УДК 51 (071)

Л.П.Мироненко (канд. физ.-мат. наук, доц.), О.А. Рубцова
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», Донецк
кафедра высшей математики им. проф. В.В.Пака
E-mail: mironenko.leon@yandex.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ И МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Целью статьи является альтернативный вывод стандартных представлений (разложений) элементарных функций $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ *в виде приближения многочленами* $n-$*й степени. Подход основан на применении метода неопределенных коэффициентов к тригонометрическим, гиперболическим и другим соотношениям. Разложения получены без привлечения дифференциального исчисления, а только средствами элементарной математики.*

Ключевые слова: *многочлен, стандартные разложения, функция, синус, косинус, экспонента, метод, неопределенные коэффициенты.*

Введение и постановка проблемы

Стандартные разложенияфункций $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ используются в математическом анализе практически во всех ее разделах, начиная с теории пределов и заканчивая рядами [1-4]. Обычно в курсе анализастандартные разложения вводятся при помощи формулы Тейлора, т.е. в дифференциальном исчислении. Фактически же разложения функций уже нужны в теории пределов, например, при вычислении пределов, для выделения главной части функции, для сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций и др.

В этой связи возникает необходимость введения стандартных разложений на этапе изучения теории пределов. Подход должен не использовать понятия производной. Мы нашли нужный для этой цели метод неопределенных коэффициентов, который применяется к некоторым элементарным равенствам элементарной математики.

Этот подход носит универсальный характер, поскольку все разложения получаются с помощью одного метода (неопределенных коэффициентов).

Стандартные разложения некоторых элементарных функций можно получить не выходя за рамки элементарной математики, и, в частности, легко обосновать формулы стандартных пределов.

1. Тригонометрические функции и первый стандартный предел

Запишем функцию синус в виде приближения многочленом $n-$й степени с неизвестными (неопределенными) действительными коэффициентами $A_o, A_1, \ldots, A_n$:

$$A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + r_n(x), \qquad (1)$$

где $r_n(x)$ - остаток разложения, многочлен степени не ниже x^{n+1}.

Учитывая, что функция синус нечетная $\sin(-x) = -\sin x$ и $\sin 0 = 0$, получим из формулы (1) многочлен, содержащий только нечетные степени переменной x и $A_o = 0$

$$\sin x = A_1 x + A_3 x^3 + \ldots + A_{2n+1} x^{2n+1} + r_{2n+1}(x), \qquad (2)$$

где $r_{2n+1}(x)$ - остаток разложения, многочлен степени не ниже x^{2n+3}.

Аналогично, учитывая, что функция косинус четная $\cos(-x) = \cos x$ и $\cos 0 = 1$, получим многочлен, содержащий толькочетные степени x и $B_o = 1$

$$\cos x = 1 + B_2 x^2 + ... + B_{2n} x^{2n} + r_{2n}(x), \tag{3}$$

где $r_{2n}(x)$ - остаток разложения.

Замечание 1. В формулах (1) и (2) остатки разложений обозначены одним символом $r(x)$, хотя они различны [3]. Нас не будет интересовать явный вид этих функций, для нас важно знать степень многочлена $r(x)$.Будем обозначать $r_n(x)$ бесконечно малую порядка $n+1$ при $x \to 0$ [4].

Замечание 2. В дальнейшем, в других разложениях, остаток будем обозначать одним символом $r(x)$, а нижним индексом n будем обозначать степень многочлена остатка разложения.

Для нахождения коэффициентов A, B используем метод неопределенных коэффициентов [2-3], который применим к основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. При этом выпишем только несколько первых членов, количество которых достаточно, чтобы установить закономерность.

$$\sin^2 x = (A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + ... + A_{2n+1} x^{2n+1} + r_{2n+3}(x))^2 =$$
$$= A_1^2 x^2 + A_3^2 x^6 + 2A_1 A_3 x^4 + 2A_1 A_5 x^6 + 2(A_3 A_5 + A_1 A_7) x^8 + ...),$$
$$\cos^2 x = (1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + ... + B_{2n} x^{2n} + r_{2n+2}(x))^2 =$$
$$= (1 + B_2^2 x^4 + B_4^2 x^8 + 2(B_2 x^2 + B_4 x^4 + B_6 x^6 + B_8 x^8 + B_2 B_4 x^6 + B_2 B_6 x^8) + ...$$

Складываем левые и правые части равенств, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях, получим тождество, которое должно выполняться при всех *x:*

$$1 + (A_1^2 + 2B_2)x^2 + (2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2)x^4 + (2A_1 A_5 + + A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4)x^6 +$$
$$+ (2A_3 A_5 + 2A_1 A_7 + 2B_2 B_6 + B_4^2 + 2B_8)x^8 + ... \equiv 1.$$

Как известно, функции $1, x, x^2, ..., x^n$ являются линейно независимыми на всей числовой оси*x*[1], поэтому приравнивая каждую скобку нулю (коэффициент при соответствующей степени *x*), получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B

$$\begin{cases} A_1^2 + 2B_2 = 0, \\ 2A_1 A_3 + B_2^2 = 0, \\ A_3^2 + 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 0, \\ A_4^2 + A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 0, \\ ... \end{cases} \tag{4}$$

Эта системауравнений для определения коэффициентов A, B не является определенной, поскольку неизвестных больше числа уравнений. Используемещe одно известное равенство $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ (можно использовать любое иное тригонометрическое равенство, содержащее $\sin x$ и $\cos x$, например, $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$), получим равенство:

$$1 + (-A_1^2 + 2B_2)x^2 + (-2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2)x^4 + (-2A_1 A_5 - A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4)x^6 +$$
$$+ (-2A_3 A2_5 - 2A_1 A_7 + 2B_2 B_6 + B_4^2 + 2B_8)x^8 + ... =$$
$$= 1 + 4B_2 x^2 + 16B_4 x^4 + 64B_6 x^6 + 256B_8 x^8 + ...$$

В результате получим еще одну систему:

$$\begin{cases} -A_1^2 + 2B_2 = 4B_2, \\ -2A_1 A_3 + B_2^2 = 16B_4, \\ -A_3^2 - 2A_1 A_5 + 2B_2 B_4 = 64B_6, \\ -A_4^2 - A_1 A_4 + B_4^2 + B_2 B_6 = 256B_8, \\ \ldots \end{cases} \qquad (5)$$

Решение систем (4) и (5) проведем последовательно, образуя пары уравнений. Берем первое уравнение из первой системы и первое уравнение второй системы, потом второе уравнение первой системы и второе уравнение второй системы и т.д.

$$\begin{cases} A_1^2 + 2B_2 = 0 \\ -A_1^2 + 2B_2 = 4B_2 \end{cases} \to B_2 = -\frac{A_1^2}{2!}.$$

$$\begin{cases} 2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2 = 0 \\ -2A_1 A_3 + 2B_4 + B_2^2 = 16B_4 \end{cases} \to A_3 = -\frac{A_1^3}{3!}, B_4 = \frac{A_1^4}{4!}.$$

$$\begin{cases} 2A_1 A_5 + A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4 = 0 \\ -2A_1 A_5 - A_3^2 + 2B_6 + 2B_2 B_4 = 64B_6 \end{cases} \to A_5 = \frac{A_1^5}{5!}, B_6 = -\frac{A_1^6}{6!}.$$

и т.д.

В результате имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \sin x &= A_1 x - \frac{A_1^3}{3!}x^3 + \frac{A_1^5}{5!}x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{A_1^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+1}(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{A_1^2}{2!}x^2 + \frac{A_1^4}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{A_1^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n}(x). \end{aligned} \qquad (6)$$

Замечание 3. Разложения (6) определены с точностью до произвольногомультипликативного коэффициента A_1. Это объясняется тем, что равенства $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\cos^2 x - \sin^2 x + = \cos 2x$, однородные относительно аргумента *x*, а именно, соотношения $\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x = 1$ и $\cos^2 \alpha x - \sin^2 \alpha x = \cos 2\alpha x$ остаются справедливыми для любых $\alpha \neq \infty$.

Коэффициент A_1 можно рассматривать как параметр, обозначим его α. Теперь заметим, что при различных значениях параметра, правая часть равенств (6) является функцией не переменной x, а переменной αx. Поэтому в разложениях (6) следует заменить $\sin x \to \sin(\alpha x)$, $\cos x \to \cos(\alpha x)$ и окончательно разложения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha x) &= \alpha x - \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{(\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(\alpha x), \\ \cos(\alpha x) &= 1 - \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{(\alpha x)^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(\alpha x). \end{aligned} \qquad (7)$$

Замечание 4. Коэффициент A_1 можно установить иначе, нориближенно.Для этого достаточно в разложения (6) подставить какое-либо из известных значений функций $\sin x$ и/или $\cos x$.

При $\alpha = 1$ имеем стандартные формулы Маклорена:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(x), \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x). \qquad (8)$$

Имея формулу для синуса (8), нетрудно получить формулу первого стандартного предела. Для этого разделим выражение (8) на x и перейдем к пределу при $x \to 0$. В результате имеем[1] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

При вычислении предела использован предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r_{2n+1}(x)}{x} = 0$, значение которого очевидно, если учесть, что согласно логики разложения (8) остаток $r_{2n+1}(x)$ является бесконечно малой порядка x^{2n+3} при $x \to 0$.

2. Гиперболические функции и экспоненциальная функция. Второй стандартный предел

Аналогичный, рассмотренному в предыдущем пункте, подход можно применить к гиперболическим функциям shx и chx, которые определяются формулами [1]:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ и } .\, shx + chx = e^x \tag{9}$$

Гиперболический синус является нечетной функцией, а косинус - четной. Поэтому разложения функций shx и chx имеют аналогичный формам (1) и (2) вид:

$$shx = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n+1}x^{n+1} + r_{2n+1}(x),$$
$$chx = 1 + B_2 x^2 + \ldots + B_{2n}x^{2n} + r_{2n}(x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B используем равенства $ch^2x - sh^2x = 1$ и $ch^2x + sh^2x = ch2x$ (можно использовать равенство $2chx \cdot shx = sh2x$). Искомые разложения имеют вид:

$$shx = A_1 x + \frac{A_1^3}{3!}x^3 + \frac{A_1^5}{5!}x^5 \ldots + \frac{A_1^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+1}(x),$$
$$chx = 1 + \frac{A_1^2}{2!}x^2 + \frac{A_1^4}{4!}x^4 \ldots + \frac{A_1^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n}(x), \tag{10}$$
$$e^x = shx + chx = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{2!}x^2 + \frac{A_1^3}{3!}x^3 \ldots + \frac{A_1^n}{n!}x^n + r_n(x).$$

Как в случае синуса и косинуса обозначим коэффициент $A_1 = \alpha$. Как и в предыдущем пункте имеют место замечания3 и 4 относительно параметра α. Поэтому формулы Маклорена разложений (10) получаются при $\alpha = 1$. В частности, формула Маклорена для экспоненты имеет вид:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x). \tag{11}$$

Отметим случай $\alpha = \ln a$, получим разложение $a^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\ln^k a + r_n(x).$

При малых значениях x имеем приближенное равенство $e^x \cong 1 + x$, из которого следует второй стандартный предел при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{12}$$

Общепринятая форма записи второго стандартного предела достигается заменой $y = 1/x$ при $y \to \infty$. В результате имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + 1/x)^{1/x} = e$.

3. Логарифмическая функция и бином Ньютона

Ищем разложение функции $\ln(1+x)$ в виде:

$$\ln(1+x) = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ - остаток разложения, многочлен степени не ниже x^{n+1}.

Учитывая, что $\ln 1 = 0$, получим $A_o = 0$. Используем свойство $e^{\ln(1+x)} = 1 + x$ и воспользуемся уже полученным ранее разложением для экспоненты:

$$e^{A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+r_n(x)} = 1 + \left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)^3 + \ldots$$

Приравняем выражение справа выражению $1+x$ и сравним коэффициенты левой и правой частей равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x : A_1 = 1, \\ x^2 : A_2 + A_1/2 = 0 \Rightarrow A_2 = -1/2, \\ x^3 : A_3 + A_1A_2/2 + A_1^3/6 = 0 \Rightarrow A_3 = 1/3, \\ x^4 : A_4 + A_1A_3 + A_2^2/2 + A_1^2A_2/2 + A_1^4/24 = 0 \Rightarrow A_4 = -1/4, \\ \ldots \end{cases}$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + r_n(x). \quad (13)$$

Ищем разложение функции $(1+x)^\alpha$ в виде

$$(1+x)^\alpha = A_o + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x), x > -1, \quad (14)$$

где $r_n(x)$ - остаток разложения.

Учитывая, что $(1+x)^\alpha$ при $x = 0$ равно 1, получим $A_o = 0$. Используем свойство $\alpha\ln(1+x) = \ln(1+x)^\alpha$, в левой части равенства воспользуемсяразложением для логарифма(13), а справа – выражением (14):

$$\ln(1+x)^\alpha = \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)\right) = \ln\left(1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)$$
$$\alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)\right) = \left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)^3 -$$
$$-\frac{1}{4}\left(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + r_n(x)\right)^4 + ..$$

Приравниваем коэффициенты левой и правой частей равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x : A_1 = \alpha, \\ x^2 : A_2 - A_1^2/2 = -\alpha/2 \Rightarrow A_2 = \alpha(\alpha-1)/2, \\ x^3 : A_3 - A_1A_2 + A_1^3/3 = \alpha/3 \Rightarrow A_3 = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)/6, \\ x^4 : A_4 - A_2^2/2 - A_1A_3 + A_1^2A_3/3 - A_1^4/4 = -\alpha/4 \Rightarrow A_4 = A_3 = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)/4!, \\ \ldots \end{cases}$$

Искомое разложение имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)x^k}{k!} + r_n(x). \quad (15)$$

3. Оценка остаточных членов разложений

Оценку остатка $r_n(x)$ легко получить и обосновать в рамках теории Тейлора, опираясь на аппарат дифференциального исчисления [1-2,5]. В нашей работе стандартные разложения получены без привлечения понятия производной, т.е. в рамках элементарной математики. Поэтому возникает проблема оценки остаточных членов разложения в рамках элементарной математики.

Для оценки остаточных членов разложений разделим разложения на две группы. К первой группе отнесем разложения, в которых все члены разложения имеют один знак – знакопостоянные. К их числу относятся e^x, shx, chx, а также $(1+x)^\alpha$ при $\alpha < 0$.

Заметим, что в силу неравенств $shx < e^x, chx \le e^x$ имеет смысл начать с функции e^x, разложение которой представим в виде $e^x = P_n(x) + r_n(x),\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},\ r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Для простоты рассмотрения положим $x > 0$. Учитывая очевидное неравенство $(2n)! > (n!)^2$ при $n \ge 1$, получим оценку $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Введем обозначение $\varepsilon = \frac{x_o^{n+1}}{(n+1)!}$. Учтем, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \varepsilon\left(P_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$, получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если $\varepsilon < 1$

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le \varepsilon\left(P_n + \varepsilon\left(P_n + \varepsilon\left(P_n + \ldots\right)\right)\right) = \varepsilon P_n + \varepsilon^2 P_n + \varepsilon^3 P_n + \ldots = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} P_n(x). \quad (16)$$

Для фиксированного x выбором n всегда можно добиться требуемого условия $\varepsilon < 1$ и требуемой точности, если учесть, что $P_n(x) \approx e^x$. Как следует из разложения (11)равенство $P_n(x) \approx e^x$ выполняется с точностью ε.

Для произвольного x оценка остаточного члена имеет вид:

$$|r_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|P_n(x)|,\ \varepsilon = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (17)$$

Полученные оценки (15) и (16) остаются справедливыми для всех многочленов, содержащих в разложении $n!$, потому, что использовано неравенство $(2n)! > (n!)^2$. На этом основании имеем оценку для разложения функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha < 0$ в виде (17), где $\varepsilon = \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1},\ P_n(x) \approx (1+x)^\alpha$. При $\alpha << 1$ имеем $\varepsilon \approx \frac{|\alpha|}{n+1}|x|^{n+1}$. Из этой оценки следует интервал разложения $x \in (-1,1)$.

Ко второй группе относятся разложения, в которых знаки членов разложения чередуются с изменением номера члена – знакочередующиеся. К их числу относятся $\sin x, \cos x, \ln(1+x)$, а также $(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$.

Формулы (16) и (17) несколько изменяются в этом случае. Рассмотрим функцию $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, для которой в качестве многочлена приближения выберем

$P_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Тогда $e^{-x} = P_{2p}(x) + \sum_{k=2p+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ и остаточный член имеет вид:

$$r_{2p}(x) = \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} \le \left| -\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} \right| = \left| -\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\left(P_{2p}(x) + \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) \right| = \tag{18}$$

$$= \left| -\varepsilon\left(P_{2p}(x) + \sum_{k=2p+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) \right| = \left| -\varepsilon P_{2p} + \varepsilon^2 P_{2p} - \varepsilon^3 P_{2p} + \ldots \right| = \left| P_{2p}\left(-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right) \right| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \left| P_{2p}(x) \right|,$$

где $\varepsilon = \dfrac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$, $P_{2p}(x) \approx e^{-x}$.

Аналогично оцениваются все знакочередующиеся остаточные члены разложений функций $\sin x, \cos x, \ln(1+x)$. Приведем пример оценки для синуса. Его остаточный член имеет вид (18), где $\varepsilon = \dfrac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$, $P_{2p}(x) = \sum\limits_{k=0}^{2p}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx \sin x$.

Остается сделать оценку остаточного члена разложения функции $\ln(1+x)$. Опять же, можно воспользоваться теми же рассуждениями, которые применялись для разложений, содержащих $n!$. А именно, представим функцию в виде разложения:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{!} = P_{2p+1}(x) + \sum_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{!}.$$

Тогда, как в (18) $r_{2p+1}(x) = \sum\limits_{k=2p+2}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} \le \left| P_{2p+1}\left(-\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \dfrac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right) \right| = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left| P_{2p+1}(x) \right|$, где $\varepsilon = \dfrac{|x|^{2p+2}}{2p+2}$, $P_{2p+1}(x) \approx \ln(1+x)$.

Из этой оценки следует интервал разложения $x \in (-1,1)$.

В заключении отметим, что для вычисления стандартных пределов нет необходимости учета точности вычисления, поскольку рассматриваются малые значения x, в конечном счете, предельный переход $x \to 0$ [6].В этом случае остаток разложения $r_n(x)/x$ стремится к нулю при $x \to 0$.

Выводы

Представление ряда элементарных функций в виде формулы Маклорена в рамках элементарной математики, без привлечения аппарата дифференциального исчисления, само по себе представляет ценность.

1) Стандартные разложения функций получены одним методом – методом неопределенных коэффициентов.

2) Формулы Маклорена для ряда функций позволяют легко получить и обосновать первый и второй стандартные пределы в теории пределов, более того, позволяют обосновать метод выделения главной части функции, который используется практически во всех разделах математики.

3) Представление основных элементарных функций в виде полиномов на этапе изучения теории пределов значительно упрощает вывод ряда математических положений, в том числе вычисления пределов.

4) В процессе вывода активно используется метод неопределенных коэффициентов, что полезно при интегрировании рациональных дробей.

Список использованной литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализТ.I. / Л.Д. Кудрявцев. –М.: Наука,1970 – 571 с.
2. Ильин В.А.Основы математического анализа Т. 1 / В.А. Ильин, Є.Г.Поздняк.–М.: Изд. ФМЛ, 1956.– 472с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисленияТ. 1./ Г.М. Фихтенгольц.–М.: Наука, «ФМЛ», 1972. - 795 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа Т. 1./ Э.Гурса. –М.: Государственное технико-творческое издательство, 1933. – 368 с.
5. Шведов И.А. Компактный курс анализа Т. 1 / И.А. Шведов. – Новосибирск, 2003. – – 113с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики Т. 1 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 479с.

Надійшла до редакції: 25.03.2013

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Малашенко В.В.

Л.П. Мироненко, О.О. Рубцова
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»
Наближення функцій многочленами і метод невизначених коефіцієнтів. *Цілю статті є альтернативний підхід отримання стандартних розкладів елементарних функцій у вигляді многочленів. Підхід використовує метод невизначених коефіцієнтів. Метод застосовано до тригонометричних і гіперболічних співвідношень. В результаті отримано всі відомі стандартні розклади функцій* $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$, $\ln(1+x), (1+x)^\alpha$ *по степенях* x *без залучення диференціального числення. Крім того, проведена оцінка залишкових членів розкладання також в рамках елементарної математики.*
Ключові слова: *многочлен, стандартні розкладання, функція, синус, косинус, експонента, метод, невизначені коефіцієнти.*

L.P.Mironenko, O.A. Rubtsova
Donetsk National Technical University
ApproximationsofSomeFunctionsbyPolynomialsandtheMethodofUndefinedCoefficients. *The purpose of the paper is an alternative approach for the representation of the basic elementary functions by polynomials of n-thorder* $\sin x, \cos x, shx, chx, e^x$, $\ln(1+x), (1+x)^\alpha$.
The approach is based on the method of indefined coefficients, which usuallyappears firstin integral calculus. As a rule the method is applied to rational fractions. This method can be applied successfully to the trigonometric and hyperbolic identities such that $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *and* $ch^2x - sh^2x = 1$. *As a result we have the following expansions*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(x), \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x),$$

$$shx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(x), \quad chx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x).$$

The other expansions of $\ln(1+x), (1+x)^\alpha, e^x$ *we will get using only the expansions for the functions* $\sin x, \cos x, shx, chx$. *The rest of the expansions are estimated only by the methods of elementary mathermatics without a derivative. This fact is very important. This allows introducing standards expansions in the course of mathermatics before differential calculus, for example in the theory of limits. In this case the first and second standardlimits* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\left(e^x - 1\right)/x = 1$ *are obvious and follow from our theory.*
Keywords: *polynomial, standard expansion, function, sine, cosine, exponential, method, undefined coefficients.*