НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Павлов А.А., Аксенова Л.А.

НТУУ «КПИ», Украина
Киев-56, пр. Победы 37, корп. 18.

Данный доклад посвящен исследованию эффективности нового класса точных алгоритмов для труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации введенного в [1], [3].
В [3] сформулированы основы оригинальной методологии построения точных универсальных алгоритмов для труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации и определено понятие ПДС-алгоритма.
ПДС-алгоритм – это алгоритм, состоящий из полиномиального подалгоритма и экспоненциального подалгоритма с декомпозиционной составляющей.
Полиномиальный подалгоритм определяется следующими свойствами -- если в процессе решения произвольной индивидуальной задачи выполняются, строго определенные для полиномиального подалгоритма логико-аналитические условия, то данная произвольная индивидуальная задача решается этим подалгоритмом точно (сложность подалгоритма -- фиксированный полином от размерности произвольной индивидуальной задачи).
Таким образом, принадлежность произвольной индивидуальной труднорешаемой задачи к классу полиномиально разрешимых, определяется вследствие проведения анализа выполнения логико-аналитических условий (например, графовых структур), получаемых алгоритмом в процессе решения этой индивидуальной задачи.
Общая методология построения полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма заключается в следующем. Используя свойства формальной модели труднорешаемой комбинаторной задачи, мы строим точный алгоритм, позволяющий определять логико-аналитические условия, при выполнении которых в процессе решения произвольной индивидуальной задачи, данный подалгоритм находит ее точное решение за полиномиальное время. Алгоритмическая процедура решения в силу своей структуры не требует экспоненциального перебора вариантов. Кроме того, вне логики работы ПДС-алгоритма невозможно определить заранее ограничения на параметры труднорешаемой комбинаторной задачи, при выполнении которых эта задача была бы точно решена полиномиальным подалгоритмом.
Для экспоненциальной составляющей выводятся условия строгой декомпозиции индивидуальной задачи на подзадачи меньшей размерности (например, множества максимальных приоритетов в задаче «Минимизация взвешенного момента окончания работ» [5]).
Алгоритмы, удовлетворяющие выше изложенным свойствам были созданы для ряда труднорешаемых комбинаторных задач [1]. Рассмотрим свойства двух видов ПДС-алгоритмов на примере задач «Минимизация взвешенных моментов окончания работ» [1], [2] и «Максимальное независимое множество» [2].
Алгоритм решения задачи «Минимизация взвешенного момента окончания работ» удовлетворяет свойствам ПДС-алгоритма с аддитивной структурой. ПДС-алгоритм с аддитивной структурой данной задачи состоит из двух независимых алгоритмов - полиномиальной и экспоненциальной составляющих. Решение рассматриваемой индивидуальной задачи начинается с полиномиальной составляющей ПДС-аплгоритма и в случае выполнения в процессе ее решения логико-аналитические условий, мы получаем точное решение данной задачи за полиномиальное время. В противном случае точное решение рассматриваемой задачи может быть получено только экспоненциальной составляющей ПДС-аплгоритма.
Алгоритм решения задачи «Максимальное независимое множество» удовлетворяет свойствам ПДС-алгоритма с неаддитивной структурой. ПДС-аплгоритм с неаддитивной струк-

турой состоит из общего точного алгоритма с верхней экспоненциальной оценкой числа вычислений, удовлетворяющего следующим свойствам.

1. Алгоритм реализует не более чем n числа итераций, где n – число переменных (вершин графа);
2. Каждая итерация удовлетворяет следующим свойствам.

2.1 Алгоритм рассматривает начальное подмножество вершин и находит оптимальное решение на данном множестве;

2.2 На каждой итерации осуществляется полиномиальное число отсечения вариантов (отсечение построения подмножеств ранее построенных максимальных замкнутых множеств; отсечение построения максимальных замкнутых множеств, не содержащих покрытия на рассматриваемой итерации [2]);

2.3 Общий алгоритм состоит из полиномиальных и экспоненциальных процедур;

2.4 Для экспоненциальных процедур (общие процедуры построения максимальных замкнутых множеств) выводятся логико-аналитические условия, при выполнении которых данные процедуры выполняются за полиномиальное время (p-условия);

2.5 Если p-условия реализовались при использовании каждой экспоненциальной процедуры, то на данной итерации реализовалась полиномиальная составляющая.

3. Если на каждой итерации решения индивидуальной задачи были удовлетворены p-условия, то при ее решении реализовалась полиномиальная составляющая ПДС-алоритма.

Оценкой эффективности ПДС-алгоритмов является статистическая значимость, то есть то, что при массовом моделировании произвольным образом параметров индивидуальных задач данной труднорешаемой комбинаторной задачи, статистически значимо они принадлежат к множеству полиномиально разрешимых индивидуальных задач, которые были определены полиномиальной составляющей ее ПДС-алгоритма.

Таким образом, статистический анализ проводится не для анализа эффективности точного экспоненциального алгоритма в целом, а для анализа параметров индивидуальных задач, для которых высока частота их решения полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма.

Рассмотрим схемы решения выше приведенных алгоритмов.

Постановка труднорешаемой задачи теории расписаний – «Минимизация суммарного взвешенного момента окончания работ при отношении порядка заданного ориентированным ацикличным графом» (МВМ).

Задано частично-упорядоченное множество заданий $\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{j_1, j_2, ..., j_n})$, которые начиная с нулевого момента времени, обслуживается одним прибором. Каждому заданию $\boldsymbol{j}$ поставлено в соответствие его длительность $\boldsymbol{l_j} > 0$ и вес $\boldsymbol{\omega_j}$ (произвольное действительное число). Задания обслуживаются без прерываний, не более, чем одно в единицу времени [1].

Необходимо найти такую последовательность обслуживания заданий, суммарный взвешенный момент окончания выполнения работ в которой, минимален:

$$\boldsymbol{F = \sum_{k=1}^{n} \omega_{j_{[k]}} c_{j_{[k]}} \rightarrow min},$$

где $\boldsymbol{c_{j_{[k]}}}$ - момент завершения выполнения задания, стоящего в допустимом расписании на $\boldsymbol{k}$-ой позиции;

$$\boldsymbol{c_{j_{[k]}} = \sum_{s=1}^{k} l_{j_{[s]}}}.$$

Данная задача является NP-трудной в сильном смысле и останется таковой, если все длительности или все веса равны 1.

Теорема [5]. Оптимальное расписание является Р-упорядоченным.
В [1], [2] рассмотрен ПДС-алгоритм решения NP-трудной задачи МВМ, построенный на основе оригинального алгоритма решения задачи МВМ при отношении порядка, заданного последовательно-параллельным графом, определения новых свойств максимальных замкнутых множеств и их связности [1]. Данный алгоритм был создан на основе анализа приоритетов и использовании перестановочного приема введенного в [5]. Предложенный итерационный алгоритм работает с начальной подпоследовательностью работ. В конце каждой итерации мы получаем оптимальное решение на рассматриваемом множестве работ. Нами были введены обобщенные понятия простой и сложной конструкций – структур, для которых оптимальное расписание может быть определено за полиномиальное время. В [4] также были определены правила отношений предшествования во множествах максимальных приоритетов, при выполнении которых оптимальное расписание может быть получено за полиномиальное время для случая, когда граф частичного упорядочивания не отвечает требованиям последовательно-параллельного подграфа. В случае нарушения условий предшествования, определенных для множеств максимальных приоритетов, оптимальное расписание предложенным алгоритмом не может быть получено и для его получения используется экспоненциальный алгоритм.
При проведении статистического исследования было установлено, что предложенная полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма является статистически значимой для индивидуальных задач МВМ, полученных при моделировании случайным образом их параметров.

Рассмотрим схему ПДС-алгоритма, предложенного для решения задачи «Максимальное независимое множество» (МНМ).
Постановка задачи: задан неориентированный граф $G=(V,E)$, V - множество вершин; E - множество ребер.
Вопрос: найти наибольшее независимое множество - $V' \subseteq V$.
Множество вершин V' независимо, если подграф, построенный на вершинах V' - пустой ($G(V')=\varnothing$).

На основе теоретических резутатов введенных в [2] разработан ПДС-алгоритм решения задачи «Максимальное независимое множество» с неаддитивной структурой, имеющий следующую структуру.
1-й этап. Построение допустимого независимого множества – $V^{доп}$ [2].
2-й этап. Упорядочивание остатка вершин в соответствии с их связностью с построенным допустимым независимым множеством в линейный массив $V^{уп}$=V\\$V^{доп}$=$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\}$.
3-й этап. Итерацинная процедура построения покрытия для вершины $\alpha_k \in V^{уп}$. Вершина α_k включена в рассмотрение на текущей итерации. Данный этап состоит из двух частей: построение всех максимальных замкнутых множеств и последовательный поиск покрытия в построенных множествах [2].

Алгоритм построения покрытия вершины α_k состоит из следующих процедур: полиномиальных процедур определения вершин, для которых доказано принадлежность либо их отсутствие в покрытии вершины α_k; полиномиальной по сложности процедуры построения массивов связности вершин из текущего допустимого независимого множества с вершинами из вершинного покрытия; определение массива и множества его вершин, включаемых в конструируемое независимое множество; построение замкнутых и максимальных замкнутых множеств; проверка правил, отсекающих построение подмножеств ранее построенных замкнутых множеств и отсечение бесперспективных ветвей; поиск покрытия вершины α_k для каждого максимального замкнутого множества либо доказательство факта его отсутствия. Для двух последних процедур выведены р-условия, при выполнении которых сложность выполнения данных процедур является полиномом от размерности задачи.

Суть работы алгоритма на каждой итерации лежит в проверке теоретической возможности увеличения на данной итерации текущего допустимого независимого множества либо доказательство факта, что полученное текущее допустимое независимое множество и есть решением задачи на рассматриваемом множестве вершин. В случае положительного результата выполняется коррекция текущего допустимого независимого множества и, как следствие, ее мощность увеличивается на единицу. Допустимое независимое множество, полученное на последней итерации, и есть решением задачи МНМ.
Анализ двух предложенных ПДС-алгоритмов позволяет отметить следующие отличия.
В первом случае решение произвольной индивидуальной задачи МВМ производится полиномиальным под-алгоритмом, на каждом шаге выполнения которого проверяются условия, определяющие удовлетворяет ли данная индивидуальная задача требованиям полиномиальной составляющей. В случае их нарушения для получения оптимального решения используется экспоненциальный под-алгоритм, имеющий отличную схему работы.

Во втором случае исходная индивидуальная задача решается общим точным алгоритмом. На каждой итерации работы алгоритма при использовании экспоненциальных процедур проверяется выполнение р-условий. В случае их нарушений оптимальное решение рассматриваемой индивидуальной задачи может быть получено предложенным ПДС-алгоритмом, но сложность его выполнения будет иметь экспоненциальную зависимость от числа переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP», Павлов А.А. и др., (1993) -- Киев, Техника,128 ст.
2. A.Pavlov, L.Pavlova. PDC-algorithms for intractable combinatorial problems. Theory and methodology of design. (1997) – Uzhhorod, «Karpatskij region» shelf, 320 pp.
3. Павлов А.А., Павлова Л.А. «Основы методологии проектирования ПДС-алгоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач», -- Киев, Проблемы информатики и управления, № 4, ст. 135-141, 1995.
4. Pavlov A.A., Pavlova L.A. About one subclass of polynomial solvable problems from class «sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to the precedence constraints» .Kyiv, Vestnik of Solomonov university vol. 1, 96-102 (1999) (English).
5. Sidney J.B. Decomposition algorithm for Single-Machine Sequencing with Precedence Relations and Deferral Costs. Operation Res. vol.23283-298 (1975). (English)