МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ТЕОРІЯ

ЙМОВІРНОСТЕЙ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Красноармійськ 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів всіх форм навчання*)

Розглянуто на засіданні кафедри
Природничі науки
Протокол № 8 від 29 квітня 2009р.

Затверджено науково – видавни-
чою Дон НТУ
Протокол № 2 від 29 квітня 2009р.

Красноармійськ – 2009

УДК 330.4.

Теорія ймовірностей.. ***Опорний конспект лекцій***. / Укладачі: ст. викл. О.М. Данильчук, ас. М.О. Бабенко – Красноармійськ, Дон НТУ КІІ, Красноармійськ., Видавництво Красноармійського індустріального інституту, 2009. – 86с.

Даний курс складений відповідно до діючої програми курсу з даної дисципліни і призначений для всіх категорій студентів вузів, як денного так і заочного відділення, які вивчають дану дисципліну в тому чи іншому об'ємі.

Даний конспект лекцій орієнтований на організацію оволодіння даного матеріалу самостійно при опрацюванні студентами як технічних, так і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Теоретичний матеріал по всім темам супроводжується малюнками та розгляданням великої кількості прикладів та задач, які подані в доступній формі.

Укладачі О.М.Данильчук ст.в
М.О. Бабенко ас.

Відповідальний за випуск: Я.О. Ляшок, доц. к.т.н.

Рецензент:
О.Д.Петренко – доктор фізико – математичних наук, професор кафедри математики Донецького національного технічного університету

@ О.М. Данильчук, ст.викл., М.О. Бабенко, асист.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс „Теорія ймовірностей та математична статистика” є базовою дисципліною в системі фахових знань при підготовці спеціалістів, як економічного так і технічного профілю.

Теорія ймовірностей є теоретичною базою для математичної статистики, яка використовується під час організації виробництва, аналізу технологічних процесів, контролю якості продукції тощо.

Методи теорії ймовірностей використовуються для обґрунтування коректного використання теоретичної статистики при аналізі даних спостережень як в природничих, так і в соціально – економічних науках.

Метою запропонованих лекцій є стисле та послідовне подання основного курсу теорії ймовірностей, яке адаптоване для вищих навчальних закладів економічного та технічного профілю.

Опорний конспект лекцій є наочним відображенням програмного матеріалу з дисципліни „Теорія ймовірностей та математична статистика” і може бути використаний для вузівського супроводження лекцій з усіх тем курсу.

Систематичне та якісне подання основних тем сприяє свідомому засвоєнню курсу студентами, як денної так і заочної форми навчання. Опорний конспект лекцій призначений як для самостійної роботи студентів так і для підготовки до складання заліків та іспитів(МК).

Під час роботи з опорним конспектом студентам необхідно використовувати основну і додаткову літературу, а набуті теоретичні знання закріплювати розв’язанням практичних задач і прикладів, які теж можна знайти у рекомендованих збірниках задач. Доцільно також опрацьовувати методичні розробки кафедри з даної дисципліни.

Науку цю у давнині з азартних ігор почали,
віками потім розвивали, розумні люди на Землі,
щоб Ви ЇЇ застосували.

Тема1.: ***Основні поняття теорії імовірностей та комбінаторики.***
Мета: Ознайомити студентів з поняттями випадкових подій та принципами комбінаторики.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент лекції.***
II. ***Пояснення нового матеріалу.***
1. Предмет теорії імовірностей.
2. Коротка історична довідка.
3. Алгебра випадкових подій.
4. Означення та властивості імовірності та частості.
5. Основні поняття та принципи комбінаторики.

Фундамент кожної науки -
її важливі поняття,
основа красеня – будівл.і,
пригодної на все життя.

1. Якщо розглянути деякий дослід, у результаті якого може з'явитися або не з'явитися подія А. Прикладами такого досліду можуть бути:

а) дослід-виготовлення певного виробу, подія А-стандартність цього виробу;

б) дослід-кидання монети, подія А-випав герб.

Події бувають **достовірними, випадкові** та **неможливі.**

Достовірною називають таку подію, яка при розглянутих умовах обов'язково трапиться.

Неможливою називають таку подію, яка при розглянутих умовах не може трапитись.

Випадковою називають таку подію, яка при умовах, що розглядаються, може трапитися, а може й не трапитися.

Наприклад, якщо в урні є лише червоні кулі, то витягування червоної кулі-достовірна подія, а витягування з цієї урни кулі іншого кольору-неможлива подія.

Якщо кинути монету на підлогу, то поява герба буде випадковою подією, тому що замість герба може з'явитися надпис.

Випадкові події позначають великими літерами, наприклад *A, B, C, D, X, Y*, A_1, … A_n.

Кожна випадкова подія є наслідком багатьох випадкових або невідомих нам причин, які впливають на подію.

Якщо розглядати подію багато разів при однакових умовах то можна виявити певну закономірність її появи або не появи. Таку закономірність називають **імовірнісною закономірністю масових однорідних випадкових подій.**

У теорії імовірностей під **масовими однорідними випадковими** подіями розуміють такі події, які здійснюються багатократно при однакових умовах або багато однакових подій.

Предметом теорії імовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій.

2. Перші роботи, в яких виникли основні поняття теорії імовірностей, з'явились у XV – XVI ст. як спроба побудови теорії азартних ігор і належать таким видатним ученим, як Б.Спіноза, Дж. Кардано, Галілео Галілей.

Наступний етап (кінець XVII – початок XVIII ст.) розвитку теорії імовірностей пов'язаний з роботами Б. Паска ля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, К. Гауса, Я. Бернуллі, Н. Бернуллі, С Пуассона, А. Мавра, П. Лапласа, Т. Байєса.

В XIX ст. теорію імовірностей почали успішно застосовувати у страховій справі, артилерії, статистиці.

Лише наприкінці XIX ст. П.Л. Чебишов та його учні А.А. Марков та А.М. Ляпунов перетворили теорію імовірностей у математичну науку.

Подальшим розвитком теорії імовірностей та випадкових процесів зобов'язані таким математикам, як С.Н. Берштейн, А.М. Колмогоров, Б.В. Гніденко, А.В. Скороход, В.С. Королюк, Ю. Нейман, І.І. Гіхман, І.М. Коваленко.

3. ***Означення 1.*** *Події називають* ***несумісними,*** *якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.*

Приклад 1. Серед однорідних деталей у ящику є стандартні та не стандартні. Навмання беруть із ящика одну деталь.

Події

А-взята стандартна деталь, В- взята, нестандартна деталь

Несумісні тому, що взята лише одна деталь, яка не може бути одночасно стандартною та нестандартною.

Означення 2. *Події називають* ***сумісними,*** *якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно).*

Приклад 2. Два стрільця стріляють у мішень.

Події

A_1-перший стрілок влучив у мішень,

A_2-другий стрілок влучив у мішень
Будуть сумісними випадковими подіями.

Означення 3. *Випадкові події* A_1, A_2, ... A_n *утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з'явиться обов'язково.*

Приклад 3. Кидають шестигранний кубик. Позначимо події так

A_1-випала грань 1; A_2- випала грань 2; A_3- випала грань 3;
A_4- випала грань 4; A_5- випала грань 5; A_6- випала грань 6.

Події A_1, A_2, ... A_6 утворюють повну групу.

У прикладі 2 події A_1 та A_2 не утворюють повної групи. Але якщо позначити A_0 подію, що ніхто із стрільців не влучив у мішень, тоді події A_0, A_1, A_2 утворюють повну групу.

Означення 4. *Події називають* ***рівно можливими,*** *якщо немає причин стверджувати, що будь-яка з них можлива за інші.*

Приклад 4. Події-1,2,3,4,5 або 6 очок при киданні шестигранного кубика - рівноможливі при умові, що центр його ваги не зміщений.

Означення 5. *Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називають* ***протилежними.***
Подія, протилежна події А позначається $\bar{A}$.

Приклад 5. Якщо позначити через А подію, що при стрільбі по мішені вибито 8 очок, то подія $\bar{A}$-при стрільбі по мішені вибито будь-яке інше число очок.

Означення 6. ***Елементарними наслідками*** *називають такі події, які неможливо розділити на більш прості. Множину усіх можливих елементарних наслідків називають* ***простором елементарних наслідків.***

Простір елементарних наслідків може містити **скінчену, злічену** або **незлічену** множину елементів.

У ролі елементарних наслідків можна розглядати точки n-вимірного простору, відрізок лінії, точки поверхні S або об'єму V трьохвимірного простору, функцію однієї або багатьох змінних.

Приклад 6.

а) При дворазовому киданні монети простір елементарних наслідків містить 4 точки

{(Г, Г), (Г, Н), (Н, Г), (Н, Н)}

де Г-означає появу герба, Н- означає появу надпису.

б) Нехай по мішені стріляють одиночними пострілами до першого влучення. Можливі такі елементарні події

w_1{влучення при першому пострілі},

w_2{влучення при другому пострілі},

w_3{влучення при третьому пострілі},

іт.д.

У цьому випадку простір. елементарних наслідків може мати нескінченну кількість точок, які можна шляхом нумерації перелічити. Тому простір елементарних наслідків буде зліченим.

в) При виробництві кінескопів виникають неоднакові умови технологічного процесу, тому час роботи кінескопа відрізняється від його номінального значення, тобто буде випадковою подією.

Простір елементарних наслідків у цьому випадку буде нескінченною незліченою множиною, елементи якої неможливо пронумерувати.

Нехай А та В-випадкові події.

Об'єднанням (сумою)випадкових подій А U В (АБО А+В) називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій

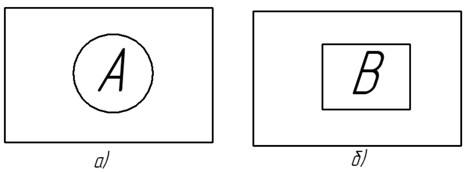
А або В

або

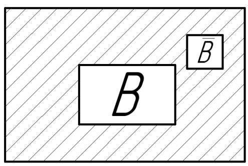
А та В.

Якщо А та В-несумісні, то А U В означає події А або події В.

Рис. 1.

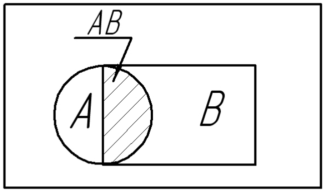


Подія А та подія В

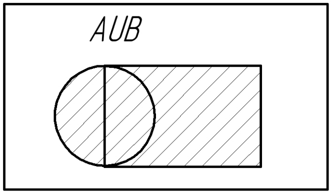


в)

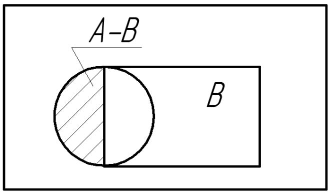
Подія В та протилежна їй подія $\bar{B}$



г) Заштрихована площина-добуток подій AB



д) Заштрихована площина-сума подій A U B



е) Заштрихована площина-різниця подій A — B

Означення 7. Об'єднанням (сумою) *випадкових подій* A_1 U A_2 U ... U A_n *називають таку випадкову подію, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій..*

Приклад 7. Стрілок робить один постріл у мішень, поділену на три області. Позначимо

подія A_1-влучення в першу область;
подія A_2-влучення в другу область;
подія A_3-влучення в третю область;
подія A_4-немає влучення у мішень;
подія B-влучення в першу або другу області;
подія D-влучення хоч би в одну область мішені.

Тоді маємо B= A_1 U A_2; D= A_1 U A_2 U A_3. Відмітимо, що події A_1, A_2, A_3 та A_4-несумісні.

***Означення 8. Різницею** B-A (або B/A) двох випадкових подій B, A називають усі наслідки, які полягають у тому, що подія A не з'являється.*

Добутком (перетином) A ∩ B (або A•B) випадкових подій A, B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій A та B одночасно.
Якщо A та B-несумісні, то добуток A ∩ B є множина, яка не має жодного елемента. Така множина називається ***пустою (порожньою)*** і позначається Ø.

***Означення 9. Добутком (перетином)** скінченої кількості випадкових подій* A_1, A_2, ... A_n *називають таку випадкову подію, яка полягає у сумісній появі усіх цих подій одночасно.*

Приклад 8. Стрілець стріляє двічі по мішені. Описати простір елементарних наслідків. Записати подію, яка полягає в тому, що: а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C); б)) стрілець влучив рівно один раз (подія D); в) стрілець не влучив у мішень (подія F).

Р о з в ' я з а н н я.
Позначимо
подія A-влучення при першому пострілі,
подія B-влучення при другому пострілі.

Простір елементарних наслідків складається з чотирьох подій
$\{AB, A\overline{B}, \bar{A}B, \bar{A}\overline{B}\}$.
а) Якщо стрілець влучив у мішень принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі $A\overline{B}$, або при другому пострілі $\bar{A}B$, або при обох AB.

Тобто, C= $A\overline{B} \cup \bar{A}B \cup AB$.
б) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому-ні, або при першому пострілі не влучив, а при другому-влучив.

Тому, D= $A\overline{B} \cup \bar{A}B$.
в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах.

Тобто, F= $\bar{A}\overline{B}$.

4. ***Означення 1. Імовірність події** є численна міра степеня об'єктивної можливості цієї події.*

Це означення імовірності визначає філософську суть імовірності, але не вказує закону знаходження імовірності будь-якої події.

Означення 2. (Класичне) Імовірність події А дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, які сприяють появі події А, до загального числа усіх єдиноможливих та рівноможливих елементарних наслідків.

Імовірність події А позначають P(А). Тому за означенням 2

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

де m-число елементарних наслідків, що сприяють події А, n-число усіх єдино можливих та рівно можливих наслідків.

Приклад 9. В урні 6 однакових за розміром куль: 2 червоні, 3 сині, 1 біла. Знайти імовірність появи червоної кулі, якщо беруть одну кулю з урни навмання.

Р о з в ' я з а н н я.

Нехай подія А-навмання взята червона куля. З урни можна взяти будь-яку кулю з шести, тому усіх можливих наслідків 6 (n=6). Для появи червоної кулі сприяти лише будуть 2 кулі, тому m=2. за формулою (1) отримаємо

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{3}.$

Якщо множина усіх елементарних наслідків нескінчена і, як наслідок, займає деяку область G, а подія А сприяє лише частина g $\in$ G, то обчислення імовірності події А виконують згідно геометричного означення імовірності.

Означення 3. (Геометричне) *Імовірність випадкової події А дорівнює відношенню міри g до міри G*

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)}, \qquad (2)$$

Приклад 10. Два туристичних пароплава повинні причалити до одного причалу. Час прибуття обох пароплавів рівноможливих на протязі доби. Визначити імовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплава дорівнює одній годині, а другогодвом годинам.

Р о з в ' я з а н н я

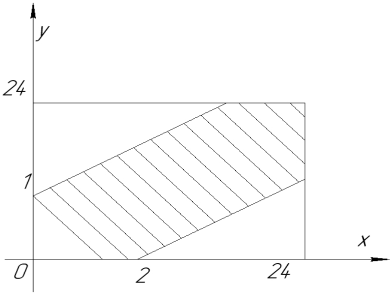


Рис.2.

Нехай X та У-час прибуття пароплавів. Можливі значення X та У: 0≤X≤24; 0≤У≤24. Сприятливі значення: У-X≤1; X-У≤2. Побудуємо цю область (мал.2.). Відношення площі заштрихованої фігури m(g) до площі квадрата, сторона якого дорівнює 24 згідно формули (2) дорівнює шуканій імовірності.

$$p = \frac{24 \cdot 24 - 0{,}5 \cdot 23 \cdot 23 - 0{,}5 \cdot 22 \cdot 22}{24 \cdot 24} = 0{,}121.$$

Відповідь: $p = 0{,}121.$

Означення 4. Відносною частотою *або* ***частістю*** *події А називають відношення числа випробувань, у яких подія А з'явилась, до числа фактично виконаних випробувань.*

Відносну частоту події А позначають W(А) або p_n(А). Отже,

$$p_n(A) = W(A) = \frac{m}{n},$$

де m-кількість випробувань, у яких з'явилась подія А,
n-кількість усіх випробувань.

Приклад 11. Відділ технічного контролю серед 100 виробів виявив 8 нестандартних. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартних виробів?

Р о з в ' я з а н н я.
Позначимо через А таку подію, як поява нестандартного виробу. Тоді за означенням частості події А одержимо

$$W(A) = \frac{8}{100} = 0{,}08.$$

Відповідь: $W(A) = 0{,}08$.

***Означення 5. Статистична імовірність** –це відносна частота (частість) або число близьке до неї.*

Властивості.

1. Якщо подія А достовірна, то її імовірність дорівнює одиниці, тобто $p(\text{A})=1$.
2. Якщо подія А неможлива, то її імовірність дорівнює нулеві, ,тобто $p(\text{A})=0$.
3. Якщо подія А випадкова, то її імовірність задовольняє співвідношення
$$0<P(\text{A})<1. \qquad (3)$$

5. ***Означення 1.*** *Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називають **сполуками** або **комбінаціями** цих елементів.*

Приклад 12. Із цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 можна скласти багато різних сполук по 2,3,4, ... , цифр. Деякі з них будуть відрізнятися кількістю цифр, а деякі відрізнятимуться лише порядком цифр. Наприклад 123, 8045, 56, 315, 230, 548.

Сполуки бувають трьох видів:
- переставлення;
- розміщення;
- сполучення.

Означення 2. *Сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називають **переставленням** цих елементів.*

Кількість переставлень з n елементів позначають P_n і знаходять за формулою
$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n= n\,! \qquad (4)$$
Позначення n ! говорять “n факторіал”. За означенням 0!=1.

Приклад 13. Скільки п’ятизначних чисел можна записати, використовуючи п’ять різних цифр (крім нуля)?

Р о з в ’ я з а н н я.
Сполуки, що утворюють з п’яти різних цифр п’ятизначні числа, можуть відрізнятися лише порядком цифр, тому такі сполуки будуть представленням з 5 елементів. Згідно формули (1) їх кількість буде $P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

Відповідь: $P_5=120$.

***Означення 3. Розміщенням з n елементів по m** називають такі комбінації, які складаються з m елементів, взятих з даних n елементів (m < n) і відрізняються як порядком, так і елементами.*

Кількість розміщень з n елементів по m позначають A_n^m і знаходять за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (5)$$

Приклад 14. Студенти другого курсу згідно учбового плану вивчають 10 дисциплін. На один день можна планувати заняття з 4 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

Р о з в ' я з а н н я.
Усі можливі розклади занять на один день-це сполуки з 10 по 4, які можуть відрізнятися дисциплінами або їх порядком, тобто ці сполуки-розміщення. Кількість таких розміщень згідно формули (2) буде

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Відповідь: $A_{10}^4 = 5040.$

***Означення 4. Сполученням з n елементів по m** називають комбінації, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються хоч би одним елементом.*

Кількість сполучень з n елементів по m позначають C_n^m і знаходять за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (6)$$

За означенням $C_n^n = 1;\ C_n^1 = n;\quad C_n^m = C_n^{n-m}.$

Між кількістю переставлень, розміщень та сполучень існує простий зв'язок

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (7)$$

Приклад 15. У ящику 10 виробів, з яких 2 нестандартні. Навмання беруть 6 виробів. Яка імовірність того, що усі взяті вироби будуть стандартними?

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо подію А-взято 6 стандартних виробів . згідно умови задачі, немає значення, в якому порядку беруть 6 виробів, тобто це будуть сполучення. Тому кількість усіх можливих елементарних наслідків буде

$$n = C_{10}^{6}.$$

Події А сприяють лише сполуки по 6 виробів з 8 стандартних у будь-якому порядку, тобто

$$m = C_{8}^{6}.$$

Отже згідно класичному означенню імовірності події А маємо

$$P(A) = \frac{C_8^6}{C_{10}^6} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} : \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{8!\cdot 6!\cdot 4!}{6!\cdot 2!\cdot 10!} = \frac{2}{15}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{2}{15}.$

Основні принципи комбінаторики.

Принцип суми. ***Якщо множина А містить n елементів, а множина В містить m елементів і*** **А∩В=Ø**, ***тоді множина*** **A U B** ***містить n + m елементів.***

Принцип добутку. ***Якщо множина А містить n елементів, а множина В містить m елементів то множина С усіх можливих пар (a_i, $b_к$) (i=1,2, ... n; к=1,2, ... m) містить n·m елементів.***

Приклад 16. У кошику 4 яблука першого сорту та 5 яблук другого сорту. Навмання беруть 2 яблука. Знайти імовірність того, що будуть взяті яблука різних сортів.

Р о з в ' я з а н н я.

Нехай подія А-навмання взяті 2 яблука різних сортів. Всього яблук 9, з них сполучень по 2 буде C_9^2, тобто кількість усіх можливих наслідків $n = C_9^2$. Події А будуть сприяти сполуки, утворені з пар, елементами яких будуть яблука різних сортів. Згідно принципу добутку кількість таких пар буде дорівнювати $m = C_4^1 \cdot C_5^1$. Використовуючи класичне означення імовірності, одержимо шукану імовірність події А

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = 4 \cdot 5 : \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 20 \cdot \frac{2}{8 \cdot 9} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{5}{9}.$

III. Підсумок заняття.

<u>Тема 2.:</u> ***Основні теореми теорії ймовірностей.***
<u>Мета:</u> Ознайомити студентів з основними теоремами імовірностей, формулою повної імовірності та формулою Байєса.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент лекції.***
II. ***Пояснення нового матеріалу.***

1. Додавання імовірностей несумісних подій.
2. Залежні та незалежні події, умовні імовірності.
3. Множення імовірностей.
4. Імовірність появи хоча б однієї випадкової події.
5. Теорема додавання імовірностей сумісних подїї.
6. Формули повної імовірності та Байєса.

На фундаменті міцному
будемо класти поверхи,
перегородки та сходинки,
що їх з'єднують на віки.

1. Теорема 1. Імовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі їх імовірностей

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Теорема 2. Якщо випадкові події **A_1, A_2, ... A_n** ***попарно несумісні, то імовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює сумі їх імовірностей***

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Приклад 1. Імовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область-0,35, у третю-0,15. знайти імовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у першу або другу області мішені.

Р о з в ' я з а н н я.
Позначимо за подію A_1-влучення у першу область мішені; за подію A_2- влучення у другу область мішені. При одному пострілі події A_1 та A_2 несумісні. Тому імовірність влучення в першу або другу області мішені буде

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}8.$$

Відповідь: $P(A_1 \cup A_2) = 0{,}8.$

Теорема 3. Сума імовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (1)$$

<u>Наслідок</u>. Дві протилежні події А та $\overline{A}$ утворюють повну групу, тому має місце рівність $P(A+\overline{A})=1,$ з якої одержуємо формулу

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (2)$$

знаходження імовірності протилежної події.

Приклад 2. Імовірність одержання повідомлення від певної особи на протязі доби дорівнює 0,25. Знайти імовірність того, що повідомлення на протязі доби від цієї особи не буде одержано.

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо за подію А-повідомлення від цієї особи на протязі доби поступить. За умовою задачі має місце співвідношення $P(A)=0{,}25$. Протилежна подія $\overline{A}$ означає, що на протязі доби від цієї особи повідомлення не поступить. За формулою (2) одержимо $P(\overline{A})=1-0{,}25=0{,}75$.

Відповідь: $P(\overline{A})=0{,}75$.

Приклад 3. За статистичними показниками держави можна зробити висновок, що 68% чоловіків, які досягли 60-ліття, досягають також і 70-ліття. Яка імовірність того, що 60-річний чоловік не досягне свого 70-річчя?

Р о з в ' я з а н н я.

Якщо подія А-60-річний чоловік досягає свого 70-ліття, то протилежна подія $\overline{A}$ -60-річний чоловік не досягає свого 70-ліття. За умовою задачі $P(A)=0{,}68,$ тому за формулою (2) одержимо

$P(\overline{A})=1-0{,}68=0{,}32$.

Отже, використовуючи статистичні дані держави, можна обчислити імовірність того, що 32% 60-річних чоловіків помре на протязі 10 років.

Відповідь: 32%.

2.***Означення 1**. **Випадкові А та В називають залежними,** якщо імовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи другої події. Якщо імовірність появи однієї події не залежить від появи або не появи другої, то такі події називають **незалежними.***

***Означення 2**. Імовірність події В, обчислена при умові появи події А, називають **умовною імовірністю події В і позначають Р(В\А) або** $P_A(B)$.*

Приклад 4. В урні 10 куль: 3 білих і 7 чорних. Навмання беруть дві кулі. Нехай подія А-взята біла куля; подія В-взята чорна.

Якщо кулю, яку взяли першою, повертають до урни, то імовірність появи другої кулі не залежить від того, яка взята перша куля.

Якщо перша куля не повертається до урни, то імовірність другої події залежить від результату першого випробування.

Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 2 білих кулі та 7 чорних, тому $P_A(B) = \frac{7}{9}$. Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 3 білих кулі та 6 чорних, тому $P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Отже імовірність події В залежить від появи або не появи події А.

<u>**Зауваження**</u>. ***Якщо події А та В незалежні, то умовна імовірність дорівнює безумовній імовірності, тобто***

$$P_A(B) = P(B).$$

3. ***Теорема 4. Імовірність сумісної появи двох випадкових подій А та В дорівнює добутку імовірностей однієї з цих подій та умовної імовірності другої події при умові, що перша подія з'явилась***

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (3)$$

Співвідношення (1) називають ***формулою множення імовірностей залежних випадкових подій.***

<u>**Наслідок.**</u> **У випадку незалежних випадкових подій А та В формула (1) приймає вигляд**

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (4)$$

і називається формулою ***множення імовірностей незалежних подій.***

Приклад 5. У деякому людському суспільстві 70% палять, 40% хворіють на рак легенів та 25% палять та мають рак легенів. Знайти імовірність того, що навмання взята особа з цього суспільства:

а) не палить, але має рак легенів;
б) палить, але не має раку легенів;
в) ніколи не палить, і не має раку легенів;
г) палить і має рак легенів;
д) або палить або має рак легенів.

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо події: А-особа палить; В-особа хворіє на рак легенів. Тоді за умовою задачі отримаємо $P(A)=0{,}7,\ P(B)=0{,}4,\ P(A\cdot B)=0{,}25,\ P(\overline{A})=0{,}3,\ P(\overline{B})=0{,}6.$

а) $P(\overline{A}\cdot B)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12;$

б) $P(A\cdot\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42;$

в) $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18;$

г) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}7+0{,}4-0{,}18=0{,}92;$

д) $P(A\cdot B\cup\overline{A}\cdot B)=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)=0{,}42+0{,}12=0{,}54.$

Відповідь: $P(\overline{A}\cdot B)=0{,}12;$ $P(A\cdot\overline{B})=0{,}42;$ $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0{,}18;$ $P(A\cup B)=0{,}92;$ $P(A\cdot B\cup\overline{A}\cdot B)=0{,}54.$

Приклад 6. Навести ілюстративну діаграму властивості
$P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A).$
Відповідь: дивись мал.1.

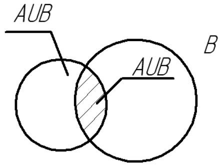


Рис.1.

4. Нехай є n сумісних випадкових подій A_1, A_2, … A_n. Позначимо через А подію, яка полягає в тому, що з'явиться хоча б одна з цих подій. Тоді подія $\overline{A}$ полягає в тому, що події A_1, A_2, … A_n не з'являться, тобто $\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}$. Події А та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тому

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad \Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})\,.$$

Звідси отримаємо

$$P(A)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}). \qquad (5)$$

За цією формулою потрібно обчислювати імовірність появи хоча б однієї випадкової події з n сумісних подій.

Приклад 7. Імовірність влучення у мішень першого стрілка дорівнює 0,7, другого стрілка-0,8, а третього-0,9. Знайти імовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка.

Р о з в ' я з а н н я.
Позначимо події
A_1-у мішень влучив перший стрілок;

A_2- у мішень влучив другий стрілок;
A_3- у мішень влучив третій стрілок;
A- у мішень влучив хоча б один стрілок.

За умовою задачі події A_1, A_2, A_3 незалежні, тому події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ та $\overline{A}_3$ також незалежні. Тому згідно формули (5) та формули множення імовірностей незалежних подій отримаємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A_3}). \qquad (6)$$

Так як

$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$ $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$ $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$ то за формулою (6) одержимо

$$P(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}994.$

5. ***Теорема 5. Якщо випадкові події A та B сумісні, то імовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх імовірностей без імовірності їх сумісної появи, тобто***

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (7)$$

Зауваження. ***Якщо події A та B незалежні, то формула (7) прийме вигляд***

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Для залежних випадкових подій маємо

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

Приклад 8. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Яка імовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку

а) трьом замовникам;
б) чотирьом замовникам;
в) дванадцяти замовникам;
г) трьом або чотирьом замовникам?

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо події
A-одержана кількість виробів ділиться на 3 без залишку;
B- одержана кількість виробів ділиться на 4 без залишку.
Використовуючи класичне означення імовірності, знаходимо

а) $P(A) = \dfrac{33}{100};$ б) $P(B) = \dfrac{25}{100};$ в) $P(A \cdot B) = \dfrac{8}{100};$

події A та B-сумісні, тому за формулою (1) одержимо г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{33}{100} + \frac{25}{100} - \frac{8}{100} = \frac{1}{2}.$

Відповідь: $P(A) = \frac{33}{100}$; $P(B) = \frac{25}{100}$; $P(A \cdot B) = \frac{8}{100}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$

6.*Теорема 5. Якщо випадкова подія А може з'явитись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій B_1, B_2, … B_n, що утворюють повну групу, тоді імовірність події А обчислюється за формулою*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A). \qquad (8)$$

Формулу (8) називають **формулою повної імовірності**.

Приклад 9. У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти імовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо такі події: А- з першого ящика взято стандартну деталь; B_1-з другого ящика переклали до першого стандартну деталь; B_2-з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь. Згідно з умовою задачі, з першого ящика можна взяти деталь лише після того, як здійсниться подія B_1 або подія B_2. Події B_1 та B_2 несумісні, а подія А може з'явитись лише сумісно з однією із них. Тому для знаходження імовірності події А можна використати формулу повної імовірності (1), яка у даному випадку прийме вигляд

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A). \qquad (9)$$

Знайдемо потрібні імовірності

$P(B_1) = \frac{9}{10}$; $P(B_2) = \frac{1}{10}$; $P_{B_1}(A) = \frac{16}{21}$; $P_{B_2}(A) = \frac{15}{21}$.

Підставимо ці значення у формулу (9) отримаємо

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{21} = \frac{144 + 15}{210} = \frac{53}{70}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{53}{70}.$

В умовах Теореми 1 невідомо, з якою подією із несумісних подій B_1, B_2, … B_n з'явиться подія А. Тому кожну з подій B_1, B_2, … B_n можна вважати гіпотезою. Тоді $P(B_к)$-імовірність к-ої гіпотези.

Якщо випробування проведено і в результаті його подія А з'явилась, то умовна імовірність $P_A(B_к)$ може не дорівнювати $P(B_к)$. Порівняння імовірностей $P(B_к)$ та $P_A(B_к)$ дозволяє переоцінити імовірність гіпотези при умові, що подія А з'явилася.

Для одержання умовної імовірності використовуємо теорему множення імовірностей залежних подій

$$P(AB_к) = P(B_к)P_{B_к}(A) = P(A)P_A P(B_к) \qquad \Rightarrow$$

$$P_A(B_к) = \frac{P(B_к)P_{B_к}(A)}{P(A)}. \tag{10}$$

підставимо у формулу (3) замість P(A) її значення з формули повної імовірності. Отримаємо

$$P_A(B_к) = \frac{P(B_к)P_{B_к}(A)}{\sum_{к=1}^{n} P(B_к)P_{B_к}(A)}, \qquad к = 1,2,3,\ldots,n \tag{11}$$

Формулу (11) називають **формулою Байєса.**

Вона дозволяє переоцінювати імовірності гіпотез. Це важливо при контролі або ревізіях.

Приклад 10. Деталі, виготовленні цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0.6, а до другого-0,4. Імовірність того, що придатна деталь буде признана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим-0,98. Придатна деталь при перевірці признана стандартною. Знайти імовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо такі події: А-придатна деталь признана стандартною; B_1-деталь перевіряв перший контролер; B_2- деталь перевіряв другий контролер. За умовою задачі отримаємо

$P(B_1)=0,6$; $P(B_2)=0,4$; $P_{B_1}(A) = 0,94$; $P_{B_2}(A) = 0,98.$

За формулою Байєса при к=1 отримаємо

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0,6\cdot 0,94}{0,6\cdot 0,94 + 0,4\cdot 0,98} = 0,59.$$

Відмітимо, що до появи події А імовірність $P(B_1)=0,6$, а після появи події А імовірність перевірки деталі першим контролером $P_A(B_1)=0,59$ поменшала.

Відповідь: $P_A(B_1)=0,59$.

Приклад 11. Імовірність знищення літака з одного пострілу для першої гармати дорівнює 0,2, а для другої гармати-0,1. Кожна гармата робить по одному пострілу, причому було одне влучення у літак. Яка імовірність того, що влучила перша гармата?

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо такі події: А-знищення літака з одного пострілу першою гарматою; В- знищення літака з одного пострілу другою гарматою; С-одне влучення у літак. Маємо чотири гіпотези

$$H_1 = A \cdot B; \quad H_2 = A \cdot \overline{B}; \quad H_3 = \overline{A} \cdot B; \quad H_4 = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

які утворюють повну групу подій. Імовірностями цих гіпотез будуть

$$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02; \quad P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18;$$

$$P(H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08; \quad P(H_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

Так як сума

$$H_1+H_2+H_3+H_4$$

є достовірна подія, то

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=1.$$

Умовні імовірності події С будуть

$$P_{H_1}(C) = 0; \quad P_{H_2}(C) = 1; \quad P_{H_3}(C) = 1; \quad P_{H_4}(C) = 0.$$

Тепер за формулою Байєса знаходимо шукану імовірність

$$P_C(H_2) = \frac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = 0{,}7.$$

Відповідь: $P_C(H_2) = 0{,}7.$

ІІІ. Підсумок заняття.

Тема 3.: ***Послідовності випробувань.***

Мета: ознайомити студентів з формулою Бернуллі та теоремами Бернуллі , а саме теорема Пуассона, Мавра-Лапласа та простою течією подій.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент лекції.***

II. ***Пояснення нового матеріалу***.

1. Схема та формула Бернуллі.
2. Граничні теореми у схемі Бернуллі.
3. Послідовність випробувань з різними імовірностями.
4. Теорема Бернуллі.
5. Проста течія подій.

Послідовно, по сходинках
із граничних теорем
піднімемось мов у ліфті
до центральних теорем.

1. У багатьох задачах теорії імовірностей, статистики та повсякденної практики треба досліджувати послідовність (серію) n випробувань. Наприклад, випробування “кинуто 1000 однакових монет” можна розглядати як послідовність 1000 більш простих випробувань – “кинута одна монета”. При киданні 1000 монет імовірність герба або надпису на одній монеті не залежить від того, що з’явиться на інших монетах. Тому можна казати, що у цьому випадку випробування повторюються 1000 разів незалежним чином.

Означення 1**. Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах імовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від появи або не появи A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають **схемою Бернуллі.

Нехай випадкова подія A може з’явитись у кожному випробуванні з імовірністю $P(A)=p$ або не з’явитись з імовірністю $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Нехай потрібно розв’язати задачу: знайти імовірність того, що при n випробуваннях подія A з’явиться m разів і не з’явиться n-m разів. Шукану імовірність позначимо $P_n(m)$.

Спочатку розглянемо появу події A три рази в чотирьох випробуваннях. Можливі такі події

$$AAA\overline{A},\quad AA\overline{A}A,\quad A\overline{A}AA,\quad \overline{A}AAA,$$

тобто їх $4 = C_4^3$.

Якщо подія A з’явилася 2 рази в 4 випробуваннях, то можливі такі події

$$AA\overline{A}\overline{A},\quad A\overline{A}A\overline{A},\quad A\overline{A}\overline{A}A,\quad \overline{A}AA\overline{A},\quad \overline{A}A\overline{A}A,\quad \overline{A}\overline{A}AA,$$

їх $6 = C_4^2$.

У загальному випадку, коли подія А з'являється m разів у n випробуваннях, таких складних подій буде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Обчислимо імовірність однієї складної події, наприклад,

$$\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-m}$$

Імовірність сумісної появи n незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій згідно з теоремою множення імовірностей, тобто

$$P(\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-m}) =$$

$$P(\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m}) \cdot P(\underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-m}) =$$

$$P^m(A)P^{n-m}(\overline{A}) = p^m q^{n-m}.$$

Кількість таких складних подій C_n^m і вони несумісні. Тому, згідно з теоремою додавання імовірностей несумісних подій, маємо

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Формулу (1) називають ***формулою Бернуллі.*** Вона дозволяє знаходити імовірність появи події А m разів при n випробуваннях, які утворюють схему Бернуллі.

Зауваження 1. ***Імовірність появи події А в n випробуваннях схеми Бернуллі менш m разів знаходять за формулою***

$$\mathbf{P_n\ (k<m) = P_n\ (0)+P_n\ (1)+...+P_n\ (m\text{-}1).}$$

Імовірність появи події А не менш m разів можна знайти за формулою

$$\mathbf{P_n\ (k \geq m) = P_n\ (m)+P_n\ (m+1)+...+P_n\ (n)}$$

або за формулою

$$P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k).$$

Імовірність появи події А хоча б один раз у n випробуваннях доцільно знаходити за формулою

$$P_n\ (1 \leq m \leq n) = 1 - q^n.$$

Зауваження 2. ***У багатьох випадках треба знаходити найбільш імовірне значення m_0 числа m появ події А. Це значення m визначається співвідношеннями***

$$np - q \le m_o \le np + p \text{ або } (n+1)p-1 \le m_o \le (n+1)p.$$

Число m_0 повинно бути цілим. Якщо *(n+1)*p− ціле число, тоді найбільше значення імовірність має при двох числах

$$m_1=(n+1)p-1 \text{ та } m_2=(n+1)p.$$

<u>**Зауваження 3.**</u> ***Якщо імовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з імовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою***

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \qquad (2)$$

Приклад 1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що

а) відмовлять два блоки;
б) відмовить хоча б один блок;
в) відмовлять не менше двох блоків.

Р о з в ' я з а н н я.

Позначимо за подію А відмову блока. Тоді імовірність події А за умовою прикладу буде

$$P(A)=p=1\text{-}0{,}8=0{,}2, \text{ тому } q=1\text{-}p=1\text{-}0{,}2=0{,}8.$$

Згідно з умовою задачі n=10. Використовуючи формулу Бернуллі та Зауваження 1., отримаємо

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^8 = 0{,}202$;

б) $P_{10}(1 < m \le 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^{10} = 0{,}8926$;

в)

$$P_{10}(2 \le m \le 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^{10} + C_{10}^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^9) = 0{,}6244.$$

Відповідь: $P_{10}(2) = 0{,}202;\ P_{10}(1 < m \le 10) = 0{,}8926;\ P_{10}(2 \le m \le 10) = 0{,}6244.$

Приклад 2. За годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин імовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше 0,952, якщо імовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

Р о з в ’ я з а н н я.

Застосовуючи формулу (2), знайдемо спочатку таку кількість виготовлених деталей, щоб з імовірністю Р=0,952 можна стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі, якщо імовірність браку за умовою р=0,01

$$n \geq \frac{\ln(1-0{,}952)}{\ln(1-0{,}01)} = \frac{\ln 0{,}048}{\ln 0{,}099} \approx 300.$$

Отже, за час $t = \frac{300}{20} = 15$(годин) автомат з імовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь.

Відповідь: $t = 15.$

Приклад 3. При новому технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Р о з в ’ я з а н н я.

Позначимо шукане число m_o. Згідно Зауваження 2.

$$np - q \leq m_o \leq np + p.$$

За умовою прикладу n=250, p=0,8, q=0,2, тому

$$199{,}8 \leq m_o \leq 200{,}8.$$

Але m_o повинно бути цілим числом, тому m_o=200.

Відповідь: m_o=200.

2. Знаходження імовірностей імовірностей $P_n(m)$ та $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ за формулою Бернуллі ускладнюється при досить великих значеннях n та при малих p та q. У таких випадках часто можна використовувати замість формули Бернуллі наближені асимптотичні формули.

Сформулюємо без доведення три граничні теореми, які містять наближені формули для імовірностей

$$P_n(m) \text{ та } P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$$

Теорема 1. (Теорема Пуассона.) Якщо $n \to \infty$ ***і*** $p \to 0$ ***так, що*** $n \to \lambda$, $0<\lambda<\infty$, **то**

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

для будь-якого постійного m=0,1,2,...

<u>**Наслідок 1**</u>**. Імовірність появи події А *m* разів у *n* випробуваннях схеми Бернуллі можна знаходити за наближеною формулою Пуассона**

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (3)$$

де $\lambda = np$.
Формулу (3) доцільно застосовувати при великих n та малих p.

Приклад 4. Підручник надруковано тиражем 100000 екземплярів. Імовірність невірного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти імовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

Р о з в ' я з а н н я.

Брошурування кожного підручника можна розглядати як випробування. Випробування незалежні і мають однакову імовірність невірного брошурування, тому задача вкладається у схему Бернуллі. Згідно з умовою задачі n=10000 досить велике; p=0,0001 мала; m=5.
Застосовуючи формулу Пуассона (3), одержимо

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = 0{,}0378.$$

Відповідь: $P_{100000}(5) = 0{,}0378.$

Для наведення ще двох граничних теорем треба спочатку визначити ***локальну*** та ***інтегральну функції Лапласа*** та ознайомитись з їх основними властивостями.

Означення 2. Локальною функцією Лапласа *називають функцію вигляду*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ця функція часто використовується, тому її значення для різних x наведені в підручниках та посібниках із теорії імовірностей. Вона табульована для додатних x.

Основні властивості локальної функції Лапласа.

1. Функція Лапласа φ(x) парна, тобто φ(-x)=φ(x);
2. Функція φ(x) визначена для усіх x $\in$ (-∞;∞);
3. φ(x)→0, коли x→ ± ∞;
4. $\varphi_{\max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

Графік локальної функції Лапласа має вигляд, зображений на мал.1.

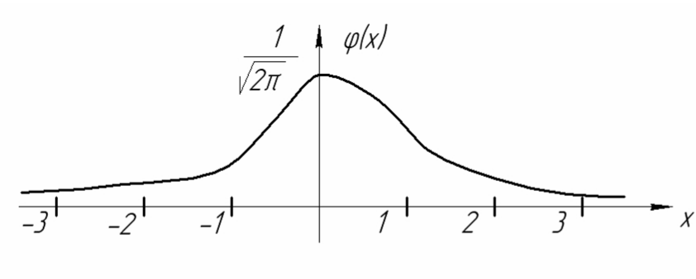


Рис.1.

Означення 3. Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Легко бачити, що між локальною функцією φ(x) та інтегральною функцією Φ(x) існує простий зв'язок

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt .$$

Основні властивості інтегральної функції Лапласа.

1. Інтегральна функція Лапласа є непарною, тобто Φ(-x)= –Φ(x);
2. Φ(0)=0;
3. Φ(x)=0,5 для x≥5.

Графік інтегральної функції Лапласа зображено на мал.2.

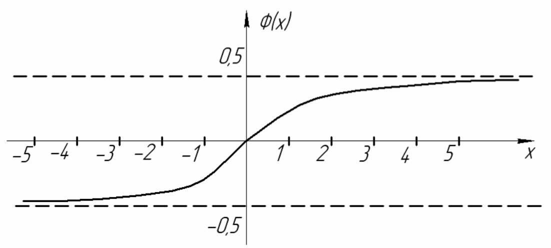


Рис.2.

Інтегральна функція Лапласа Φ(x) табульована для $x \in [0,5]$.

Теорема 2. (***локальна теорема Мавра-Лапласа***)

Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а імовірність p появи події A в усіх випробуваннях од-

накова, то імовірність появи події A m разів може бути знайдена за наближеною формулою

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m), \qquad (4)$$

де $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

<u>Зауваження </u>4. ***Формулу* (4) *доцільно використовувати при n*>100 *та npq*>20**.

Приклад 5. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з’явиться 267 разів?

Р о з в ’ я з а н н я.
У даному випадку *n* та *m* досить великі. Тому для знаходження $P_{800}(267)$ можна використати формулу (4). Маємо $P(A) = p = \dfrac{2}{6},\ q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$,

$$x_{267} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{801 - 800}{40} = \frac{1}{40} = 0{,}025.$$

Отже, за формулою (2) отримаємо

$$P_{800}(267) = \frac{3}{40}\varphi(0{,}025) = \frac{3}{40} \cdot 0{,}3988 = 0{,}03.$$

Значення φ(0,025) взято з таблиці так

X	φ(x)	x	φ(x)
0,02	0,398862		
		0,025	$\dfrac{0{,}398862 + 0{,}398783}{2} \approx 0{,}3988$
0,03	0,398783		

Відповідь: $P_{800}(267) = 0{,}03$.

Теорема 3. ***(інтегральна теорема Мавра-Лапласа.)***
Якщо у схемі Бернуллі в кожному із n незалежних випробувань подія A може з’явитися з постійною імовірністю p, тоді імовірність появи події A не менш m_1 та не більш m_2 разів може бути знайдена за формулою

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (5)$$

де Φ(x)- інтегральна функція Лапласа,

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (6)$$

Приклад 3. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться не менше 260 та не більше 274 разів?

Р о з в ' я з а н н я.

Для знаходження імовірності $P_{800}(260 \le m \le 274)$ використаємо формули (5) та (6). Маємо

$$x_2 = \frac{274 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{22}{40} = 0{,}55, \qquad x_1 = \frac{260 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{40}{3}} = -0{,}5,$$

$$P_{800}(260 \le m \le 274) = \Phi(0{,}55) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}55) + \Phi(0{,}5) =$$

$$= 0{,}298840 + 0{,}191482 = 0{,}400322.$$

Відповідь: $P_{800}(260 \le m \le 274) = 0{,}400322.$

Значення інтегральної функції Лапласа взято з таблиці і використана властивість непарності Ф(-0,5)= –Ф(0,5) функції Ф(x).

3. У схемі Бернуллі імовірність появи події А в усіх випробуваннях однакова. Але у практичній діяльності іноді зустрічаються і такі випадки, коли у n незалежних випробуваннях імовірності появи події А різні, наприклад, вони дорівнюють $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Тоді імовірності не появи події А також будуть різними

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ \ldots,\ q_n=1-p_n.$$

У цьому випадку не можна обчислювати за формулою Бернуллі імовірність появи події А у m разів у n випробуваннях, а треба використовувати твірну функцію

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k z) \qquad (7)$$

Правило

Шукана імовірність $P_n(m)$ дорівнює коефіцієнту, що стоїть при z^n.

Приклад 4. Імовірність відмови кожного з 4 приладів у 4 незалежних випробуваннях різні і дорівнюють $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}3$; $p_4=0{,}4$. Знайти імовірність того, що внаслідок випробувань

а) не відмовить жоден прилад;

б) відмовлять один, два, три, чотири прилади;

в) відмовить хоча б один прилад;

г) відмовлять не менше двох приладів.

Р о з в ' я з а н н я.

Імовірність відмови приладів у випробуваннях різні, тому застосовуємо твірну функцію (7), яка у даному випадку матиме вигляд

$$\varphi_n(z) = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}8 + 0{,}2z)(0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z).$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні члени. Тоді матимемо

$$\varphi_n(z) = 0{,}302 + 0{,}46z + 0{,}205z^2 + 0{,}031z^3 + 0{,}002z^4.$$

Відповідно Правилу звідси одержуємо відповіді на питання прикладу

а) $P_4(0)=0{,}302$;

б) $P_4(1)=0{,}46$; $P_4(2)=0{,}205$; $P_3(1)=0{,}031$; $P_4(4)=0{,}002$;

в) $P_4(1\le m\le 4)=1-P_4(0)=0{,}698$;

г) $P_4(m\ge 2)=1-(P_4(0)+P_4(1))=1-(0{,}302+0{,}46)=0{,}238$.

Відповідь: $P_4(0)=0{,}302$; $P_4(1)=0{,}46$; $P_4(2)=0{,}205$; $P_3(1)=0{,}031$; $P_4(4)=0{,}002$; $P_4(1\le m\le 4)=0{,}698$; $P_4(m\ge 2)=0{,}238$.

Приклад 5. Працівник обслуговує три станка, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що на протязі години перший станок не вимагатиме уваги працівника, дорівнює 0,9, а для другого та третього станків-0,8 та 0,85, відповідно. Якою є імовірність того, що на протязі години

а) жоден станок не потребуватиме уваги працівника;

б) усі три станок потребують уваги працівника;

в) хоч би один станок потребує уваги працівника?

Р о з в ' я з а н н я.

Цей приклад можна розв'язати з використанням теорем множення та додавання імовірностей. Розв'яжемо цей приклад з використанням твірної функції, яка у даному випадку прийме вигляд

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{3}(q_k + p_k z) = (0{,}1 + 0{,}9z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}15 + 0{,}85z) =$$

$$= 0{,}003 + 0{,}056z + 0{,}0329z^2 + 0{,}612z^3.$$

Отже, коефіцієнти при z^k (k=0,1,2,3) дорівнює імовірності того, що на протязі години уваги працівника не потребують k станків. Тому одержуємо відповіді на питання цього прикладу:

а) імовірність того, що усі три станка не потребують уваги працівника, дорівнює коефіцієнту при z^3, тобто $P_3(3)=0{,}612$;

б) $P_3(0)=0{,}003$;

в) $P_3(1 \le m \le 3)=1-P_3(3)=1-0{,}612=0{,}388$.

Відповідь: $P_3(3)=0{,}612$, $P_3(0)=0{,}003$, $P_3(1 \le m \le 3)=0{,}388$.

4. Теорема Бернуллі встановлює зв'язок теорії імовірностей з її практичними застосуваннями. Вона була доведена Я.Бернуллі в кінці XVII століття, а опублікована у 1713 році.

Теорема 4. (Я.Бернуллі)

Якщо у n незалежних випробуваннях імовірність p появи події A однакова і подія A з'явилася m разів, то для будь-якого додатного числа a має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq a\right)=0, \qquad (8)$$

тобто границя імовірності відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ події A від її імовірності на величину, що більше або дорівнює a, дорівнює нулеві.

Згідно означенню границі рівність (8) означає, що $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq a\right)=a$ ***- нескінченно мала величина. Та це означає, що подія*** $\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq a$ ***практично неможлива. Але тоді протилежна подія*** $\left|\frac{m}{n}-p\right|< a$ ***практично достовірна для будь-якого додатного числа*** **a**.

<u>**Наслідок 2**</u> ***з теореми Я.Бернуллі.***

Рівність $\left|\frac{m}{n}-p\right|=0$ ***може відрізнятись від практично достовірної події*** $\left|\frac{m}{n}-p\right|< a$, **a**>***0 на нескінченно малу величину. Це означає, що*** $\frac{m}{n}\to p,$ ***тобто відносна частота (частість)*** $W(A)=\frac{m}{n}$ ***події A відрізняється від імовірності*** **p** ***події A на нескінченно малу величину, яку практично можна не враховувати.***

<u>**Зауваження 5**</u>**. Формулу *(8)* можна записати з використанням інтегральної функції Лапласа Ф(x) у вигляді**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Звідси одержуємо важливу формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \qquad (9)$$

яка дозволяє розв'язувати багато задач.

Приклад 6. Імовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що частість появи події відхиляється від імовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,04.

Р о з в ' я з а н н я.
За умовою прикладу n=625, p=0,8, q=1-0,8=0,2, ε=0,04. Потрібно знайти $P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right)$.

За формулою (9) маємо

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right)\approx 2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\Phi(2{,}5)$$

З таблиці значень функції Лапласа Φ(x) знаходимо Φ(2,5)=0,4938. Отже,

$$2\Phi(2{,}5)=2\cdot 0{,}4938=0{,}9876 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right)=0{,}9876 .$$

Таким чином, шукана імовірність наближено дорівнює 0,9876.
Відповідь: 0,9876.

Приклад 7. Імовірність появи в кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,5. знайти число випробувань n, при якому з імовірністю 0,7698 можна чекати, що частість появи події відхиляється від її імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

Р о з в ' я з а н н я.
За умовою задачі p=0,5, q=0,5, ε=0,02

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le 0{,}02\right)=0{,}7698 .$$

Застосовуємо формулу (2). Тоді згідно умови одержимо

$$2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698 \Rightarrow \Phi(0{,}04\sqrt{n})=0{,}3849 .$$

Із таблиці значень інтегральної функції Лапласа знайдемо

$$0{,}3849=\Phi(1{,}2)\Rightarrow 0{,}04\sqrt{n}=1{,}2\Rightarrow\sqrt{n}=30\Rightarrow n=900 .$$

Отже, шукана кількість випробувань n=900.

Відповідь: n=900.

Приклад 8. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 виробів. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю 0,9544 межі інтервалу, що містить число m стандартних виробів серед перевірених.

Р о з в ' я з а н н я.
За умовою n=900, p=0,9, q=0,1,

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0,9\cdot 0,1}}\right)=0,9544 \quad\Rightarrow\quad \Phi(100\ \varepsilon)=0,4772\ .$$

З таблиці значень інтегральної функції Лапласа знаходимо

$$0,4772=\Phi(2),\qquad 100\ \varepsilon=2\Rightarrow\ \varepsilon=0,02\ .$$

Отже, з імовірністю 0,9544 відхилення частоти кількості стандартних виробів від імовірності 0,9 задовольняє нерівність

$$\left|\ \frac{m}{900}-0,9\ \right|\le 0,02\Rightarrow 0,88\le\frac{m}{900}\le 0,92.$$

З останніх співвідношень випливає, що шукане число m стандартних виробів серед 900 перевірених з імовірністю 0,9544 належить інтервалу 792 ≤ m ≤ 828.
Відповідь: 792 ≤ m ≤ 828.

5. Означення 4. Течією подій називають послідовність таких подій, які з'являються у випадкові моменти часу.

Наприклад, заява до диспетчерського пункту з викликом таксі.

Означення 5. *Течія подій називається* ***пуассонівською,*** *якщо вона:*

1. ***Стаціонарна****, тобто залежить від кількості k появ події та часу t і не залежить від моменту свого початку;*
2. ***Має властивість відсутності післядії,*** *тобто імовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше та не вливає на найближче майбутнє;*
3. ***Ординарна,*** *тобто імовірність появи більше однієї події в малий проміжок часу є величина нескінченно мала у порівнянні з імовірністю появи події один раз у цей проміжок часу.*

Означення 6. *Середнє число λ появ події A в одиницю часу називають* **інтенсивністю течії.**

Теорема 5. Якщо течія подій пуассонівська, то імовірність появи події A k разів за час t можна знайти за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (10)$$

де λ– інтенсивність течії.

Зауваження 6. Формулу (10) іноді називають математичною моделлю простої течії подій.

Приклад 9. Середня кількість замовлень, що поступають до комбінату побутового обслуговування кожну годину, дорівнює 3. Знайти імовірність того, що за дві години поступлять

а) 5 замовлень;

б) менше 5 замовлень;

в) не менше 5 замовлень.

Р о з в ' я з а н н я.

Маємо просту течію подій з інтенсивністю $\lambda=3$. За формулою (1) отримаємо

а) $P_2(5) = \frac{(3 \cdot 2)^5}{5!} e^{-3 \cdot 2} = \frac{6^5}{5!} e^{-6} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} e^{-6} = \frac{324}{5} e^{-6}$

б) $P_2(к<5)=P_2(0)+P_2(1)+P_2(2)+P_2(3)+P_2(4)=115e^{-6}$;

в) $P_2(к\geq5)=1- P_2(к<5)=1-115e^{-6}$.

Відповідь: $P_2(5) = \frac{324}{5} e^{-6}$, $P_2(к<5)=115e^{-6}$, $P_2(к\geq5)=1-115e^{-6}$.

Зауваження 7. Прикладами простої течії подій можуть бути: поява викликів на АТС, на пункти швидкої медичної допомоги, прибуття літаків до аеропорту або клієнтів у підприємство побутового обслуговування, серія відмов елементів або блоків приладів та інше.

III. Підсумок лекції.

Тема 4. **: Випадкові величини**

Мета: ознайомити студентів видами випадкових величин їх числовими характеристиками та їх застосування при розв'язанні задач.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент.***

II. ***Пояснення нового матеріалу***:

1. Види випадкових величин та способи їх завдання.
2. Закони розподілу та їх числові характеристики основні поняття.
3. Закони розподілу дискретних випадкових величин (ДВВ).
4. Числові характеристики дискретних випадкових величин.
5. Числові характеристики неперервних випадкових величин (НВВ)
6. Закони розподілу неперервних випадкових величин (НВВ) та їх числові характеристики.

1. Види випадкових величин та способи їх завдання.

При дослідженні багатьох проблем виникають такі випадкові події, наслідком яких є поява деякого числа, заздалегідь невідомого. Тому такі числові значення – випадкові.

Прикладом такої події є: кількість очок, що випадає при киданні грального кубика; кількість студентів, які прийдуть на лекцію; кількість цукрового буряка, який чекають одержати з одного гектара.

Випадковою величиною наз. таку величину, яка в наслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими величинами.

Випадкові величини доцільно позначати великими літерами $X, Y, Z,$,а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами. Наприклад, $X : x_1, x_2, \ldots, x_n.$.

Випадкові величини бувають **дискретними** та **неперервними**.

Означення 1. Дискретною випадковою величиною (ДВВ) *наз. таку величину, яка може прийняти відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними імовірностями.*

Приклад 1. Кількість влучень у мішень при трьох пострілах буде $X : 0; 1; 2; 3.$. Отже, X може приймати чотири ізольовані числові значення з різними імовірностями. Тому, X – дискретна випадкова величина.

Кількість викликів таксі на диспетчерському пункті також буде ДВВ, але при $t \to \infty$ значення Y також зростають, тобто їх кількість прямує до нескінченості $Y : 0; 1; 2; ..; n; \ldots$

Означення 2. Неперервною випадковою величиною (НВВ) *наз. величину, яка може прийняти будь - яке числове значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу $(a; b)$. Кількість можливих значень такої величини є нескінченна.*

Приклад 2. Величина похибки, яка може бути при вимірюванні відстані; час безвідмовної роботи приладу; зріст людини; розміри деталі, яку виготовляє станок – автомат.

Приклад 3. Розглянемо випадкові величини: кількість очок X та Y, що можуть з'явитись при киданні правильного грального кубика, та неправильного грального кубика. Їх можливі значення: $X : 1; 2; 3; 4; 5; 6 \qquad Y : 1; 2; 3; 4; 5; 6$

Імовірність появи будь – якого значення x_k дорівнює $\frac{1}{6}$, однакова для усіх можливих значень, а імовірність появи можливих значень будуть різними. Отже, випадкові величини та не рівні, тому що при $x_k = y_k$ маємо $P(x_k) \neq P(y_k)$, $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6.$.

Таким чином, для повної характеристики випадкової величини треба вказати не тільки усі її можливі значення, але й закон, за яким знаходять імовірності кожного значення.

$$P_k = P(x = x_k) = f(x_k)$$

1. Закони розподілу та їх числові характеристики основні поняття.

Означення 3. Законом розподілу випадкової величини *наз. таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкових величин і відповідними їм імовірностями.*

У випадку ДВВ ***x*** функціональну залежність можна задавати таблично, аналітично або графічно.

У випадку НВВ для її повної характеристики вводять інтегральну та диференціальну функцію розподілу.

Означення 4. Інтегральною функцією розподілу (функцію розподілу) *наз. імовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше* ***x****.*

Функцію розподілу позначають $F(x)$. Таким чином, $F(x) = P(X < x)$

Якщо НВВ х може приймати будь – яке значення з $(a;b)$, то

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

тобто імовірність прийняття величиною **X** значень з $(a;b)$ дорівнює приросту функції розподілу.

Формулу (1) часто наз. **основною формулою теорії імовірностей.**

Зауваження 1.

НВВ X, що приймає значення у проміжку $(a;b)$, має незліченну кількість можливих значень, тому набуття X певних значень $X = a$ або $X = b$ буде майже неможливою подією. Це означає, що, $P(X = a)$, та $P(X = b)$ будуть нескінченно малими величинами, які у практичних розрахунках можна не враховувати. Тому мають місце рівності

$$P(a < x < b) = P(a \le x \le b) = P(a < x \le b) = P(a \le x \le b)$$

Означення інтегральної функції розподілу та властивості імовірності Р дозволяють одержати такі **властивості функції розподілу**:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ – зростаюча функція, тобто $F(x_2) > F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;
3. $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Графік функції розподілу $F(x)$ може мати вигляд, який зображений на мал. 1.

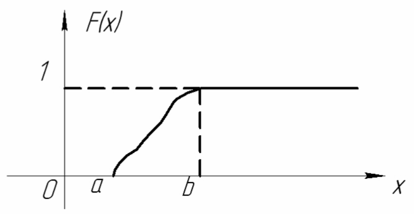


Рис. 1.

Означення 5. Диференціальною функцією розподілу або щільністю імовірностей неперервної випадкової величини *наз. похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають*

$$f(x) = F'(x) \qquad (2)$$

Назва **„щільність імовірностей”** випливає з рівності

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(X < x + \Delta x) - P(X < x)}{\Delta x}$$

Із формули (2) випливає, що функція розподілу $F(x)$ є первісною для диференціальної функції розподілу $f(x)$.

Теорема 1.

Імовірність того, що неперервна випадкова величина X приймає значення з інтервалу $(a; b)$, можна знайти за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Доведення:

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ - первісна для $f(x)$, тому згідно з формулою Ньютона – Лейбніца отримаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

Права частина рівності (1) і (4) рівні, тому і ліві їх частини рівні, тобто має місце рівність (3), яку й потрібно було довести.

Наслідок 1.

Якщо диференціальна функція розподілу (щільність імовірності) $f(x)$ відома, то інтегральну функцію розподілу $F(x)$ можна знайти за формулою

$$F(x) = \int_{+\infty}^{x} f(x)dx \qquad (5)$$

Диференціальна функція розподілу НВВ має такі властивості:

1. $f(x) \geq 0$ тому, що вона є похідною зростаючої функції $F(x)$;
2. $f(x) = 0$ при $x < a$ та $x \geq b$ тому, що є похідною $F(x) = 0$ при $x < a$ та $F(x) = 1$ при $x \geq b$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ тому, що подія $\{-\infty < X < +\infty\}$ достовірна.

Графік щільності імовірності $f(x)$ наз. **кривою розподілу** і він має вигляд мал. 2.

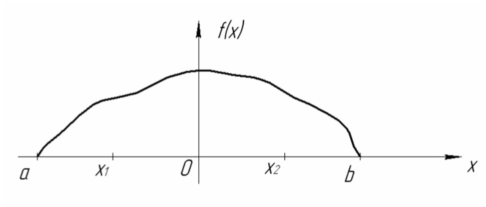


Рис. 2.

Приклад 4. Випадкова величина має щільність імовірностей $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$.

Визначити параметр a та функцію розподілу.

Розв'язання:

Параметр a знайдемо використовуючи властивість 3 диференціальної функції розподілу

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\,dx}{1+x^2}=a\cdot arctg\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=a\left[\lim_{b\to\infty} arctg\,b-\lim_{c\to-\infty} arctg\,c\right]=a\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=a\cdot\pi$$

Отже, отримали $1=a\cdot\pi$, $a=\dfrac{1}{\pi}$

Функцію розподілу знайдемо за формулою (5)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{\frac{1}{\pi}dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}arctg\,x\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}arctg\,x-\lim_{c\to-\infty} arctg\,c=\frac{1}{\pi}arctg\,x-\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(arctg\,x+\frac{1}{2}\right)$$

Відповідь: $a=\dfrac{1}{\pi}$.

Приклад 5. Випадкова величина x задана функцією розподілу

$$F(x)=x^2-4x+4 \qquad (*)$$

Визначити область значень випадкової величини x та імовірність того, що $x\ge 2{,}3$.

Розв'язання:

Згідно властивостям функції розподілу маємо $0\le F(x)\le 1$ тому повинні виконуватись умови $0\le x^2-4x+4\le 1$

Якщо область значень випадкових величин $[a;b]$, то $F(a)=0, F(b)=1$. Підставивши в (*) замість x a та b, тоді одержимо

$a^2-4a+4=0,\quad (a-2)^2=0,\quad a=2;$

Але в проміжку $[a;b], b>a$ тому $b=3$. Отже, областю значень НВВ x буде $[2;3]$.

Тепер знайдемо імовірність $P(x \geq 2{,}3)$. Подія $x < 2{,}3$ буде протилежною, тому

$$P(x \geq 2{,}3) = 1 - P(x < 2{,}3) = 1 - F(2{,}3) \qquad (**)$$

з рівності (*) отримаємо $F(2{,}3) = 2{,}3^2 - 4 \cdot 2{,}3 + 4 = 5{,}29 - 9{,}2 + 4 = 0{,}09$

тепер за формулою (**) знаходимо $P(x \geq 2{,}3) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$

Відповідь: $P(x \geq 2{,}3) = 0{,}91$.

3. Закони розподілу дискретних випадкових величин (ДВВ).

Способи задання та закони розподілу.

Нехай випадкова дискретна величина X приймає значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з відповідними імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Задати закон розподілу такої випадкової величини – це задати рівність $P_k = P(x = x_k)$, яку можна розглядати як функцію.

Тому закон розподілу X можна задати аналітично, таблично, графічно. Функція розподілу для ДВВ має вигляд $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_i < x} P(x_i)$.

Найбільш часто використовують табличний спосіб задання ДВВ, який наз. рядом розподілу і зображують у вигляді

X	x_1	x_2	…	x_n
P(x)	p_1	p_2	…	p_n

У першому рядку записані усі можливі значення X, а у другому рядку – відповідні імовірності, які мають властивість

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1 . \qquad (6)$$

Приклад 6. Умовами лотереї передбачено: один виграш – 100грн., два – 59грн., вісім – 10грн., дев'ятнадцять - 1грн. Знайти закон розподілу суми виграшу власником одного лотерейного білету, якщо продано 1000 білетів.

Р о з в ' я з а н н я:

Будемо шукати закон розподілу суми виграшу X у вигляді ряду розподілу. Тоді

X	100	50	10	1	0
P(x)	0,001	0,002	0,008	0,019	0,97

Де $P(0) = 1 - (0{,}001 + 0{,}002 + 0{,}008 + 0{,}019) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

Відповідь: $P(0) = 0{,}97.$

<u>Зауваження 2</u>.

Якщо випадкова дискретна величина може приймати нескінченну кількість значень, то її ряд розподілу (таблиця) буде мати нескінченну кількість елементів у кожному рядку, причому ряд $\sum_{k=1}^{n} P_k$ повинен бути збіжним, а його сума повинна дорівнювати одиниці.

Графічний спосіб.

Візьмемо прямокутну систему координат. На осі абсцис будемо відкладати можливі значення ДВВ, а на сої ординат – відповідні значення імовірності. Одержимо точки з координатами $(x_1;\, p_1), (x_2;\, p_2), \ldots, (x_n;\, p_n)$

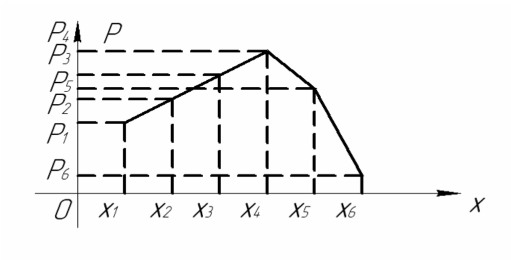


Рис.3.

Поєднавши ці точки прямими, одержимо графік мал. 3 у вигляді многокутника розподілу випадкової дискретної величини.

Значення ДВВ, імовірність якого найбільша, наз. **модою**. На мал. 3 мода - X_3.

Аналітичний спосіб задання ДВВ базується на задані певної функції, за якої можна знайти імовірність p відповідного значення x_k , тобто $p_k = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Біноміальний закон розподілу.

$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},\ m = 0, 1, 2, \ldots, n$ він використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з’являється з імовірністю p .

З їх числовими характеристиками познайомимося трохи пізніше.

Закон розподілу Пуассона.

ДВВ X приймає зліченну множину значень $(m = 0, 1, 2,...)$ з імовірностями $P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad a > 0$.

Цей розподіл використовують у задачах статистичного [характеру] контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для обчислення і кількості вимог на виплату страхових сум за рік, кількості дефектів однакових виробів.

Зауваження 3.

Якщо у формулі Пуассона покласти $a = \lambda t$, де λ - інтенсивність течії випадкових подій в одиницю часу, то формула прийме вигляд $P_t(X = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (m = 0, 1, 2,...)$.

Геометричний розподіл.

Цей розподіл має вигляд $P(X = m) = pq^{m-1}$, де $P = P(A)$ імовірність появи події A в кожному випробуванні, $q = 1 - p$, X – кількість випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробувань.

Геометричний розподіл застосовують у різноманітних задачах статистичного контролю якості виробів, в теорії надійності та у страхових розрахунках.

Гіпергеометричний розподіл.

Цей розподіл має вигляд $P(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$, $m = 0, 1, 2,..., n, \quad k \geq n$

він вказує імовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності N елементів, яка містить k елементів саме такої властивості.

Зауваження 4.

Якщо об'єм вибірки n малий у порівнянні з об'ємом N сукупності, тобто $\frac{n}{N} \leq 0{,}1; \quad \frac{n}{k} \leq 0{,}1; \quad \frac{n}{N-k} \leq 0{,}1;$ ***, то імовірність у гіпергеометричному розподілі будуть близькими***

до відповідних імовірностей біноміального розподілу з $P = \frac{k}{N}$.

Поліноміальний розподіл.

Цей розподіл має вигляд $P_n\left(X_1 = m_1, ..., X_s = m_s\right) = \frac{n!}{m_1!..m_s!} \cdot p_1^{m1} \cdot ... \cdot p_s^{ms}$. Він застосовується тоді, коли в наслідок кожного із здійснених повторних випробувань може з'явитися s різних подій A_i з імовірністю P_i, причому $\sum_{i=1}^{s} P_i = 1$.

4. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Найбільш часто використовують три числових характеристики:

1) **математичне сподівання**
2) **дисперсія**
3) **середнє квадратичне відхилення**.

Математичне сподівання та його властивості.

Означення 6. Математичним сподіванням ДВВ *X наз. число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності.*

Математичне сподівання ДВВ X позначають $M(X)$ або m_X, тобто

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k \quad (7)$$

Якщо X приймає нескінченну кількість значень , то

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty n} x_k \cdot p_k$$

Основні властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній $M(C) = C$
2. Постійний множник можна винести за знак математичного сподівання $M(CX) = CM(X)$

3. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних ДВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань $M\left(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n\right) = M\left(X_1\right) \cdot M\left(X_2\right) \cdot ... \cdot M\left(X_n\right)$

4. Математичне сподівання суми ВВ дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто $M\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + ... + M\left(X_n\right)$.

Математичне сподівання ДВВ X характеризує середнє значення ВВ X із врахуванням імовірностей його можливих значень.

Або під **математичним сподіванням розуміють центр розподілу випадкової величини (ВВ).**

Приклад 7. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені так

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	8	10
P	0,8	0,2

Знайти математичне сподівання ВВ $X \cdot Y$

Розв'язання:

$M\left(X\right) = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4.$

$M\left(Y\right) = 8 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 0{,}2 = 8{,}4.$

$M\left(X \cdot Y\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right) = 4{,}4 \cdot 8{,}4 = 36{,}96.$

Відповідь: $M(X \cdot Y) = 36{,}96.$

Приклад 8. Знайти математичне сподівання суми числа очок, які можуть з'явитися при киданні двох гральних кубиків.

Розв'язання:

Нехай кількість очок, які можуть з'явитися на першому кубику X, на другому Y. Тоді імовірність кожного з цих значень буде $\frac{1}{6}$.

$$M\left(X\right) = M\left(Y\right) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$$M\left(X + Y\right) = M\left(X\right) + M\left(Y\right) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

Відповідь: $M(X + Y) = 7.$

Дисперсія та її властивості.

Означення 7. Дисперсією ДВВ X наз. число*, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання.*

Дисперсією величини X позначають $D(X)$ або D_X

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) \qquad (8)$$

Основні властивості $D(X)$.

1. Дисперсія будь – якої ДВВ X невід'ємна $D(X) \geq 0$.
2. Дисперсія постійної величини C дорівнює нулеві $D(C) = 0$
3. Постійний множник C можна виносити за знак дисперсії, при цьому постійний множник треба піднести у квадрат $D(CX) = C^2 D(X)$.
4. Дисперсія ДВВ X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата ВВ X та квадрата її математичного сподівання

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 \qquad (9)$$

Зауваження 7. ***Формула (8) визначає дисперсію ВВ X, а за формулою (9) її доцільно знаходити***.

5. Дисперсія алгебраїчної суми ДВВ X та Y дорівнює сумі їх дисперсії $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

Зауваження 8. ***П'ята властивість дисперсії має місце для алгебраїчної суми не лише двох , але й скінченого числа дискретних випадкових величин.***

Приклад 9. Знайти дисперсію випадкової величини X, що задана законом:

X	-5	0	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Р о з в ' я з а н н я:

$M(X) = -5 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5\frac{1}{8} = 1,$

$M^2(X) = 1^2 = 1.$

тепер знаходимо X^2, тобто $M\left(X^2\right)$:

X	25	0	16	25
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$M\left(X^2\right)=25\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{2}+16\cdot\frac{1}{4}+25\frac{1}{8}=\frac{82}{8}$,

Тому $D(X)=\frac{82}{8}-1=\frac{74}{8}=9\frac{1}{4}=9{,}25.$

Відповідь: $M(X)=1,\ D(X)=9{,}25.$

Середньоквадратичне відхилення ДВВ.

У більшості випадків ВВ X має розмірність, наприклад, метр, міліметр, грам, тому її дисперсія $D(X)$ буде вимірюватись у квадратних одиницях цієї розмірності. У практичній діяльності доцільно знати величину розсіювання випадкової величини в розмірності цієї величини. Для цього використовують середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з дисперсії і позначається $\sigma(X)=\sigma_X=\sqrt{D(X)}$.

Поняття моментів розподілу.

Означення 8. Початковим моментом порядку k ВВ X *наз. математичне сподівання величини* X^k *і позначають*

$$\delta_k=M\left(X^k\right),\ k=1,2,...,n.$$

Означення 9. Центральним моментом порядку k випадкової величини X *наз. математичне сподівання величини* $(X-M(X))^k$ *і позначають*

$$\mu_k=M\left((X-M(X))^k\right),\ k=1,2,...,n.$$

Відмітимо, що $\nu_1=M(X),\quad \nu_2=M\left(X^2\right)$,

тому $D(X)=\nu_2-\nu_1^2,\quad \mu_1=M(X-M(X))=0;$

$\mu_2=M\left((X-M(X))^2\right)=D(X).$

Початкові та центральні моменти порядку $k\geq 2$ дозволяють краще враховувати вплив на математичне сподівання (центр розподілу ВВ X) тих можливих значень X, які великі та мають малу імовірність.

Приклад 10. ДВВ задана законом

X	1	2	5	100
P	0,6	0,2	0,19	0,01

Математичне сподівання буде:
$M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}19 + 100 \cdot 0{,}01 = 2{,}95$

Закон розподілу X^2 буде

X	1	4	25	10000
P	0,6	0,2	0,19	0,01

Тому $M(X^2) = 1 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}19 + 10000 \cdot 0{,}01 = 106{,}15.$

Отже, $M(X^2)$ значно більше $M(X)$, а це означає, що роль значення $X = 100$ зросла.

Зауваження 9.

Доцільно знати числові характеристики основних законів розподілу дискретних випадкових величин, які можна привести у вигляді наступної таблиці:

ТАБЛИЦЯ 1. НА СТОРІНЦІ 82

5. Числові характеристики неперервних випадкових величин (НВВ)

У випадку НВВ математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення мають такий же смисл та властивості, як і для ДВВ, але обчислюють їх за іншими формулами.

Нехай можливі значення неперервної випадкової величини X заповнюють відрізок $[a; b]$. Поділимо $[a; b]$ на n частин довжиною $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

У кожній частині візьмемо точку ξ_k, $k = 1, 2, .., n$. Тоді щільність імовірності $f(x)$ в точці ξ_k буде $f(\xi_k)$ - імовірність того, що X прийме значення ξ_k . Одержимо розподіл НВВ X вигляду

X	ξ_1	ξ_2	…	ξ_n
P	$f(\xi_1)$	$f(\xi_2)$	…	$f(\xi_n)$

Сума $\sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)$

характеризує математичне сподівання X тим точніше, чим менше буде Δx.

Ця сума буде дорівнювати математичному сподіванню $M(X)$ неперервної величини X, якщо перейти до границі при $\Delta x \to 0$. Згідно з означенням визначеного інтеграла маємо $M(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k) = \int_a^b x f(x) dx$.

Теорема 2.

Якщо НВВ прийме значення у відрізку $[a; b]$ та має місце щільність імовірності $f(x)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx \tag{10}$$

Теорема 3.

Якщо $f(x)$ є щільність імовірності X, НВВ Y є функцією випадкової величини X, тобто $У = \varphi(X)$, тоді математичне сподівання Y знаходиться за формулою $M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$.

Зауваження 10.

Якщо можливі значення X належать відрізку $[a; b]$, то центр розподілу $M(X)$ величини X знаходиться у цьому проміжку тому, що із нерівностей $\int_a^b a f(x)dx < \int_a^b x f(x)dx < \int_a^b b f(x)dx$ та умови нормування $\int_a^b f(x)dx = 1$ випливають співвідношення

$$a < M(X) = \int_a^b x f(x)dx < b.$$

Якщо щільність імовірності $f(x)$ - парна функція, тобто $f(-x) = f(x)$, то центр розподілу X співпадає з початком $M(X) = 0$. Якщо графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x = a$, то $M(X) = a$.

Як і у випадку ДВВ, дисперсію НВВ X визначають так:

$$D(X)=M\left((x-M(x))^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2\cdot f(x)dx \tag{11}$$

а обчислюють за формулою

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M^2(X) \tag{12}$$

Якщо можливі значення X належать лише скінченому проміжку $(a;\,b)$, то рівності (11) та (12) приймають вигляд

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(x))^2\cdot f(x)dx \tag{13}$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-M^2(X) \tag{14}$$

Середнє квадратичне відхилення НВВ визначають та обчислюють так: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Приклад 11. Знайти числові характеристики ВВ X, яка задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$$

Розв'язання:

Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу, тобто щільність імовірності $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{25}, & 0\le x\le 5\\ 0, & x>5\end{cases}$$

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{2x}{25}dx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^5=\frac{10}{3}$$

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{2x}{25}dx=\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx-\frac{100}{9}=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^5-\frac{100}{9}=\frac{25}{2}-\frac{100}{9}=\frac{25}{18}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{25}{18}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}\approx 1{,}19.$$

Відповідь: $M(X)=\dfrac{10}{3},\ D(X)=\dfrac{10}{3},\ \sigma(X)=\dfrac{5}{3\sqrt{2}}\approx 1{,}19.$

6. Закони розподілу неперервних випадкових величин (НВВ) та їх числові характеристики

Рівномірний розподіл.

Означення 10. Величина X розподілена рівномірно у проміжку $(a;b)$, *якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її імовірностей у цьому проміжку постійна, тобто*

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in(a,b) \\ 0, & \text{при } x\notin(a,b) \end{cases}. \qquad (15)$$

Величина постійної $c=\dfrac{1}{b-a}$ визначається **умовою нормування** $P(a<X<b)=c(b-a)=1$

Якщо X рівномірно розподілена на проміжку $(a;b)$, то імовірність належності X будь – якому інтервалу $(x_1;x_2)$ є $(a;b)$ пропорційна довжині цього інтервалу

$$P(x_1<X<x_2)=c(x_2-x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}.$$

Іншими словами, імовірність влучення X в інтервал $(x_1;x_2)$ дорівнює відношенню довжини цього інтервалу до довжини усього проміжку $(a;b)$.

Графік рівномірного розподілу НВВ зображено на малюнку:

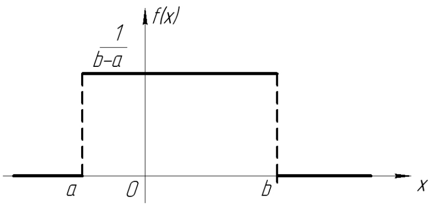


Рис.4.

Числовими характеристиками НВВ X, що розподілена за рівномірним законом, будуть

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx+\int_{a}^{b}xf(x)dx+\int_{b}^{\infty}xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{xdx}{b-a}=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$M(X)=\frac{b+a}{2} \qquad (16)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)\,dx=\int_a^b \frac{(x-M(X))^2}{b-a}\,dx=\left.\frac{\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^3}{3(b-a)}\right|_a^b=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (17)$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6} \qquad (18)$$

Показниковий розподіл

Означення 11. Випадкову величину X наз. розподіленою за показниковим законом, *якщо щільність її імовірностей має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & при\ x\ge 0\\ 0, & при\ x<0\end{cases}, \qquad (19)$$

де $\lambda > 0$ - параметр.

Показниковому розподілу задовольняють: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера.

Числовими характеристиками показникового розподілу будуть:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (20)$$

Отже, якщо НВВ Х розподілена за показниковим законом, то вона має математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення рівні.

Приклад 12.Знайти числові характеристики ВВ, розподіленої за законом

$$f(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Р о з в ' я з а н н я:

За умовою задачі $\lambda = 4$, тому $M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{4}=0{,}25$,

$$D(X)=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}=0{,}0625.$$

Відповідь: $M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{4}=0{,}25$, $D(X)=0{,}0625$.

__Зауваження 11.__

Якщо ВВ Х розподілена за показниковим законом, то її функція розподілу (інтегральна функція розподілу) має вигляд $F(x)=1-e^{-\lambda x}$. Тому основна формула теорії імовірностей набуває вигляду

$$P(a < X < b) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda} \tag{21}$$

Приклад 13.Величина Х розподілена за законом

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x \ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Знайти імовірність того, що Х потрапить в інтервал $(0,4;1)$.

Р о з в ' я з а н н я:

ВВ Х розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda = 3$.. Використовуючи формулу (21), отримаємо

$$P(0,4 < X < 1) = e^{-0,4\cdot 3} - e^{-1\cdot 3} = e^{-1,2} - e^{-3} \approx 0,333 - 0,05 \approx 0,283.$$

Відповідь: $P(0,4 < X < 1) \approx 0,283.$

Нормальний розподіл.

***Означення 12. ВВ Х наз. розподіленою нормально**, якщо щільність її імовірностей має вигляд*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{22}$$

де a та σ - параметри розподілу.

Графік цієї функції $f(x)$ наз. **нормальною кривою або кривою Гаусса**.

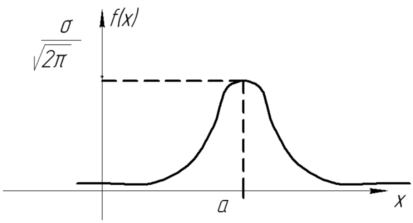


Рис. 5.

При $a = 0$ та $\sigma = 1$ нормальну криву наз. **нормованою,** її рівняння буде $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тобто це є **функція Лапласа**.

Заміна змінної $Z = \frac{X - a}{\sigma}$, використання інтеграла Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ та формул (10), (11) і (14) дозволяють одержати **числові характеристики нормально розподіленої НВВ X** у вигляді

$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2; \quad \sigma(X) = \sigma \tag{23}$$

Отже, математичне сподівання нормального розподілу дорівнює параметру a цього розподілу, а середнє квадратичне відхилення дорівнює параметру σ.

<u>Зауваження 12.</u>

Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a ***та*** σ***, то випадкова величина*** $Z = \frac{X - a}{\sigma}$ ***буде розподілена за нормованим нормальним законом і*** $M(Z) = 0, \sigma(Z) = 1.$

Інтегральною функцією нормального закону розподілу буде

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

а **для нормованого нормального закону**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{24}$$

Імовірність влучення в інтервал $(c; d)$ **нормально розподіленої ВВ X знаходять за формулою**

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c - a}{\sigma}\right) \tag{25}$$

де функція Лапласа $\Phi(x)$ має вигляд (24)

Приклад 14. ВВ X розподілена за нормальним законом, її математичне сподівання дорівнює 30, а середнє квадратичне відхилення – 10. Знайти імовірність того, що X матиме значення з інтервалу $(10;50)$.

Р о з в ' я з а н н я:

Згідно умови $a = 30$, $\sigma = 10$, тому за формулою (25) отримаємо

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Відповідь: $P(10 < X < 50) = 0{,}9544.$

Приклад 15. Зріст студентів розподілено за нормальним законом. Математичне сподівання зросту студентів дорівнює 175 см., а середнє квадратичне відхилення – 6 см. Визначити імовірність того, що хоча б один із п'яти викликаних студентів буде мати зріст від 170 до 180 см.

Р о з в ' я з а н н я:

Зріст студента X – випадкова величина, $M(X) = 175\,см,\ \sigma = 6\,см.$

Позначимо події: А – із 5 викликаних студентів зріст хоча б одного належить проміжку $(170;180)$; $\overline{A}$ - зріст усіх 5 викликаних студентів не належить проміжку $(170;180)$.

Величина X розподілена нормально, тому за формулою (12) знайдемо імовірність того, що зріст одного викликаного студента належить проміжку $(170;180)$.

$$P(170 < X < 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 2\Phi(0{,}83 =)2 \cdot 0{,}2967 = 0{,}5934.$$

Імовірність того, що зріст одного викликаного студента не належить проміжку $(170;180)$ буде $P = 1 - P(170 < X < 180) = 1 - 0{,}5934 = 0{,}4066.$

Застосовуючи теорему множення імовірностей незалежних подій, знайдемо імовірність $\overline{A}$:

$P(\overline{A}) = (0{,}4066)^5 = 0{,}0111$.

Отже, імовірність шуканої події А буде

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0111 = 0{,}9889.$

Відповідь: P(A)=0,9889.

Правило трьох сигм.

Якщо випадкова величина X розподілена нормально, то $P(|X - a| > 3\sigma) \to 0$, тобто імовірність того, що абсолютна величина відхилення X від її математичного сподівання прямує до 0, а це означає, що $|X-a|<3\sigma$ - практично достовірна подія.

Якщо закон розподілу ВВ X невідомий, але $|X-a|<3\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.

Розподіл χ^2 („ хі - квадрат”)

Нехай $X_i\ (i=1,2,...,n)$ нормальні, нормовані незалежні величини, тобто їх математичне сподівання дорівнює нулю, середнє квадратичне відхилення дорівнює одиниці і кожна з них розподілена за нормальним законом. Тоді сума квадратів цих величин $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ розподілена по закону χ^2 з $k=n$ **степенями вільності.**

Якщо величини X_i зв'язані одним лінійним співвідношенням, наприклад, $\sum_{i=1}^{n}X_i=n\overline{X}$, то число степенем вільності буде $k=n-1$.

Диференціальна функція розподілу χ^2 має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}\cdot x^{\frac{k}{2}-1} & при\ x>0\end{cases},$$

де $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ - гама функція $\Gamma(n+1)=n!$

Відмітимо, що розподіл χ^2 визначається параметром – числом степенем вільності k. Коли k зростає, розподіл χ^2 прямує до нормального розподілу дуже повільно.

Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=k;\quad D(X)=2k;\quad \sigma(X)=\sqrt{2k}.$$

Розподіл Стьюдента.

Нехай X – нормальна нормована ВВ, а Y незалежна від X величина, яка розподілена за законом χ^2 з k степенями вільності. Тоді величина

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{У}{k}}}$$

має розподіл, який наз. t – **розподілом, або розподілом Стьюдента** (це є псевдонім англійського статистика Вільяма Госсета) з k степенями вільності.

При зростанні k розподіл Стьюдента швидко наближається до нормального розподілу .

$$f(Z) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{Z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad -\infty < Z < \infty$$

функція розподілу імовірностей

$$F(Z) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^{Z} \left(1 + \frac{Z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dz \cdot$$

Числові характеристики:

$$M(Z) = 0; \quad D(Z) = \frac{k}{k-2}; \quad \sigma(Z) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}.$$

III. Підсумок заняття.

<u>Тема 5. :</u> Закон великих чисел та центральна гранична теорема.
<u>Мета:</u> застосування вмінь та навичок студентів важливих граничних теорем та застосування їх при розв'язані економічних задач.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент лекції.***
II. ***Пояснення нового матеріалу.***
1. Коротка історична довідка.
2. Нерівність Чебишова.
3. Теорема Чебишова, Бернуллі і Пуассона.
4. Важливі граничні теореми.

1. **Коротка історична довідка.**

Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так у разі великого числа проведених експериментів відносна частота подій *W(A)* виявляється стабільність і за імовірністю наближається до імовірності *P(A)*; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за імовірністю до її математичного сподівання.

Давно було помічено, що хоча результати окремих спостережень проведених в схожих умовах коливаються сильно і їх середні значення виявляють чудову стійкість.

В психології, наприклад, відомо, що передбачити поведінку окремої людини в даній ситуації можливо далеко не завжди, тоді як поведінку великої кількості людей часто можна передбачити майже завжди.

Усі ці явища об'єднують під спільною назвою **закону великих чисел**, який можна загалом сформувати так:

У разі великого числа експериментів, що здійснюється для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Або під законом великих чисел в теорії імовірностей ***розуміють сукупність теорем, в яких стверджується, що існує зв'язок між середнім арифметичним достатньо великого числа випадкової величини і середнім арифметичним їх математичного сподівання.***

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових сталих величин.

Граничні теореми прийнято ділити на дві групи.

Перша називається ***законом великих чисел.*** Теореми цієї групи встановлюють стійкість середніх значень. При великому числі випадкових експериментів їх середній результат втрачає властивість випадковості.

Перша версія закону великих чисел з’явилась в 1713 р. і носить назву **теореми Я. Бернуллі. Вона пояснює ефект стійкості відносної частоти випадкової події.**

Появу формулювання закону великих чисел близько до сучасної пов’язують з роботою французького математика Пуассона надрукованої в 1837 р.

Але загальний метод доведення стійкості був даний в 1867 р. російським математиком П.Л.Чебишовим. В розвиток закону великих чисел великий вклад внесли російські математики А.А.Марков, А.Н.Колмогоров, Ю.В.Лінник.

Друга група граничних теорем вивчає ***граничні закони розподілу***. Ці теореми встановлюють умови, при яких закон розподілу суми великого числа випадкових величин необмежено наближається до нормального.

Першим результатом в цьому напрямку рахується теорема А.Муавра (1730 р.) про збіжність біноміального розподілу до нормального. Пізніше вона була узагальнена французьким математиком П.С.Лапласом і отримала назву локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа.

В 1927 р. Гейзенберг відкрив **принцип невизначеності**, який стверджує, що вимірювальне пізнання обмежене. Невизначеність являється невід’ємною частиною нашого життя, проте при великому числі однотипних експериментів можна встановити певні закономірності.

Попередньо сформулюємо два важливих результати, які служать для доведення граничних теорем, хоча мають і самостійну цінність. Вони дозволяють оцінити імовірність попадання значення випадкової величини в заданий інтервал, опираючись лише на знання числових характеристик, без звертання до точного знання закону розподілу випадкових величин.

2. Нерівність Чебишова

Нерівність Маркова (лема Чебишова)

Якщо випадкова величина X приймає тільки невід’ємні значення і має математичне сподівання $M(X)$ **то для** $\forall$ $\varepsilon > 0$ **має місце рівність:**

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon} \text{ або } P(X \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon} \qquad (1)$$

ε - епсилон

Доведення:

Застосуємо доведення для випадку НВВ Х. Розглянемо очевидний ланцюг:

$$M(X)=\int_0^{\infty} x f(x)dx \ge \int_{\varepsilon}^{\infty} x f(x)dx \ge \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon f(x)dx = \varepsilon\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = \varepsilon P(X \ge \varepsilon)$$

Звідки слідує формула (1).

Приклад 1. Сума всіх вкладів у відділенні банку складає 2 млн. грн., імовірність того, що випадково взятий вклад не перевищить 10 тис. грн. дорівнює 0,6. Що можна сказати про число вкладників?

Р о з в ' я з а н н я:

X – розмір випадкового взятого вкладу.

n – число вкладників.

$M(X)=\dfrac{2000}{n}$ (тис. грн.) – середній розмір вкладу

$$P(X \le 10) \ge 1-\frac{M(X)}{10n}=1-\frac{2000}{10n}=1-\frac{200}{n}$$

$$P(X \le 10)=0{,}6$$

$$0{,}6 \ge 1-\frac{200}{n}, \quad \frac{200}{n} \ge 0{,}4, \quad n \le 500.$$

Відповідь: число вкладників не більше 500.

Нерівність Чебишова

Для будь – якої випадкової величини, яка має математичне сподівання і дисперсію, справедлива нерівність Чебишова:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ або } P(|X-M(X)|>\varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

Зауваження 1.

Нерівність Чебишова має для практики обмежене значення, оскільки часто дає грубу, а іноді і тривіальну (не викликаючи інтересу) оцінку.

Зауваження 2.

Для випадкової величини $X=m$, яка має біноміальний закон розподілу з математичним сподіванням $a=M(X)=np$ і дисперсію $D(X)=npq$:

$$P(|m-np| \le \varepsilon) \ge 1-\frac{npq}{\varepsilon^2} \tag{3}$$

Для частості $\frac{m}{n}$ події в n незалежних експериментах, в кожному з яких воно може відбуватися з однією і тією ж імовірністю $a = M\left(\frac{m}{n}\right) = p$ і мати дисперсію $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (4)$$

Приклад 2. Імовірність здачі вчасно всіх екзаменів студентом дорівнює 0,7. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що доля здавши вчасно всі екзамени із 2000 студентів заключається в межах від 0,66 до 0,74; $\varepsilon = 0{,}04$.

Розв'язання:

$n = 2000, \quad \varepsilon = 0{,}04, \quad p = 0{,}7, \quad q = 0{,}3.$

$$P\left(\left|\frac{m}{2000} - 0{,}7\right| \le 0{,}04\right) \ge 1 - \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{2000 \cdot (0{,}04)^2} = 1 - \frac{0{,}21}{3{,}2} = \frac{299}{320} \approx 0{,}9344.$$

Відповідь: 0,9344.

Приклад 3. Імовірність виходу з автомата стандартної деталі дорівнює 0,96. оцінити за допомогою нерівності Чебишова імовірність того, що число бракованих серед 2000 деталей знаходиться в межах від 60 до 100 (включно). Уточнити імовірність цієї ж події за допомогою інтегральної теореми Муавра – Лапласа.

Розв'язання:

За умовою імовірність того, що деталь бракована $p = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$. Число бракованих деталей має біномінальний закон розподілу, а його межі 60 і 100 $a = M(X) = np = 2000 \cdot 0{,}04 = 80$.

Тому оцінку імовірності шуканої події можна знайти за формулою (3):

$$P(60 \le m \le 100) = P(-20 \le m - 80 \le 20) = P(|m - 80| \le 20),$$

$$P(|m - 80| \le 20) \ge 1 - \frac{2000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04}{20^2} = 0{,}808.$$

А тепер застосовуємо інтегральну теорему Муавра – Лапласа:

$$P(|m - 80| \le 20) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_2 = \frac{100 - 80}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}} = \frac{20}{8{,}8}; \qquad x_1 = \frac{60 - 80}{8{,}8} = -\frac{20}{8{,}8};$$

$$P(|m - 80| \le 20) \approx \Phi(-2{,}27) - 2\Phi(2{,}27) = 2 \cdot 0{,}4881 = 0{,}9762.$$

Відповідь: 0,9762.

Ви бачите, що ми отримали різні результати, це пояснюється тим, що нерівність Чебишова дає лише нижню границю оцінки імовірності шуканої події для $\forall$ випадкової величини, а інтегральна теорема дає достатньо точне значення самої імовірності P.

Правило трьох сигм.

Приклад 4. Оцінити імовірність того, що відхилення $\forall$ випадкової величини від її математичного сподівання не більше трьох середньоквадратичних відхилень.

Р о з в ' я з а н н я:

Використовуючи функцію Лапласа:

$$P(|x-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Знайдемо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відхилення від $a=M(X)$ на σ, 2σ, 3σ.

$$P(|x-a|<\sigma)=2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$$

$$P(|x-a|<2\sigma)=2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$$

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}46869=0{,}9972$$

Звідси слідує правило трьох сигм:

Якщо випадкова величина Х має нормальний розподіл, то відхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищує потроєне середнє квадратичне відхилення (3σ).

2. Теорема Чебишова, Бернуллі і Пуассона.

Теорема (Чебишова.)

Теорема. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені (не перевищують постійного числа С) то яке б не було мале додатне число ε імовірність нерівності $\left|\frac{X_1, X_2, ..., X_n}{n}-\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$ буде як завгодно бли-

зька до одиниці, якщо число випадкових величин достатньо велике:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

або

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \qquad (5)$$

Доведення:

Розглянемо випадкову величину $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ і знайдемо її числові характеристики:

$$M(Y) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$$

$$D(Y) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

Так як за умовою теореми $D(X_i) \leq C$, отримаємо $D(Y) \leq \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot C = \frac{C}{n}$.

Застосувавши до випадкової величини Y нерівність Чебишова, отримаємо:

$$P(|Y - M(Y)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(Y)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

При $n \to \infty$ отримаємо формулу (5).

<u>Наслідок 1.</u>

Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні випадкові величини мають одне й теж математичне сподівання a, і якщо дисперсії цих величин рівномірно обмежені, то яке б не було мале число $\varepsilon > 0$ імовірність нерівності $\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$ буде як завгодно близька до одиниці, якщо число випадкових величин достатньо велике:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6)$$

Приклад 5. Унаслідок фінансової перевірки 500 банків було з'ясовано, що середній борг кредиторів на 1 млн. грн. більший від середнього боргу попередньої перевірки. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення боргу кредиторів перед банком 3 млн. грн.

Р о з в ' я з а н н я:

$C=3$ млн. грн. , $n=500$, $\varepsilon=1$ млн. грн.

$$P\left(\left|\frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500}X_i-\frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500}M(X_i)\right|<1\right)\geq 1-\frac{3}{500\cdot 1^2}=1-\frac{3}{500}=1-0{,}006=0{,}994.$$

Відповідь: 0,994.

Оскільки ця імовірність дуже велика, то відхилення боргу можна вважати випадковим.

Теорема Чебишова і її наслідок мають велике практичне значення.

Наприклад, страховій компанії треба встановити розмір страхового внеску, який повинен заплатити людина, яка страхується, при цьому страхова компанія зобов'язується виплатити при настанні страхового випадку певну страхову суму.

Розглядаючи частоту/збитки людини, яка страхується при настанні нещасного випадку як величину випадкову і володіючи відомою статистикою таких випадків, можна визначити середнє число / середні збитки при настанні нещасних випадків, які на основі теореми Чебишова з великою впевненістю можна вважати величиною взагалі невипадковою. Тоді на основі цих даних і допущеної страхової суми вимірюється розмір страхового внеску. Без урахування діючого закону великих чисел (теореми Чебишова) можливі вагомі збитки страхової компанії (при зниженому розмірі страхового внеску), або втрата страхових послуг (при завищеному розмірі внеску).

Теорема Бернуллі.

Нехай $W(A)$ - загальне число появи події А в серії з n послідовних незалежних експериментів, а p – імовірність появи події в кожному з них. Тоді для $\forall$ будь – якого $\varepsilon>0$ має місце:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (7)$$

Приклад 6. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити імовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі ($W(A)$) від імовірності 0,95 не більш ніж на величину 0,02.

Р о з в ' я з а н н я:

$p = 0{,}95 \quad q = 0{,}05 \quad n = 400 \quad \varepsilon = 0{,}02$ ·

$$P(|W(A) - 0{,}95| \le 0{,}02) \ge 1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{400 \cdot (0{,}02)^2} = 1 - \frac{0{,}0475}{0{,}16} = 1 - 0{,}2969 = 0{,}7031 \cdot$$

Відповідь: 0,7031.

Теорема Пуассона

(якщо імовірність події в кожному експерименті різна).

Якщо послідовність незалежних експериментів імовірність появи події А в кожному експерименті дорівнює $p_к$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (8)$$

Теорема Бернуллі дає теоретичне твердження заміни невідомої імовірності події її частістю.

Наприклад, імовірність народження хлопчика нам невідома і в якості її значення ми можемо взяти частість цієї події, яка нам відома за статистичними даними і наближено дорівнює 0,515.

3. Центральна гранична теорема.

Розглянутий вище закон великих чисел встановляє факт наближення середнього великого числа випадкових величин до певних постійних Але цим не обмежується закономірності, які виникають в результаті сумарної дії випадкових величин. Було помічено, що при деяких умовах сукупність дій випадкових величин приводить до визначеного, а саме – до **нормального закону розподілу**.

Центральна гранична теорема – представляє собою групу теорем, які присвячені встановленню умов, при яких виникає нормальний закон розподілу. Серед цих теорем важливе місце належить теоремі Ляпунова.

Теорема Ляпунова.

Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ - незалежні випадкові величини у кожної з яких існує математичне сподівання $M(X_i) = a$, а дисперсія $D(X_i) = \sigma^2$, абсолютний центральний момент третього порядку $M(|X_i - a_i|^3) = m_i$ і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0 \qquad (9)$$

то закон розподілу суми $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, при $n \to \infty$ необмежено наближається до нормального з математичним сподіванням $\sum_{i=1}^{n} a_i$ і дисперсією $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

Теорема без доведення.

Так, наприклад, споживання електроенергії для побутових потреб в місяць для кожної квартири багатоповерхового будинку можна представити у вигляді n різних випадкових величин. Якщо потреба електроенергії по своєму значенню різко не виділяється серед інших, то на основі теореми Ляпунова можна рахувати, що потреба електроенергії всього будинку, тобто сума n незалежно випадкових подій буде випадковою величиною, маючи наближено нормальний закон розподілу. Якщо, наприклад, в одній із квартир помістити обчислювальний центр, у якого рівень потреб електроенергії порівняно вищий, то висновок про наближений нормальний розподіл потреб електроенергії всього будинку буде неправомірним, так як буде порушена умова (1), тобто потреба електроенергії обчислювального центру буде грати важливу роль в утворенні всієї суми споживання.

Означення 1.

Початковим моментом k- го порядку випадкової величини X наз. математичне сподівання k- го степеня цієї величини:

$$\nu_k = M\left(X^k\right) \qquad (10)$$

Означення 2.

Центральним моментом k- го порядку випадкової величини X наз. математичне сподівання k- го степеня відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$\mu_k = M\left[X - M(X)\right]^k$$

або

$$\mu_k = M(X-a)^k, \qquad (11)$$

де $a = M(X)$.

Математичне сподівання $M(X)$ або перший початковий момент характеризує середнє значення або положення розподілу випадкової величини X; дисперсія $D(X)$, або другий центральний момент μ_2 - степінь розсіювання розподілу X відносно $M(X)$.

Третій центральний момент μ_3 служить для характеристики (асиметрії або скошеності) розподілу.

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_3^3},$$

де A_s - наз. **коефіцієнтом асиметрії випадкової величини**.

Четвертий центральний момент μ_4 служить для характеристики крутості (островершинности или плосковершинности) розподілу.

Ексцесом випадкової величини наз. число

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_i^4} - 3 \cdot$$

III. Підсумок заняття.

САМОСТІЙНЕ ВИВЧЕННЯ

(Пов'язана з аудиторним навантаженням)

Тема 6.: Закони розподілу та числові характеристики двохвимірних випадкових величин.

Мета: застосування вмінь та навичок студентів закону розподілу двохвимірних випадкових величин, їх числових характеристик, а саме двовимірних дискретних випадкових величин та неперервних двовимірних випадкових величин та їх застосування при розв'язані економічних задач.

Хід лекції.

I. ***Організаційний момент лекції.***

II. ***Пояснення нового матеріалу.***

1. Загальні поняття. Закон розподілу імовірностей дискретної двохвимірної випадкової величини.
2. Неперервна двохвимірна випадкова величина.
3. Залежні та незалежні випадкові величини.
4. Числові характеристики двохвимірної випадкової величини.

1. Загальні поняття. Закон розподілу імовірностей дискретної двохвимірної випадкової величини

Раніше ми розглядати ВВ Х, які при кожному випробування визначались одним можливим числовим значенням. Тому таку ВВ Х наз. **одновимірною**.

Якщо можливі значення ВВ визначають у кожному випробуванні 2, 3,..., n числами, то такі величини наз. відповідно **двох -, трьох -, ... n – вимірними**.

Двохвимірну ВВ будемо позначати (X,Y), Х та Y при цьому будуть компонентами. Величини Х та Y, що розглядаються одночасно, утворюють систему двох ВВ.

Означення 1. *Сукупність n випадкових величин, які розглядають одночасно $(X_1, X_2, ..., X_n)$ наз.* ***системою випадкових величин***.

Систему n ВВ $(X_1, X_2, ..., X_n)$ можна розглядати як випадкову точку в n – вимірному просторі з координатами $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ або як випадковий вектор, направлений з початку системи координат у точку $M(X_1, X_2, ..., X_n)$.

При n = 2 маємо систему двох ВВ (X,Y), яку можна зобразити як випадкову точку $M(X,Y)$ на площині xOy або як випадковий вектор $\overrightarrow{OM}$.

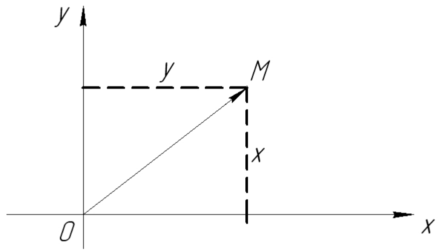


Рис. 1.

Багатовимірні ВВ бувають **дискретними** та **неперервними** (компоненти цих величин відповідно будуть дискретними та неперервними).

Означення 2. Законом розподілу двохвимірної випадкової величини *наз. перелік можливих значень цієї величини* $(x_i; y_k)$ *та їх імовірностей* $p(x_i; y_k)$, $i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., m.$

Дуже часто закон розподілу двохвимірної ДВВ загають у вигляді таблиці х двома входами.

У першому рядку таблиці записують усі можливі значення компоненти X. У першому стовпчику таблиці записують усі можливі значення компоненти Y. На перетині k – го рядка та i – го стовпчика записують імовірність $p(x_i; y_k)$ того, що двохвимірна ВВ (X,Y) прийме значення $(x_i; y_k)$, $i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., m.$

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_i, y_2)$	…	$p(x_n, y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_k	$p(x_1, y_k)$	$p(x_2, y_k)$	…	$p(x_i, y_k)$	…	$p(x_n, y_k)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Події $\left(X = x_i, Y = y_k\right)$, $i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ..., m$. утворюють повну групу, тому сума імовірностей дорівнює 1, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p\left(x_i, y_k\right) = 1. \tag{1}$$

Дійсно, події $\left(x_1, y_1\right)$, $\left(x_i, y_2\right)$,..., $\left(x_i, y_m\right)$ несумісні, тому імовірність $P\left(x_i\right)$ того, що X прийме значення x_i за теоремою додавання імовірностей буде

$$P\left(x_i\right) = P\left(x_1, y_1\right) + P\left(x_i, y_2\right) + ... + P\left(x_i, y_m\right) \tag{2}$$

аналогічно

$$P\left(y_k\right) = P\left(x_1, y_k\right) + P\left(x_i, y_k\right) + ... + P\left(x_n, y_k\right). \tag{3}$$

Приклад 1. Знайти закони розподілу компонент двохвимірної випадкової величини, закон розподілу якої заданий таблицею

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

Р о з в ' я з а н н я:

Закони розподілу X та Y будуть мати вигляд

Y	y_1	y_2
P	0,6	0,4

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

$p(x_1) =$ 0,1 + 0,06 = 0,16 $p(y_1)$ = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6

$p(x_2) =$ 0,3 + 0,18 = 0,48 $p(y_2)$ = 0,06 + 0,18 + 0,16 = 0,4

$p(x_2)$ = 0,2 + 0,16 = 0,36

Контроль: 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1; 0,6 + 0,4 = 1

Означення 3. Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) двохвимірної випадкової величини $\left(X, Y\right)$ *наз. функцію двох змінних* $F\left(x, y\right)$*, яка визначає для кожної пари чисел* $\left(X, Y\right)$ *імовірність виконання нерівностей* $X < x$; $Y < y$, *тобто*

$$F(x,y)=P(X<x;Y<y). \qquad (4)$$

Властивості функції розподілу.

1. $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. $F(x,y)$ не спадна функція за кожним аргументом, тобто

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \text{ якщо } x_2 > x_1$$
$$F(x,y_2) > F(x,y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1$$

3. Мають місце граничні співвідношення

$$F(-\infty;y)=0;\ F(x_1;-\infty)=0;\ F(-\infty;\infty)=0;\ F(\infty;y)=1.$$

4. Імовірність влучення випадкової точки у прямокутник

$\{x_1 \le X \le x_2;\ \ y_1 \le Y \le y_2\}$

можна знайти за формулою

$$P(x_1<X<x_2;\ y_1<Y<y_2)=\{F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)\}-\{F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\} \qquad (5)$$

Геометричний зміст функції розподілу $F(x,y)$ - це імовірність того, що випадкова точка $M(X,Y)$ попаде у нескінченний прямокутник з вершиною в точці (X,Y) і розміщений нижче та лівіше цієї вершини.

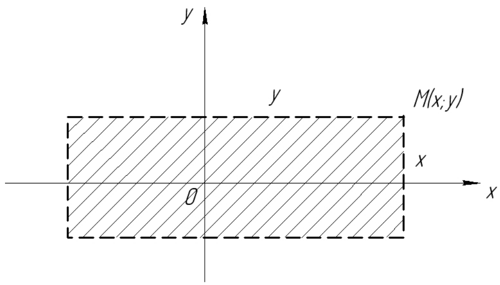


Рис. 2.

Приклад 2. Знайти імовірність влучення випадкової точки (X,Y) у прямокутник, обмежений лініями $x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{3}, y=\frac{\pi}{4}$, якщо задана функція розподілу вигляду

$$F(x,y)=\sin x\cdot\sin y;\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я:

У заданому випадку $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_2 = \dfrac{\pi}{4}$, $y_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Згідно з формули (5) отримаємо:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right) = \left[\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] -$$

$$-\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right] = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}075.$$

Відповідь: 0,075

2. Неперервна двохвимірна випадкова величина.

Двохвимірну випадкову величину можна задати функцією розподілу $F(x,y) = P(X < x; Y < y)$ або диференціальною функцією розподілу.

Означення 4. Диференціальною функцією розподілу (двохвимірною щільністю імовірностей) $f(x,y)$ двох вимірної ВВ (X,Y) *наз. мішану частинну похідну другого порядку від інтегральної функції розподілу*

$$f(x,y) = \frac{\nu^2 F(x,y)}{\nu x \nu y} \tag{6}$$

Аналогічно визначають щільність імовірностей n – вимірної ВВ, тобто

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\nu^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\nu x_1 \cdot \nu x_2 \cdot \ldots \cdot \nu x_n}.$$

Таким чином, якщо функція розподілу $F(x,y)$ двохвимірної ВВ відома, то за формулою (6) можна знайти диференціальну функцію розподілу $f(x,y)$ цієї ВВ.

Якщо відома щільність імовірностей $f(x,y)$ двохвимірної випадкової величини, то її **функцію розподілу** знаходять за формулою

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{7}$$

тобто з використанням невласного двократного інтегралу.

Імовірність влучення випадкової точки (X,Y) в довільну область D знаходять за формулою

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (8)$$

Диференціальна функція розподілу $f(x,y)$ задовольняє властивостям:

1. $f(x,y)\geq 0$, тобто вона не від'ємна;
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

3. Залежні та незалежні випадкові величини.

Дві ВВ **незалежні**, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина.

Випадкові величини **залежні**, якщо закон розподілу однієї величини залежить від того, які значення прийняла друга величина.

Теорема.

Щоб випадкові величини X та Y були незалежні, необхідно і достатньо, щоб інтегральна функція системи (X,Y) дорівнювала добутку інтегральних функцій кожної з них

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Наслідок.

Щоб неперервні ВВ X та Y були незалежними, необхідно і достатньою, щоб диференціальна функція системи (X,Y) дорівнювала добутку диференціальних функцій складових

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

4. Числові характеристики двохвимірної випадкової величини.

Математичне сподівання двохвимірної випадкової величини (X,Y) характеризує координати центру розподілу ВВ.

Ці координати у випадку неперервних величин знадять за формулою

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dx\,dy; \quad m_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dx\,dy \qquad (9)$$

Дисперсії D_X та D_Y характеризують розсіювання випадкової точки (X,Y) вздовж координатних осей Ox та Oy, відповідно.

Їх знаходять за формулами:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dx\,dy - m_X^2 \qquad (10)$$

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dx\,dy - m_Y^2 \qquad (11)$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = \sqrt{D_X}, \quad \sigma_Y = \sqrt{D_Y}$.

Крім даних характеристик використовують також інші характеристики, а саме - **кореляційний момент** (або **коваріація**).

$$\text{cov}(X,Y) = k_{XY} = M\big((X - m_X)\cdot(Y - m_Y)\big).$$

Для неперервних величин X та Y

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)\cdot(y - m_Y) f(x,y)dx\,dy \qquad (12)$$

Коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (13)$$

Коефіцієнт кореляції є кількісна характеристика залежності ВВ X та Y і часто використовується в статистиці.

***Означення 5. ВВ X та Y наз. некорельованими**, якщо їх кореляційний момент або коефіцієнт кореляції дорівнює 0.*

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. $|r_{XY}| \le 1$;
2. якщо X та Y незалежні, то $r_{XY} = 0$;
3. якщо між X та Y є лінійна залежність $Y = aX + b$, де a *та* b - постійні, то $|r_{XY}| = 1$

Зауваження.

Якщо момент кореляції або коефіцієнт кореляції не дорівнює 0, тоді ВВ X та Y – корельовані. Дві корельовано величини обов'язково залежні. Але дві залежні ВВ можуть бути корельованими або некорельованими, тобто їх коефіцієнт кореляції може дорівнювати 0, а може і не дорівнювати 0.

Із незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості ще не випливає незалежність цих величин. У випадку нормального розподілу величин із некорельованості випадкових величин випливає їх незалежність.

III. Підсумок заняття.

САМОСТІЙНЕ ВИВЧЕННЯ

(Самостійне вивчення нового навчального матеріалу, який не розглядається при проведенні аудиторних занять, але обов'язково враховується в контрольних заходах)

Тема 7.: Функції випадкових величин та їх характеристики

Мета: ознайомлення студентів з основними поняттями; законами розподілу та числовими характеристиками функції дискретного випадкового аргументу та неперервного випадкового аргументу.

Хід лекції.

I. *Організаційний момент лекції.*

II. *Пояснення нового матеріалу.*

1. Закон розподілу та числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу.
2. Закон розподілу та числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу.

У багатьох випадках треба розглядати дві ВВ величини X та Y . Так, наприклад, при аналізі діяльності підприємства треба враховувати кількість усіх працюючих X та кількість зроблених виробів Y . З різних причин кількість працюючих та зроблених виробів кожного дня можуть бути різними, тобто X та Y будуть ВВ.

Означення. *Якщо вказано закон, за яким кожному можливому значенню вВВ X відповідає певне значення ВВ Y , то Y наз.* ***функцію X_i*** *позначають $Y = \varphi(X)$.*

1. **Закон розподілу та числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу.**

Нехай $Y = \varphi(X)$, аргумент X – дискретна ВВ з можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots x_n$ і імовірностями $p_1, p_2, \ldots p_n$, тобто задана законом

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	…	p_n

У цьому випадку Y також дискретна ВВ з можливими значеннями $y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2), \ldots, y_n = \varphi(x_n)$, а тому імовірності можливих значень Y також дорівнюють $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
$P(y)$	p_1	p_2	…	p_n

Математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення функції Y обчислюються за формулами

$$M(Y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) p_k \tag{1}$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k)]^2 p_k - M^2(Y) \tag{2}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} \tag{3}$$

Початкові та центральні моменти розподілу знаходять за формулами

$$\begin{aligned} \nu_k &= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i))^k p_i, \\ \mu_k &= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - M(Y))^k p_i \end{aligned} \tag{4}$$

Приклад 1. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Знайти математичне сподівання функції $Y = X^2 + 1$.

Р о з в ' я з а н н я:

Знаходимо значення Y:

$y_1 = 1^2 + 1 = 2; \quad y_2 = 3^2 + 1 = 10; \quad y_3 = 5^2 + 1 = 26$, тоді за формулою (1) знаходимо $M(Y)$:

$$M(Y) = M\left(X^2 + 1\right) = 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 26 \cdot 0{,}3 = 13{,}2$$

Відповідь: 13,2

2. Закон розподілу та числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу.

Нехай X – НВВ, закон розподілу, якої заданий диференціальною функцією розподілу (щільністю імовірностей) $f(x)$; ВВ $Y = \varphi(X)$.

Якщо φ - диференційована функція, монотонна на усьому проміжку можливих значень X, то щільність розподілу функції $Y = \varphi(X)$ визначають так

$$g(y) = f(t(y)) \cdot |t'(y)| \tag{5}$$

де t - функція обернена по відношенню до функції φ, t' - похідна першого порядку.

Якщо φ - не монотонна функція в області визначення аргументу X, то обернена функція неоднозначна і щільність розподілу $g(y)$ визначається як сума додатків, кількість яких дорівнює кількості значень оберненої функції, тобто

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i(y)) \cdot |t_i'(y)| \tag{6}$$

де $t_i(y)$ - обернені функції при заданому у.

Приклад 2. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням, що дорівнює 0. Знайти закон розподілу функції $Y = X^3$.

Р о з в ' я з а н н я:

Згідно означення нормального розподілу НВВ X та умови прикладу диференціальна функція розподілу X має вигляд $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

Функція $Y = X^3$ диференційована, $Y' = 3X^2 > 0$, тому вона зростає для усіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, можна застосувати формулу (5) для знаходження диференціальної функції розподілу $g(y)$ ВВ X. У даному випадку з рівності $Y = X^3 \Rightarrow X = \sqrt[3]{Y}$, тобто $t(y) = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$. Тому формула (5) приймає вигляд

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}} \cdot \left| \left(y^{\frac{1}{3}} \right) \right| = \frac{e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}}{3\sigma\sqrt{2\pi}\, y^{\frac{2}{3}}}.$$

Для знаходження математичного сподівання від $Y = \varphi(X)$ можна спочатку знайти $g(y)$ - диференціальну функцію розподілу величини Y за формулою (5) та (2), а потім використати формулу $M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy$. Але більш доцільно знаходити **математичне сподівання функції неперервного випадкового аргументу** $\varphi(X)$ безпосередньо за формулою

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (7)$$

де $f(X)$ - щільність імовірностей величини X.

Якщо величина X може приймати значення лише в проміжку $[a; b]$, то формула (7) спрощується:

$$M(\varphi(X)) = \int_{a}^{b} f(x)\varphi(x)dx \qquad (8)$$

Приклад 2. НВВ X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & при\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & при\ x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання функції $Y = X^2$.

Р о з в ' я з а н н я:

У даному випадку $\varphi(X) = X^2$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тому за формулою (8) отримаємо:

$$M(Y) = M\left(X^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx \cdot$$

Інтегруючи частинно два рази отримаємо математичне сподівання

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2\left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = \pi + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Отже, отримали

$$M(Y) = M\left(X^2\right) = \pi - 2$$

Відповідь: $M(Y) = \pi - 2.$

Дисперсію функції Y неперервного випадкового аргументу X визначають звичайним чином $D(Y) = M\left(Y^2\right) = M^2(Y)$, а обчислюють за формулою

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \right)^2 \qquad (9)$$

У випадку, **коли X змінюється лише в проміжку** $[a; b]$**, дисперсію функції** $Y = \varphi(X)$ знаходять за формулою

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_a^b \varphi(x) f(x) dx \right)^2 \qquad (10)$$

У формулах (9) і (10) функція $f(x)$ - це щільність імовірностей НВВ X (диференціальна функція розподілу X).

III. Підсумок заняття.

ТАБЛИЦЯ 1.

Закон розподілу X та його математичний запис	Математичне сподівання $M(X)$	Дисперсія $D(X)$	Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$
Біноміальний $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,.$	np	npq	$\sqrt{npq}$
Пуассона $P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}, a>0$	a	a	$\sqrt{a}$
Геометричний $P(X=m)=pq^{m-1}, m=1,2,...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$
Гіпергеометричний $P(X=m)=\frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \quad k \geq n$ $m=0,1,2,\ldots,n$	$\frac{kn}{N}$	$\frac{nk(N-k)}{N^2}\cdot\frac{(N-n)}{(N-1)}$	
Поліноміальний $P_n(X_1=m_1,\ldots,X_S=m_S)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_S!}\cdot p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_S^{m_S}$	$M(X_i)=np_i$ $i=1,\ldots,s$	$D(X_i)=np_iq_i$ $q_i=1-p_i$ $i=1,\ldots,s$	$\sigma(X_i)=\sqrt{np_iq_i}$ $q_i=1-p_i$ $i=1,\ldots,s$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основний

1. В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика» М. 1977
2. В.Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» М. 2000.
3. В.И. Єрмаков „Общий курс высшей математики для экономистов.” М. 2001.
4. В.И. Єрмаков „Сборник задач по высшей математики для экономистов.” М. 2002
5. В.І. Жлуктечко, С.І. Наконечний „Теорія імовірностей і математична статистика.” ч.1,2. К. 2000, 2001.
6. С.И. Ковбаса, В.Б. Ивановский «Теория вероятностей и математическая статистика” Санкт-Петербург 2001
7. В.М. Турчин. «Математична статистика.» К. 1999
8. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика» Учебн. М.: Юнити – Дана, 2003.

Додатковий

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1987.
2. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів. - К.: Вища шк., 1975.
3. Лампрти Дж. Вероятность. – М.: Наука, 1982.
4. Теорія ймовірностей: Зб. Задач За ред. А.В.Скорохода. – К.: Вища шк.., 1976.
5. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк.., 1994.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теориивероятностей. М.: Радио и связь, 1983.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. Свешникова. – М.:Наука, 1970

Данильчук Оксана Миколаївна
Бабенко Марина Олегівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів всіх форм навчання*)

Підписано до друку 26.04.2012. Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 5,5.
Друк лазерний. Замовлення № 23/12. Тираж 50 прим.

Надруковано в Видавничому центрі КІІ ДВНЗ „ДонНТУ”