{x}_{2j2}) = \sum_{p2=0}^{P2} b_{2j2p2}T^*{}_{p2}(\tilde{x}_{2j2});\quad \Psi_{3j3}(\tilde{\alpha}_{j3}) = \sum_{p3=0}^{P3} b_{3j3p3}T^*{}_{p3}(\tilde{\alpha}_{j3})$$

Теперь определяем коэффициенты при полиномах Чебышева – матрицы ||b||.

Находим средневзвешенное значение функций Y_i (здесь и далее по тексту значения нормированные).

$$\tilde{Y}_{cp} = \sum_{i=1}^{m} w_i \tilde{Y}_i, \quad \forall i\, w_i \in [0;1], \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

На практике чаще всего встречается случай равных весов $w_i = 1/m$ – среднее арифметическое. В общем случае для определения ||b|| имеем несовместную систему уравнений:

$$\tilde{Y}_{cp}(q) = \sum_{j1=1}^{n_1} \sum_{p1=0}^{P1} b_{1j1p1} T^*{}_{p1}(\tilde{x}_{1j1}[q]) +$$

$$\sum_{j2=1}^{n_2} \sum_{p2=0}^{P2} b_{2j2p2} T^*{}_{p2}(\tilde{x}_{2j2}[q]) + \sum_{j3=1}^{n_3} \sum_{p3=0}^{P3} b_{3j3p3} T^*{}_{p3}(\tilde{\alpha}_{j3}[q])$$

Здесь $q=1\ldots n$; n - число уравнений; число неизвестных: $n_1(P_1+1)+ n_2(P_2+1)+ n_3(P_3+1)$, где n_1, n_2, n_3 – размерности векторов x_1, x_2, α

P_1, P_2, P_3 – порядок (заданная максимальная степень для расчетов) смещенных полиномов Чебышева.

После определения матриц ||b|| (одним из методов решения несовместных систем уравнений, например, наименьших квадратов или симплекс-методом [6,7]) вычисляются значения функций Ψ:

$$\Psi_{1j1}(\tilde{x}_{1j1}[q]) = \sum_{p1=0}^{P1} b_{1j1p1} T^*{}_{p1}(\tilde{x}_{1j1}[q])$$

$$\Psi_{2j2}(\tilde{x}_{2j2}[q]) = \sum_{p2=0}^{P2} b_{2j2p2} T^*{}_{p2}(\tilde{x}_{2j2}[q])$$

$$\Psi_{3j3}(\tilde{\alpha}_{j3}[q]) = \sum_{p3=0}^{P3} b_{3j3p3} T^*{}_{p3}(\tilde{\alpha}_{j3}[q])$$

Матрицы ||a|| определяются для каждой i-ой функции отдельно

$$\tilde{Y}_i(q) = \sum_{j1=1}^{n_1} a^{(i)}{}_{1j1} \Psi_{1j1}(\tilde{x}_{1j1}[q]) \quad \tilde{Y}_i(q) = \sum_{j2=1}^{n_2} a^{(i)}{}_{2j2} \Psi_{2j2}(\tilde{x}_{2j2}[q]) \quad \tilde{Y}_i(q) = \sum_{j3=1}^{n_3} a^{(i)}{}_{3j3} \Psi_{3j3}(\tilde{\alpha}_{j3}[q])$$

$q=1\ldots n$ для всех трех несовместных систем уравнений, а число неизвестных определяется размерностями векторов x_1, x_2, α.

В левой части этих уравнений – [нормированные] табличные значения $Y_i(q)$.

После нахождения ||a|| вычисляются значения следующих функций

$$\Phi_{1i}(\tilde{x}_1[q]) = \sum_{j1=1}^{n_1} a^{(i)}{}_{1j1} \Psi_{1j1}(\tilde{x}_{1j1}[q]) \quad \Phi_{2i}(\tilde{x}_2[q]) = \sum_{j2=1}^{n_2} a^{(i)}{}_{2j2} \Psi_{2j2}(\tilde{x}_{2j2}[q])$$

$$\Phi_{3i}(\tilde{\alpha}[q]) = \sum_{j3=1}^{n_3} a^{(i)}{}_{3j3} \Psi_{3j3}(\tilde{\alpha}_{j3}[q])$$

Функции Ψ для разных целевых функций остаются одинаковыми (в последних формулах отсутствует зависимость от i).

И, наконец, уточняется вклад каждой функции Φ_{1i}, Φ_{2i}, Φ_{3i} в функции Φ_i:

$$\Phi_i(x_1, x_2, \alpha) = C_{1i}\Phi_{1i}(x_1) + C_{2i}\Phi_{2i}(x_2) + C_{3i}\Phi_{3i}(\alpha).$$

Матрицы ||c|| определяются для каждой i-ой функции отдельно.

Как и при определении ||a||, в левой части уравнений берутся [нормированные] табличные значения $Y_i(q)$.

$$\tilde{Y}_i(q) = C_{1i}\Phi_{1i}(\tilde{x}_1[q]) + C_{2i}\Phi_{2i}(\tilde{x}_2[q]) + C_{3i}\Phi_{3i}(\tilde{\alpha}[q])$$

В каждой из i несовместных систем уравнений будут три неизвестных коэффициента C и n уравнений.

Пример.

q	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	α_1	α_2	Y_1	Y_2	Y_3
1	0	1	0,4	0	1	0	0,5	0,16	0,12	0,18
2	0,1	0,9	0,3	0,1	0,9	0,1	0,6	0,2	0,2	0,2
3	0,2	0,8	0,2	0,2	0,8	0,2	0,7	0,24	0,28	0,22
4	0,3	0,7	0,1	0,3	0,7	0,3	0,8	0,28	0,36	0,24
5	0,4	0,6	0	0,4	0,6	0,4	0,9	0,32	0,44	0,26
6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,6	1	0,4
7	0,6	0,4	0,6	0,6	0,4	0,6	0,4	0,86	1,52	0,53
8	0,7	0,3	0,7	0,7	0,3	0,7	0,3	1,02	1,84	0,61
9	0,8	0,2	0,8	0,8	0,2	0,8	0,2	1,18	2,16	0,69
10	0,9	0,1	0,9	0,9	0,1	0,9	0,1	1,34	2,48	0,77
11	1	0,6	0	0,7	0,4	0,3	0,5	0,72	1,24	0,46
12	0,9	0,7	0,1	0,8	0,3	0,4	0,6	0,82	1,44	0,51
13	0,8	0,8	0,2	0,9	0,2	0,5	0,7	0,92	1,64	0,56
14	0,7	0,9	0,3	1	0,1	0,6	0,8	1,02	1,84	0,61
15	0,6	0,3	0,4	0,3	1	0,7	0,9	0,48	0,76	0,34
16	0,5	0,8	0,5	0,7	0,2	0,8	1	0,88	1,56	0,54
17	0,4	0,1	0,6	0,4	0,8	0,9	0,2	0,73	1,26	0,465
18	0,3	0	0,7	0,5	0,6	1	0,4	0,78	1,36	0,49
19	0,2	1	0,8	0,2	0,9	0,1	0,7	0,48	0,76	0,34
20	0,1	0,2	0,9	0,1	0,7	0,3	0,6	0,38	0,56	0,29
21	0	0,4	1	0	0,5	0,2	0,6	0,37	0,54	0,285
22	0,1	0,5	1	0,9	0,3	0,8	0,2	1,15	2,1	0,675

При равных весах функций Y_i и степенях полинома Чебышева $P_1=2$, $P_2=2$, $P_3=2$ при привлечении для решения несовместных систем уравнений на каждом из этапов табличного симплекс-метода получаем результат:

Φ_1	Φ_2	Φ_3
0,132577	0,125993	0,15137
0,173618	0,202031	0,174265
0,225068	0,296648	0,203133
0,286926	0,409843	0,237974
0,359192	0,541616	0,278789
0,640468	1,101065	0,421948
0,799752	1,40636	0,506833
0,969443	1,730235	0,597691
1,149543	2,072687	0,694522
1,34005	2,433718	0,797327
0,768962	1,312866	0,50611
0,862316	1,507879	0,546745
0,966078	1,72147	0,593353
1,080248	1,95364	0,645935
0,540248	0,87364	0,38611
0,86981	1,532583	0,543853
0,678544	1,14636	0,453071
0,795004	1,374065	0,510698
0,431718	0,719888	0,304294
0,370528	0,609896	0,268993
0,318547	0,516543	0,23889
1,089752	2,017195	0,62889

При этом

b_{110}	b_{111}	b_{112}	b_{120}	b_{121}	b_{122}	b_{130}	b_{131}	b_{132}
1,58417	0,174504	0	0	0	0	0	0,265873	0,001405
b_{210}	b_{211}	b_{212}	b_{220}	b_{221}	b_{222}			
0	0,441964	0,03249	0	0	0			
b_{310}	b_{311}	b_{312}	b_{320}	b_{321}	b_{322}			
0	0,080159	0,039021	0	0	0			

Ψ_{11}	Ψ_{12}	Ψ_{13}	Ψ_{21}	Ψ_{22}	Ψ_{31}	Ψ_{32}
0,617581	0	-0,05447	-0,40947	0	-0,04114	0
0,652482	0	-0,1073	-0,34447	0	-0,0532	0
0,687383	0	-0,15992	-0,27428	0	-0,05902	0
0,722283	0	-0,2123	-0,19888	0	-0,0586	0
0,757184	0	-0,26447	-0,11828	0	-0,05193	0
0,792085	0	-0,00141	-0,03249	0	-0,03902	0
0,826986	0	0,051882	0,058502	0	-0,01987	0
0,861887	0	0,105394	0,154692	0	0,005529	0
0,896787	0	0,15913	0,256081	0	0,037169	0
0,931688	0	0,213092	0,362668	0	0,075053	0
0,966589	0	-0,26447	0,154692	0	-0,0586	0
0,931688	0	-0,2123	0,256081	0	-0,05193	0
0,896787	0	-0,15992	0,362668	0	-0,03902	0
0,861887	0	-0,1073	0,474454	0	-0,01987	0
0,826986	0	-0,05447	-0,19888	0	0,005529	0
0,792085	0	-0,00141	0,154692	0	0,037169	0
0,757184	0	0,051882	-0,11828	0	0,075053	0
0,722283	0	0,105394	-0,03249	0	0,11918	0
0,687383	0	0,15913	-0,27428	0	-0,0532	0
0,652482	0	0,213092	-0,34447	0	-0,0586	0
0,617581	0	0,267278	-0,40947	0	-0,05902	0
0,652482	0	0,267278	0,362668	0	0,037169	0

$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$
0,922081	0	0,652689	1,25625	0	3,37124	0
$a_{11}^{(2)}$	$a_{12}^{(2)}$	$a_{13}^{(2)}$	$a_{21}^{(2)}$	$a_{22}^{(2)}$	$a_{31}^{(2)}$	$a_{32}^{(2)}$
1,54456	0	1,30538	2,51249	0	6,74247	0
$a_{11}^{(3)}$	$a_{12}^{(3)}$	$a_{13}^{(3)}$	$a_{21}^{(3)}$	$a_{22}^{(3)}$	$a_{31}^{(3)}$	$a_{32}^{(3)}$
0,618513	0	0,326344	0,628123	0	1,68562	0

Φ_{11}	Φ_{21}	Φ_{31}	Φ_{12}	Φ_{22}	Φ_{32}	Φ_{13}	Φ_{23}	Φ_{33}
0,533909	-0,5144	-0,13868	0,88279	-1,0288	-0,27737	0,364207	-0,2572	-0,06934
0,531604	-0,43275	-0,17935	0,867724	-0,86549	-0,35871	0,36855	-0,21637	-0,08968
0,529446	-0,34456	-0,19897	0,852951	-0,68911	-0,39795	0,372967	-0,17228	-0,09949
0,527435	-0,24984	-0,19755	0,838472	-0,49968	-0,39509	0,377457	-0,12492	-0,09877
0,52557	-0,14859	-0,17507	0,824286	-0,29719	-0,35014	0,382021	-0,0743	-0,08754
0,729449	-0,04082	-0,13155	1,221588	-0,08163	-0,2631	0,489456	-0,02041	-0,06577
0,79641	0,073493	-0,06698	1,345054	0,146985	-0,13396	0,528433	0,036746	-0,03349
0,863518	0,194332	0,01864	1,468814	0,388663	0,03728	0,567483	0,097166	0,00932
0,930773	0,321702	0,125307	1,592867	0,643401	0,250613	0,606606	0,16085	0,062653
0,998175	0,455602	0,253021	1,717214	0,911201	0,506042	0,645803	0,2278	0,126511
0,718658	0,194332	-0,19755	1,147724	0,388663	-0,39509	0,51154	0,097166	-0,09877
0,720523	0,321702	-0,17507	1,16191	0,643401	-0,35014	0,506977	0,16085	-0,08754
0,722534	0,455602	-0,13155	1,176389	0,911201	-0,2631	0,502487	0,2278	-0,06577
0,724693	0,596033	-0,06698	1,191162	1,192061	-0,13396	0,49807	0,298016	-0,03349

0,726997	-0,24984	0,01864	1,206228	-0,49968	0,03728	0,493726	-0,12492	0,00932
0,729449	0,194332	0,125307	1,221588	0,388663	0,250613	0,489456	0,097166	0,062653
0,732048	-0,14859	0,253021	1,237242	-0,29719	0,506042	0,48526	-0,0743	0,126511
0,734793	-0,04082	0,401784	1,253189	-0,08163	0,803567	0,481136	-0,02041	0,200892
0,737685	-0,34456	-0,17935	1,269429	-0,68911	-0,35871	0,477086	-0,17228	-0,08968
0,740724	-0,43275	-0,19755	1,285963	-0,86549	-0,39509	0,47311	-0,21637	-0,09877
0,743909	-0,5144	-0,19897	1,302791	-1,0288	-0,39795	0,469207	-0,2572	-0,09949
0,776091	0,455602	0,125307	1,356697	0,911201	0,250613	0,490793	0,2278	0,062653

c_{11}	c_{21}	c_{31}	c_{12}	c_{22}	c_{32}	c_{13}	c_{23}	c_{33}
0,96598	0,669374	0,280076	0,994897	0,670178	0,226464	0,937471	0,641357	0,362063

$\Phi_1=0{,}310866*x_{11}+0{,}007087*x_{13}^2+0{,}328171*x_{13}+0{,}218567*x_{21}^2$
$+0{,}524729*x_{21}+0{,}29475*\alpha_1^2-0{,}14338*\alpha_1+0{,}000174$

$\Phi_2=0{,}536313*x_{11}+0{,}014598*x_{13}^2+0{,}675991*x_{13}+0{,}437657*x_{21}^2$
$+1{,}050714*x_{21}+0{,}476658*\alpha_1^2-0{,}23186*\alpha_1-0{,}14674$

$\Phi_3=0{,}202368*x_{11}+0{,}003439*x_{13}^2+0{,}159243*x_{13}+0{,}104709*x_{21}^2$
$+0{,}251382*x_{21}+0{,}190516*\alpha_1^2-0{,}09267*\alpha_1+0{,}087123$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1981
2. Васильев В.И., Суровцев И.В. Индуктивные методы обнаружения закономерностей, основанные на теории редукции.// Управляющие системы и машины.-1998. - №5. - С.3-13.
3. Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б. Методы и средства преобразования и обработки информации в задачах распознавания образов и анализа изображений. //В кн. Параллельная обработка информации. - К.: Наук. Думка, 1990. Т. 5. -С. 218-318.
4. Панкратова Н.Д. Формирование целевых функций в системной задаче концептуальной неопределенности. // Доповіді НАНУ. -2000. -№ 9.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961
6. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища школа, 3-е изд., 1988