МЕТОДЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА В РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ

Чернов В.М.

Институт систем обработки изображений РАН, Россия
443001, Самара, ул. Молодогвадейская, 151
e-mail: vche@smr.ru

ABSTRACT

A stability of decision rules is analyzed in this paper from points of view of Diophant approximations and nonstandard analysis theory.

ВВЕДЕНИЕ

Неформальная постановка исследуемой в докладе проблемы: в какой степени теория распознавания образов является "*точной*" и в какой "*аппроксимационной*" теорией? В более строгой формулировке основная проблема выглядит следующим образом.

Основная проблема. Пусть X и Y два "произвольных" непересекающихся подмножества пространства $\mathbf{V} = \mathbf{R}^\mathbf{n}$ (классы объектов); функция $F(\nu)$ *разделяет классы*:

$$F(\nu) > 0 \text{ при } \nu \in X \text{ и } F(\nu) < 0 \text{ при } \nu \in Y. \quad (1)$$

Существуют ли расширения $\mathbf{R}^* \supset \mathbf{R}$, $\mathbf{V}^* = (\mathbf{R}^*)^\mathbf{n} \supset \mathbf{V}$, подмножества $X^*, Y^* \subset \mathbf{R}^*$ ($X^* \supset X$, $Y^* \supset Y$) и способ продолжения $F(\nu) \to F^*(\nu^*)$ "любых" функций на пространство $\mathbf{V}^*$, такие, что если $F(\nu)$ разделяет множества X и Y в пространстве $\mathbf{V}$, то $F^*(\nu^*)$ разделяет X^* и Y^* в пространстве $\mathbf{V}^*$?

В докладе рассматриваются два аспекта сформулированной проблемы: *метрический* и *"глобальный"*. В первом случае исследуется вопрос: *на сколько* можно "пошевелить" множества X и Y (то есть найти $X^* \supset X$, $Y^* \supset Y$ и *метрические* связи между этими множествами), чтобы *полиномиальные* функции $F(\nu)$ из некоторого *конечного* множества попрежнему разделяли классы X^*, Y^*? Во втором случае исследуется вопрос о возможности построения расширения $\mathbf{V}^* = (\mathbf{R}^*)^\mathbf{n} \supset \mathbf{V}$ и способа продолжения $F(\nu) \to F^*(\nu^*)$ *бесконечного* множества разделяющих функций $F(\nu)$ на пространство $\mathbf{V}^*$. В соответствии с этими задачами, термин "нестандартный анализ" понимается также двояко. В первом случае задача исследуется с точки зрения известных фактов диофантового анализа (теории диофантовых приближений), не относящегося к "стандартным", общеизвестным математическим средствам решения задач информатики. Во втором случае термин "нестандартный анализ" понимается формальном смысле как принятое название специфической математической теории [1], [2].

ДИОФАНТОВЫ ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Основные определения и обозначения. В работе приняты следующие обозначения: $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел; $\mathbf{R}$ – поле действительных чисел; $E_\mathbf{Q}$, $E_\mathbf{R}$ – открытые n-мерные единичные кубы в $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$, соответственно; $E_\mathbf{Q}(q) \subset E_\mathbf{Q}$:

$$E_\mathbf{Q}(q) = \left\{ \mathbf{r} \in E_\mathbf{Q} : \mathbf{r} = \left(\frac{a_1}{q}, \ldots, \frac{a_n}{q} \right) \right\} . \quad (1)$$

Определение 1. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$; $F(\nu)$ – многочлен от n переменных с целыми коэффициентами; λ есть максимум абсолютных величин коэффициентов $F(\nu)$. Полином

$F(\nu)$ степени $d > 1$ будем называть *разделяющим полиномом для множеств* $X, Y \subset E_{\mathbf{Q}}(q)$, ($X \cap Y = \varnothing$), если для него справедливо соотношение (1).

Определение 2. Пусть

$$S = \left(\bigcup_{x \in X} S(x;\rho) \right) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} S(y;\rho) \right) = S_X^{(\rho)} \cup S_Y^{(\rho)} \subset E_{\mathbf{R}} \; .$$

Нормальный разделяющий полином $F(\nu)$ для $X, Y \subset E_{\mathbf{Q}}(q)$ называется *локально устойчивым*, если для любого натурального числа q существует $\rho = \rho(q) > 0$, такое что полином $F(\nu)$ разделяет множества $S_X^{(\rho)}$ и $S_Y^{(\rho)}$.

Определение 3. Точную верхнюю границу $\rho^*(q)$ чисел ρ, таких что $F(\nu)$ разделяет $S_X^{(\rho)}$ и $S_Y^{(\rho)}$ при данном q будем называть *радиусом устойчивости* полинома $F(\nu)$. Если $\rho^*(q) = \lambda q^{-t}$, (где $\lambda > 0$ -абсолютная константа), то число *(-t)* называется *порядком локальной устойчивости*.

Определение 4. Нормальный разделяющий полином $F(\nu)$ будем называть *слабо локально устойчивым*, если существование множеств $S_X^{(\rho)}$ и $S_Y^{(\rho)}$ имеет место для всех достаточно больших $q > q_0$.

Естественным образом определяются радиус и порядок слабой локальной устойчивости.

Конечно, если множества X и Y конечны, то (слабая) локальная устойчивость полинома $F(\nu)$ как непрерывной функции является тривиальным следствием хрестоматийных теорем математического анализа. Однако в общем случае непрерывной функции эти теоремы утверждают только существование множеств $S_X^{(\rho)}$ и $S_Y^{(\rho)}$. Точные оценки радиуса и порядка локальной устойчивости из этих теорем можно получить только при рассмотрении *конкретной* разделяющей функции. Наша цель – получение оценок радиуса и порядка локальной устойчивости, справедливых *для всего класса* нормальных разделяющих многочленов. Основанием для оптимизма здесь является уникальная арифметическая природа полиномиальных функций с целыми коэффициентами, в частности, тот факт, что корнями многочленов от одной переменной являются алгебраические числа.

Отметим два предполагаемых и легко обосновываемых "из общих соображений" свойства порядка (слабой) локальной устойчивости.

Порядок (слабой) локальной устойчивости не больше, чем (-n).

Действительно, если $-t > -n$, то единичный куб $E_{\mathbf{Q}}(q)$ при некотором q покрывается шарами устойчивости и все проблемы теории распознавания сводятся к процессу обучения для конечного множества $S_X \cup S_Y$. К счастью для теории распознавания образов (и к несчастью для приложений) это невозможно.

При фиксированном q порядок (слабой) локальной устойчивости является невозрастающей функцией от d.

Действительно, большему значению d соответствует большее число "степеней свободы" (коэффициентов) у многочлена $F(\nu)$. Вследствие этого возрастает количество разделяющих многочленов, специфичных именно для данных конечных множеств X и Y.

Конечно, приведенные соображения не могут являться формальными аргументами в пользу сформулированных свойств. Строгие доказательства с точными количественными формулировками могут быть получены на основе известных фактов теории диофантовых приближений.

Три теоремы об устойчивости полиномиальных решающих правил

Формулировки и доказательства теорем Лиувилля Рота и Хинчина, относящихся к "классике" теории приближений алгебраических иррациональностей рациональными числами, приведены, например, в монографии [6] и оригинальных работах [4], [5] авторов. Первая из теорем утверждает, что алгебраические иррациональности не могут "слишком хорошо" приближаться рациональными числами. Остальные две посвящены уточнению количественной формы этого тезиса. Формулируемые ниже теоремы являются их прямыми следствиями, легко доказываемыми в рамках рутинных методов классического дифференциального исчисления для функций нескольких вещественных переменных.

Теорема 1. (Следствие из теоремы Лиувилля). Если нормальный разделяющий многочлен не обращается в нуль в точках множества $E_{\mathbf{Q}}$, то порядок локальной устойчивости не менее чем

$$\left(-d(n-1)\right)=-t\ .$$

Это ожидаемый результат, получивший качественное объяснение в предыдущем разделе. Следующая теорема кажется парадоксальной. Неудивительно, за доказательство своего результата К. Рот получил в 1958 году Филдсовскую премию.

Теорема 2. (Следствие из теоремы Рота)**.** Если нормальный разделяющий многочлен не обращается в нуль в точках $E_{\mathbf{Q}}$, то порядок слабой локальной устойчивости при любом $\delta>0$ не менее

$$\left(-2-\delta\right)\left(n-1\right)=-t\ .$$

Заметим, что степень полинома не участвует в формулировке теоремы.
Следующая теорема утверждает существование решеток в $E_{\mathbf{Q}}$, таких что порядок слабой локальной устойчивости многочлена разделяющего множества X и Y таких решеток может быть сколь угодно близок к (-n).

Теорема 3. (Следствие из теоремы Хинчина). Пусть $\varphi(q)$ - любая положительная функция целочисленного аргумента q, такая, что $\varphi(q)\to 0,\quad q\to\infty$. Тогда существует последовательность $\{m_q\}\quad\left(q\le m_q\right)$, такая что для нормального разделяющего многочлена, не обращающегося в нуль в рациональных точках $E_{\mathbf{Q}}$, выполняется неравенство:

$$\rho*\left(m_q\right)\ge\varphi(q)\left(m_q\right)^{-n}\ .$$

НЕСТАНДАРТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Лейбницевский подход к бесконечно малым и гипердействительные числа

В знаменитом мемуаре Лейбница [7] впервые на страницах математических публикаций появились символы *dx* и *dy.* Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления. Конечно, попытка рассмотрения бесконечно малых величин как равноправных сущностей в поле действительных чисел представляется на первый взгляд достаточно наивной (топологическое поле действительных чисел полно и в нем "нет места" еще для каких-то объектов). Но Лейбниц глупостей не публиковал! Глубокая идея вполне спасается введением соответствующего математического формализма. Тем не менее, вплоть до 1961 г. понятие бесконечно малой *постоянной* величины, бесконечно малого постоянного числа, третировалось как в лучшем случае нестрогое, а в худшем – бессмысленное. Трудно сказать с уверенностью, насколько в действительности Лейбниц был близок к созданию такого формализма, получившего после появления статьи А.Робинсона [8] название "Нестандартный анализ". Подробное и популярное изложение идей, лежащих в основе нестандартного анализа, содержится, например, в монографии [3]. Более общее и строгое изложение этой теории и обсуждение истории вопроса можно найти в монографиях [1], [2]. Мы ограничиваемся кратким явным описанием необходимого формализма – одним из простейших вариантов введения так называемой гипердействительной прямой, то есть простейшим случаем общей конструкции нестандартных расширений алгебраических структур. Эта конструкция позволяет дать содержательное и корректное обоснование подхода Лейбница. Кроме того, она является вполне достаточной для решения частного (но принципиального для теории распознавания образов) случая сформулированной выше **Основной проблемы** для полиномиальных решающих правил.

Пусть $\mathbf{R}[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной, $\mathbf{K_R}[x]$ – его поле частных, то есть поле рациональных функций. Отобразим канонически $\mathbf{K_R}[x]$ на $\mathbf{K_R}[\varepsilon] = {}^*\mathbf{L}$, определив на $^*\mathbf{L}$ отношение порядка, индуцированное правилами:

(a) $\forall\, x > 0,\, x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $0 < \varepsilon < x$;

(b) $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $0 < n\,\varepsilon < 1$.

Правило (a) позволяет интерпретировать элемент $\varepsilon \in \mathbf{K_R}[\varepsilon] = {}^*\mathbf{L}$ как "бесконечно малую величину", а правило (b) "запрещает" выполнение аксиомы Архимеда в $^*\mathbf{L} \setminus \mathbf{R}$. Таким образом, поле $\mathbf{K_R}[\varepsilon] = {}^*\mathbf{L}$ является неархимедовым расширением поля $\mathbf{R}$ и содержит элементы, которые *могут быть* интерпретированы (но совершенно необязательно) как лейбницевские бесконечно малые.

В терминах расширения $\mathbf{K_R}[\varepsilon] = {}^*\mathbf{L}$ может быть решена **Основная проблема** для полиномиальных решающих правил.

Теорема 4. Пусть X и Y два непересекающихся подмножества пространства $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, $\{F(\nu)\}$ – множество всех полиномов, разделяющих классы X и Y:

$$F(\nu) > 0 \text{ при } \nu \in X \text{ и } F(\nu) < 0 \text{ при } \nu \in Y.$$

Тогда существуют расширения $^*\mathbf{L} \supset \mathbf{R}$, $^*\mathbf{V} \supset \mathbf{V}$, подмножества $^*X, {}^*Y \subset {}^*\mathbf{L}$ ($^*X \supset X$, $^*Y \supset Y$) и способ продолжения $F(\nu) \rightarrow {}^*F(^*\nu)$ полиномов на пространство $^*\mathbf{V}$, такие, что если $F(\nu)$ разделяет множества X и Y в пространстве $\mathbf{V}$, то $\boldsymbol{F}(^*\nu)$ разделяет $^*X$ и $^*Y$ в пространстве $^*\mathbf{V}$.

Отметим, что неформальная трактовка Теоремы 4 представляется совершенно тривиальной: насколько допустимо "пошевелить" множества X и Y ? На бесконечно малую величину! Но эта тривиальность кажущаяся. На самом деле указаны (бесконечные) множества $^*X, {}^*Y \subset {}^*\mathbf{L} \supset \mathbf{R}$, на которые продолжаются *все* полиномиальные решающие правила.

Введенное выше множество $^*\mathbf{L} \supset \mathbf{R}$ обладает по крайней мере следующими свойствами:

(1) для каждой *рациональной функции* $F(\nu)$ существует функция $^*F(^*\nu)$, продолжающая $F(\nu)$ на $^*\mathbf{L}$;

(2) любая система *рациональных* уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, имела действительные решения;

(3) множество $^*\mathbf{L}$ содержит элементы, для которых справедливы правила (a) и (b), т.е. лейбницевские бесконечно малые.

Определенным теоретическим недостатком рассмотренной конструкции гипердействительной прямой является относительная бедность класса рациональных функций. Рассмотрение общего случая "произвольных" решающих правил (т.е. класса функций $F(\nu)$) базируется на формально-логическом аппарате (теории моделей). Основная трудность

при этом заключается в корректном продолжении функций $F(\mathbf{v})$ на $^*\mathbf{V}$ с сохранением свойства (2).
Спецификой решения задач теории распознавания образов является требование содержательного (нетабличного) описания классов объектов X и Y и класса решающих правил $F(\mathbf{v})$. Корректное введение понятия "описание" необходимо связано с понятием логического языка, его семантики и синтаксиса (т.е. собственно логики). Не останавливаясь на деталях, отметим что выразительная сила языка *логики первого порядка* достаточно велика и имеются веские основания рассматривать логику первого порядка в качестве основного языка математики (согласно *тезису Гильберта* вся классическая математика выразима в логике первого порядка [9]). Поэтому справедливо, по крайней мере, следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть X и Y два непересекающихся подмножества пространства $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, допускающих описание в языке логики первого порядка**,** $\{F(\mathbf{v})\}$ – множество всех функций допускающих описание в языке логики первого порядка и разделяющих классы X и Y.
Тогда существуют расширения $^*\mathbf{R} \supset \mathbf{R}$**,** $^*\mathbf{V} = \supset \mathbf{V}$, подмножества $^*X, ^*Y \subset {}^*\mathbf{L}$ ($^*X \supset X$, $^*Y \supset Y$) и способ продолжения $F(\mathbf{v}) \to {}^*F(^*\mathbf{v})$ функций на пространство $^*\mathbf{V}$, такие, что если $F(\mathbf{v})$ разделяет множества X и Y в пространстве $\mathbf{V}$, то $^*F(^*\mathbf{v})$ разделяет $^*X$ и $^*Y$ в пространстве $^*\mathbf{V}$**.**

Кольцо полиадических чисел Прюфера и его нестандартное расширение
Хорошо известно [17], что в рациональном поле $\mathbf{Q}$ наряду с традиционной (архимедовой) метрикой $d_\infty(x,y)=|x-y|$ можно ввести и p-адическую метрику $d_p(x,y)=\|x-y\|_p$, индуцированные для каждого простого p неархимедовой (p-адической) нормой:

$$\left\|\frac{a}{b}\right\|_p = p^{\left(\vartheta_p(b)-\vartheta_p(a)\right)},$$

где $\vartheta_p(a)$ - точная степень p, делящая a. Пополнение $\mathbf{Q}$ относительно метрики, индуцированной нормой $\|\bullet\|_p$, приводит к полям p-адических чисел. В работе [19] введено понятие линейной разделимости множеств из $\mathbf{Z}^n$ относительно семейства p-адических норм и доказана теорема об относительной линейной разделимости произвольных конечных подмножеств из $\mathbf{Z}^n$. Доказанный в [19] результат можно интерпретировать как "локально-линейный", если под локализацией понимать редукцию (mod p).
"Глобализация" этого результата может быть достигнута вложением кольца $\mathbf{Z}$ в топологическое кольцо *полиадических чисел Прюфера* [10]-[12].

Определение 5. Функция

$$D_r(a,b)=\sum_{m=1}^{\infty} r^m \chi_m(a,b), \quad \left(0<r<\tfrac{1}{2}\right), \text{ где } \chi_m(a,b)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad a \equiv b \pmod{m},\\ 1 & \text{при} \quad a \neq b \pmod{m}\end{cases}$$

определяет на $\mathbf{Z}$ метрическую структуру. Топологическое D_r -пополнение $\mathbf{T}$ кольца $\mathbf{Z}$ называется кольцом полиадических чисел (Прюфера).

Определение 6. Пусть $\Omega \subset \mathbf{Z}^n$ - конечное множество и $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Множества Ω_1 и Ω_2 называются полиадически линейно разделимыми гиперплоскостью

$$L(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0, \quad a_k \in \mathbf{Z},$$

если существуют $c>0$ и $r \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$, такие что для любого $\mathbf{x} \in \Omega_1$ справедливо неравенство $D_r(L(\mathbf{x}),0)<c$, а для любого $\mathbf{y} \in \Omega_2$ справедливо неравенство $D_r(L(\mathbf{y}),0) \geq c$.

Лемма 1. Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Тогда существует гиперплоскость полиадически линейно разделяющая множества Ω_1 и Ω_2 .

Из леммы 1 следует "полиадическая нестандартная версия" решения **Основной проблемы**.

Теорема 6. Пусть X и Y два конечных непересекающихся подмножества пространства $\mathbf{V} = \mathbf{T}^{\mathbf{n}}$**.** Тогда существует непустое множество *линейных* функций $\{L(\nu)\}$, разделяющих классы X и Y и таких, что существуют расширения $*\mathbf{T} \supset \mathbf{T}$, $*\mathbf{V} \supset \mathbf{V}$, подмножества $*X, *Y \subset *\mathbf{T}$ ($*X \supset X$, $*Y \supset Y$) и способ продолжения $L(\nu) \to *L(*\nu)$ функций на пространство $*\mathbf{T}$, такие, что если $L(\nu)$ разделяет множества X и Y в пространстве $\mathbf{T}$, то $*L(*\nu)$ разделяет $*X$ и $*Y$ в пространстве $*\mathbf{T}$**.**

Обсуждение результатов

Основную психологическую трудность при восприятии идей нестандартного анализа представляет необходимость примириться с существованием во множестве гипердействительных чисел элементов, для которых не выполняется аксиома Архимеда. Для архимедово нормированного поля действительных чисел такие элементы интерпретируются как лейбницевские бесконечно малые. Если исходная структура уже представляет собой полное пространство, но метризованное неархимедовым образом, то существование элементов с условиями (a)-(b) или с их аналогами воспринимается более спокойно. Рассмотренное выше нестандартное расширение полиадических чисел Прюфера представляет собой пример такой ситуации. Но нестандартный подход основан та том факте, что *любая* алгебраическая структура M допускает нестандартное расширение $*M$, наследующее свойства структуры M. Указанная взаимосвязь между M и $*M$ формулируется в виде общих принципов нестандартного расширения, в частности, *принцип перманентности: каждое математическое утверждение относительно M имеет интерпретацию в $*M$, и эта интерпретация истинна в $*M$ в том и только том случае, когда исходное утверждение истинно в M.*

Отметим, что математическое утверждение относительно M понимается как высказывание в формальном языке исчисления предикатов на M. Построение нестандартного расширения структуры M и базируется на тех же формально-логических средствах, которые характерны для алгебраической теории распознавания [13], [14]. Таким образом, методы нестандартного анализа представляются естественными именно для этой теории, в частности, для задач, связанных с продолжением решающих правил. Относительную трудность представляет необходимость содержательной "физической" интерпретации нестандартных элементов. В связи с этим уместно отметить, что наряду со "стандартным", каноническим подходом к нестандартному анализу (восходящим к Робинсону) существует и приобретает возрастающую популярность другой подход. При этом подходе "бесконечно малые элементы" не изобретают, строя расширения действительной прямой или других математических структур, а "открывают" внутри этих структур. Нам предлагается считать, что бесконечно малые всегда были среди действительных чисел, но просто мы их не видели, не имея средств выделить среди остальных [15],[16].

В ряде случаев "открытие" существования таких "бесконечно малых" достаточно просто.

Например, построение кольца целых p-адических чисел представляет собой некоторый бесконечный процесс, приводящий к построению, в конце концов, поля всех p-адических чисел как поля частных кольца целых p-адических чисел [17]. Это построение аналогично построению вещественного пополнения поля рациональных чисел, но в отличие от последнего использует не традиционную (архимедову) норму рационального поля, а p-адическую норму $\|\bullet\|_p$.

Целые p-адические числа с нормой, равной p^{-1} (т.е. делящиеся на простое p точно в первой степени) обладают свойствами (a)-(b) и могут рассматриваться как "бесконечно малые" по отношению к целым p-адическим числам с единичной нормой (т.е. не делящимся на простое p) и т.д. Практическая эффективность рассмотрения признаковых пространств с p-адической метрикой обоснована автором в [18]-[20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на то, что ни один из представленных в докладе результатов (за исключением леммы 1) не принадлежит автору лично (далеко неполный список соавторов должен включать имена Г.В. Лейбница, Ж. Лиувилля, А.Я. Хинчина, Х. Прюфера, К.Ф. Рота, А.И. Мальцева, Ю.И. Журавлева, А. Робинсона), он (автор) предпочитает в отношении данной работы употреблять вместо термина "компиляция" слова "интерпретация результатов".

ЛИТЕРАТУРА

1. Robinson A. Non-standart analysis. North-Holland, 1966.
2. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
3. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.
4. Khintchine A.Ya. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen. //Rendicotl Circ.Mat.Palermo, V.50, 1926, pp.170-195.
5. Roth K.F. Rationl approximations to algebraic numbers. //Mathematika, V.2, 1955, pp.1-20.
6. Касселс Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
7. Лейбниц Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений. //УМН, т.2, 1(23), 1948, с.165-203.
8. Robinson A. Non-standart analysis. //Proc. Koninkl. Ned. Akad.wet. A. V.64, N 4, 1961, pp.432-440.
9. Справочная книга по математической логике. Теория моделей //Под. ред. Дж.Барвайса. М.: Наука, 1982.
10. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
11. Pruefer H., Neue Begruendung der algebraicshe Zahlentheorie. //Math. Ann., V.94, N 3-4., 1925, S.198-243.
12. Hewitt E., Ross K. Abstract harmonic analysis. Springer, 1963.
13. Журавлев Ю.И. Локальные алгоритмы вычисления информации. I-II //Избранные труды. М. Изд-во "Магистр", 1998, с. 91-134.
14. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. //Избранные труды. М. Изд-во "Магистр", 1998, с. 229-323.
15. Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandart analysis. //Bull. Amer. Math.Soc. V.83, N 6, 1977, pp.1165-1198.
16. Hrbacek K. Nonstandart set theory. //Amer.Math.Monthly, 1979, October, pp.659-677.
17. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.
18. Чернов В.М. О линейной разделимости классов в неархимедовых замыканиях дискретных пространств. //Тезисы докладов 9-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов" (ММРО-9), 1999, с.124-125.
19. Chernov V.M. The "modular perceptron". A linear classes separability in the non-Archimedean features spaces. //Proc.of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'97). Lappeenranta, Finland, V.2, 1997, pp.803-808.
20. Chernov V.M.,Shabashev A.V. Non-Archimedian normalized fields in texture analysis tasks. //G.Sommer, K.Daniilidis, J.Pauli (Eds) "Computer Analysis of Image and Pattern". (CAIP'97). Springer Verlag. (Lecture Note Computer Science) 1296, 1997, pp.154-161.