МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ОПОРНИЙ **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

(*для студентів усіх форм навчання)*

КРАСНОАРМІЙСЬК – 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

***ОПОРНИЙ* КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

(*для студентів усіх форм навчання)*

Розглянуто на засіданні кафедри Природничі науки
Протокол № 8 від 29 квітня 2009р.

Затверджено науково – видавничою Радою Дон НТУ
Протокол № 2 від 29 квітня 2009р.

КРАСНОАРМІЙСЬК – 2009

УДК 330.4.

Векторна алгебра. ***Опорний конспект лекцій***. / Укладачі: ст. викл. О.М. Данильчук, ас. М.О. Бабенко – Красноармійськ, Дон НТУ КІІ, Красноармійськ., Видавництво Красноармійського індустріального інституту, 2009. – 35с.

Даний курс лекцій складений відповідно до діючої програми курсу з даної дисципліни і призначений для всіх категорій студентів вузів, як денного так і заочного відділення, які вивчають дану дисципліну в тому чи іншому об'ємі.

Даний конспект лекцій орієнтований на організацію оволодіння даного матеріалу самостійного опрацювання студентів як технічних, так і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Теоретичний матеріал по всім темам супроводжується малюнками та розгляданням великої кількості прикладів та задач, які подаються в доступній формі.

Укладачі О.М.Данильчук ст.викл.
М.О. Бабенко ас.

Відповідальний за випуск: Я.О. Ляшок, доц. к.т.н.

Рецензент:
О.Д.Петренко – доктор фізико – математичних наук, професор кафедри математики Донецького національного технічного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний рівень і темпи розвитку суспільства висувають потреби не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розв'язку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Головна мета викладання вищої математики – дати студентам фундаментальні знання з математики, щоб у подальшому вони могли засвоювати спеціальні дисципліни, які базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага приділяється виробленню практичних навичок у процесі розв'язання конкретних задач, а також навчанню застосовувати математичні методи для дослідження реальних чи то економічних чи технічних процесів і прийняття оптимальних рішень розв'язку.

Метою запропонованих лекцій є стисле та послідовне подання основного курсу вищої математики по темі „Векторна алгебра" яке адаптоване для вищих навчальних закладів економічного та технічного профілю.

Опорний конспект лекцій є наочним відображенням програмного матеріалу з дисципліни „Вища математика" і може бути використаний для вузівського супроводження лекцій з усіх тем курсу. Відомо, що новий навчальний матеріал засвоюється студентами значно легше, якщо він супроводжується достатньо великою кількістю малюнків, що ілюструють їх розв'язання.

Систематичне та якісне подання основних тем сприяє свідомому засвоєнню курсу студентами, як денної так і заочної форми навчання. Опорний конспект лекцій призначений як для самостійної роботи студентів так і для підготовки до складання заліків та іспитів(МК).

Під час роботи з опорним конспектом студентам необхідно використовувати основну і додаткову літературу, а набуті теоретичні знання закріплювати розв'язанням практичних задач і прикладів, які теж можна знайти у рекомендованих збірниках задач. Доцільно також опрацьовувати методичні розробки кафедри з даної дисципліни.

<u>Лекція 1.</u>

Тема: Вектори, лінійні операції з векторами. Декартові координати вектора і точки.

План лекції

1. Скалярні і векторні величини. Вектори. Колінеарні і компланарні вектори. Рівність векторів. Додавання векторів, Множення вектора на число.
2. Визначення положення точки радіусом - вектором. Поділ відрізка уданому відношенні.
3. Лінійна залежність векторів. Умова колінеарності двох векторів. Розкладання вектора за двома векторами. Умова компланарності трьох векторів. Розкладання вектора за трьома векторами.
4. Координати на прямій. Координати на площині. Координати у просторі.
5. Координати точки поділу. Координати вектора, що задано двома точками. Ознака колінеарності двох векторів. Ознака компланарності трьох векторів.

1. У повсякденній практиці ми маємо справу з величинами двох видів. Одні з цих величин такі, як температура, час, маса, довжина, площа, робота тощо можна визначити одним числовим значенням, інші ж величини, такі, як сила, швидкість, прискорення тощо можна визначити тільки тоді, коли відомо не тільки їх числове значення, а й напрям у просторі. Величини першого виду називають **скалярними величинами** або **скалярами.** Величини другого виду називають **векторними величинами.**

Кожну векторну величину геометрично можна зобразити напрямленим прямолінійним відрізком - **вектором** - довжина якого дорівнює числовому значенню векторної величини (у вибраному масштабі) і напрям співпадає з напрямом цієї величини.

Вектор визначають двома точками: перша - це початок його, друга - кінець; додатний напрям вектора - від початкової до кінцевої точки, наприклад, вектор $\overline{AB}$ має початок у точці A і кінець у точці B, стрілка вказує напрям вектора.

Якщо початок і кінець вектора співпадають, то вектор називають **нульовим** (нуль-вектор).

Два ненульових вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають **колінеарними,** якщо прямі AB і CD паралельні або співпадають.

Вектори називають **компланарними,** якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Довжина, або **модуль,** вектора $\overline{AB}$ - це відстань між його початком і кінцем (довжина відрізка AB). Для модуля вектора $\overline{AB}$ використовують позначення $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{a}\right|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають **одиничним вектором або ортом.**

Вектори рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і рівні модулі.

На Рис.1, де *ABCD* є паралелограм, зображено рівні вектори $\overline{AD} = \overline{BC}$. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ не рівні. Хоч ці вектори і колінеарні, і мають рівні модулі, але вони протилежно напрямлені. $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a}$

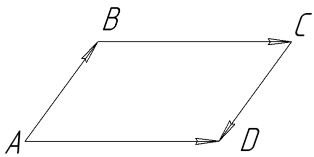

Рис. 1

Вектори можна додавати, віднімати, множити на число.

Додавання двох векторів - це операція побудови за двома векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ третього вектора - вектора суми $\overline{c}$.

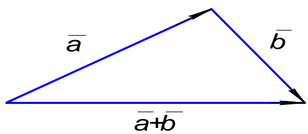

Рис. 2

Цю побудову виконуємо так: 1) з довільної точки *O* відкладаємо вектор $\overline{OA} = \overline{a}$; 2) з його кінця *A* відкладаємо вектор $\overline{AB} = \overline{b}$*; 3)* з'єднаємо початок *O* першого вектора з кінцем *B* другого. Знайдений в результаті цієї побудови вектор $\overline{OB} = \overline{c}$ називають вектором-сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Отже, сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є $\overline{c}$ вектор *,* що сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

Це правило називають **правилом трикутника.**

Для позначення операції додавання векторів вживають звичайні алгебраїчні символи:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}, \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{c}.$$

Іншим способом побудови суми двох векторів є так зване правило **паралелограма:** якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відкласти від спільного початку (Рис. 3) і на них побудувати паралелограм, то сума $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є вектор $\overline{a} + \overline{b}$, що виходить з того ж початку і співпадає з діагоналлю паралелограма.

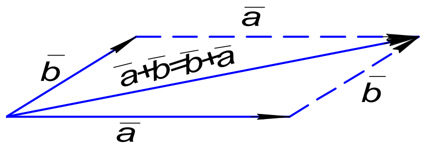

Рис. 3

З рис. 3 видно, що це правило є наслідком правила трикутника.

Розглядаючи фігури *OAC* і *OBC* (рис. 4), знайдемо, що $\overline{OC} = \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, тобто **сума двох векторів не залежить від порядку доданків.**

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

Послідовно використовуючи правило трикутника ми можемо побудувати суму будь-якого числа довільно розміщених у просторі векторів. **Сумою цих векторів буде вектор, початком якого є початок першого вектора і кінцем - кінець останнього вектора - доданка.**

Якщо кінець останнього вектора - доданка співпадає з початком першого, то сумою векторів буде нульовий вектор.

Означення 1. Різницею двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є вектор $\overline{c}$, що у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$:

$$\overline{a} - \overline{b} \text{ якщо } \overline{b} + \overline{c} = \overline{a}.$$

З означення видно, що для побудови різниці $\overline{a} - \overline{b}$ потрібно віднести вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ до спільного початку *O* (Рис. 4) і провести вектор

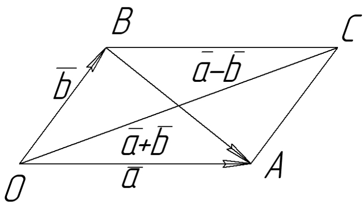

Рис. 4

$\overline{BA}$ від кінця *B* вектора - від'ємника до кінця *A* вектора зменшуваного; цей вектор і є шукана різниця $\bar{a}-\bar{b}$:

$\overline{BA}=\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$.

Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ одна з діагоналей є сума векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, а друга їх різниця (рис.4).

Добутком $\lambda\bar{a}=\bar{a}\lambda$ вектора $\bar{a}$ на число λ≠0 є вектор:

1)колінеарний вектору $\bar{a}$,

2)модуль (довжина) якого дорівнює добутку $|\bar{\lambda}|\cdot|\bar{a}|$ модулів числа λ *і* вектора $\bar{a}$;

3)напрям його співпадає з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо λ>0 або протилежний йому, якщо λ<*0*.

Ділення вектора на число просто звести до операції множення: щоб поділити вектор на число **λ≠0**, досить помножити цей вектор на обернене число $\frac{1}{\lambda}$, тобто

$$\bar{a}:\lambda=\bar{a}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\bar{a}.$$

Зокрема, одиничний вектор, або орт $\bar{a}^0$, відповідний вектору $\bar{a}$, дістанемо з вектора $\bar{a}$, поділивши останній на його модуль $|\bar{a}|$, тобто помноживши на $\frac{1}{|\bar{a}|}$:

$$\overline{a}^{0}=\frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}\equiv\frac{1}{\left|\overline{a}\right|}\cdot\overline{a}.$$

Добуток вектора на число має такі властивості:

1. $\alpha\cdot\left(\beta\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\overline{a}$,
2. $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}$,
3. $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.

2. Виберемо у просторі довільну точку *O*. Будемо називати її **початком** або **полюсом.** Тоді положення будь-якої точки *M* простору можна однозначно визначити вектором $\overline{OM}$ *,* початок якого є фіксована точка - полюс *O,* а кінець - точка *M.* Цей вектор називають **радіус- вектор точки** *M* відносно *O* і позначають $\overline{r_M}$:

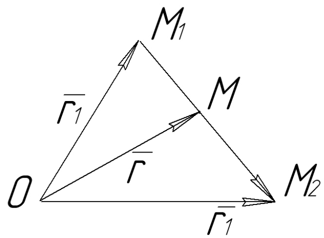

Рис. 5

Якщо задано дві точки M_1 і M_2, що визначають вектор $\overline{M_1M_2}$ (рис.5), то $\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=\overline{r_2}-\overline{r_1}$, тобто **довільний вектор** $\overline{M_1M_2}$ **дорівнює різниці радіуса вектора його кінця і радіуса вектора його початку.**

Розглянемо тепер задачу знаходження радіуса-вектора точки *M,* що лежить на прямій M_1M_2 і **ділить відрізок у заданому** відношенні λ (λ = M_1 M: MM_2).

Очевидно, $\overline{M_1M}=\lambda\cdot\overline{MM_2}$, але $\overline{M_1M}=\overline{r}-\overline{r_1}$ то $\overline{MM_2}=\overline{r_2}-\overline{r}$. Звідси

$$\overline{r}-\overline{r_1}=\lambda\left(\overline{r_2}-\overline{r}\right)$$

$$r=\frac{\overline{r_1}+\overline{r_2}}{1+\lambda} \qquad (1.1)$$

В окремому випадку, коли *M* є середина відрізка $\overline{M_1M_2}$, $\lambda = 1$ і формула (1.1) набуває вигляду

$$r = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{2} \qquad (1.2)$$

3. Введемо тепер поняття про лінійну залежність векторів.

Означення 2. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots, \overline{n}$ називають **лінійно залежними,** якщо існують такі числа $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\delta$, з яких хоча б одне було відмінне від нуля, при яких лінійна комбінація цих векторів з коефіцієнтами $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\delta$ дорівнює нуль – вектору

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \ldots + \delta\overline{n} = 0 .$$

Розглянемо спочатку два лінійно залежних вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. З означення лінійної залежності маємо

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = 0 , \qquad (1.3)$$

при цьому, хоча б один з коефіцієнтів а і β, не дорівнює нулеві. Тоді знайдемо

$$\overline{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \overline{b}.$$

Ця рівність означає, що **вектори** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ **колінеарні**.

У випадку лінійної залежності трьох векторів маємо:

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = 0 \qquad (1.4)$$

Якщо $\alpha \neq 0$, то

$$\overline{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \overline{b} - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \overline{c}$$

або

$$\overline{a} = \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$$

де

$$\mu = -\frac{\beta}{\alpha}, \ \nu = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Лінійна комбінація векторі $\mu\overline{b} + \nu\overline{c}$ є вектор, що лежить у площині, в якій лежать вектори $\overline{c}$ і $\overline{b}$. Тому і рівний йому вектор $\overline{a}$ буде паралельний цій площині або лежати в ній. Отже, вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ **компланарні.**

Це означає, що у випадку трьох компланарних векторів один з них можна розкласти за двома іншими неколінеарними векторами.

Дійсно, нехай маємо компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ з яких $\overline{a}$ і $\overline{b}$ неколінеарні. Відкладаємо $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ від спільного початку O (рис. 6) і позначимо $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$.

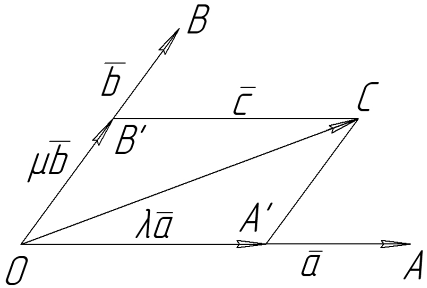

Рис. 6

Точки O,A,B,C знаходяться в одній площині. Через кінець C вектора $\overline{c}$ проведемо прямі CA' і CB' паралельно прямим OA і OB відповідно. Дістанемо паралелограм $OA'CB'$, діагоналлю OC якого є вектор $\overline{c}$. Отже,

$$\overline{c} = \overline{OA'} + \overline{OB'}.$$

Вектори $\overline{OA'}$ і $\overline{OB'}$ колінеарні векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Тому

$$\overline{OA'} = \lambda \cdot \overline{a}, \ \overline{OB'} = \mu \cdot \overline{b}$$ де

λ і μ - відповідні відношення модулів цих пар колінеарних векторів. Звідси

$$\overline{c} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} \qquad (1.5)$$

Покажемо тепер, що у випадку трьох некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ будь-який четвертий вектор $\overline{d}$ можна представити у вигляді

$$\overline{d} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} + \nu \overline{c} \qquad (1.6)$$

Для цього віднесемо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ до спільного початку O (Рис. 7)

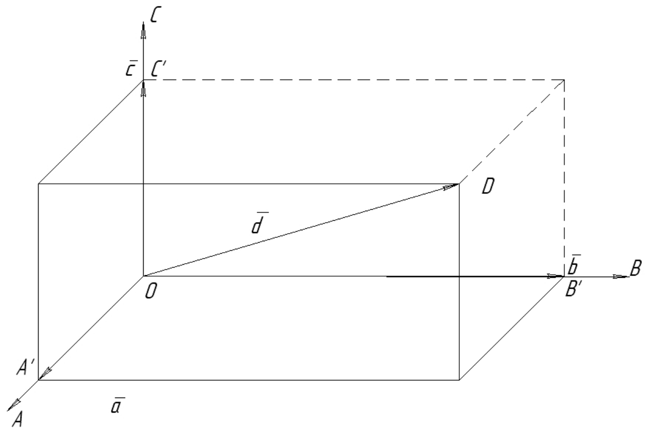

Рис. 7

і позначимо $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$, $\overline{OD}=\overline{d}$. Через кінець D вектора $\overline{d}$ проведемо площини паралельно площинам *OAB, OBC* і *OCA*. Отримаємо паралелепіпед, діагональ якого є вектор $\overline{OD}=\overline{d}$, а ребра колінеарні відповідно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Діагональ $\overline{OD}$ замикає ламану *OA'ND*. Тому згідно з правилом додавання векторів маємо

$$\overline{d}=\overline{OD}=\overline{OA'}+\overline{A'N}+\overline{N'D}$$

Оскільки $\overline{OA'}$; $\overline{A'N}$; $\overline{ND}$ колінеарні відповідно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$., то, припустивши, що $\overline{OA'}=\lambda\cdot\overline{a}$,, $\overline{A'N}=\mu\cdot\overline{b}$, $\overline{ND}=\nu\overline{c}$, дістанемо шукану залежність:

$$\overline{d}=\lambda\cdot\overline{a}+\mu\cdot\overline{b}+\nu\overline{c}$$

4. Координати на прямій. Розглянемо довільну пряму і виберемо на ній додатний напрям, фіксовану точку *O* (початок) і масштабну одиницю. Це - координатна вісь.

Координатну вісь можна також визначити віднесеним до її початку *O* одиничним вектором $\overline{i}$. Положення довільної точки *M(r)* на цій вісі

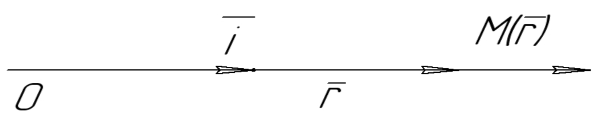

Рис. 8

визначимо її радіусом-вектором $\overline{OM} = \overline{r}$. Вектор $\overline{OM}$ колінеарний орту $\overline{i}$ незалежно від положення точки *M* на вісі, а тому його завжди можна однозначно виразити через і рівністю (1.6)

$$\overline{OM} = \overline{r} = \overline{i} \cdot x$$

де число *x* є відношення модулів колінеарних векторів $\overline{OM} = \overline{r}$ та $\overline{i}$. Це число буде додатним (x>0), від'ємним (x<0) якщо ці напрями протилежні, і *x*= 0, якщо точка *M* співпадає з точкою *O.*

Рівність (1.6) встановлює взаємно однозначну відповідність між радіусом-вектором і точкою координатної вісі і дійсними числами.

Тому число x називають **координатою вектора** $\overline{OM} = \overline{r}$ **відносно базису** (O; $\overline{i}$). Положення точки *M* також буде визначено числом *x*- довжиною (модулем) вектора $\overline{OM}$. Це число називають **координатою точки** *M* і позначають *M(x).*

Координати на площині. Щоб ввести поняття координат вектора і точки на площині побудуємо в ній так званий координатний базис. Для цього від довільно вибраної точки *O* в площині відкладемо упорядковану пару взаємно перпендикулярних одиничних векторів (ортів) $\overline{i}$ та $\overline{j}$. Вектор $\overline{i}$, що визначає координатну вісь Ox (вісь абсцис), розташуємо горизонтально і напрям його виберемо зліва направо, а вектор $\overline{j}$, що визначає координатну вісь *Oy* (вісь ординат),- вертикально і напрям його виберемо знизу вгору (Рис. 9).

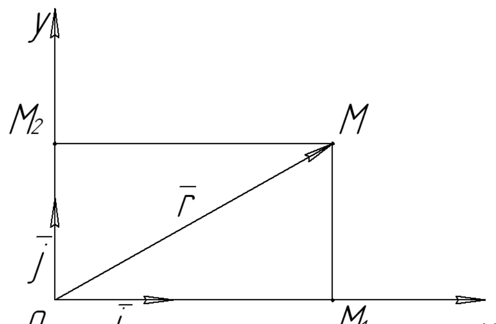

Рис.9

Тепер кожний вектор площини, а отже і радіус - вектор $\overline{OM}$ довільної точки *M* можна розкласти за базисними векторами $\overline{i}$ та $\overline{j}$ тобто представити у вигляді

$$\overline{OM} = \overline{r} = \overline{i} \cdot x + \overline{j} \cdot y \tag{1.7}$$

З (1.7) видно, що кожному вектору площини відповідають два упорядкованих числа *x* і *y* - коефіцієнти при першому і другому базисних векторах, і навпаки, якщо задано два упорядкованих числа x і y, то можна однозначно побудувати відповідний їм вектор $\overline{OM} = \bar{r}$.

Числа x **і** y **називають координатами вектора** $\bar{r}$ **у вибраному базисі** *(O;*i; j *).*

Положення довільної точки *M* на площині визначає її радіус - вектор $\overline{OM}$ Тому кожній точці *M* можна поставити відповідну упорядковану пару чисел x і y. Ці числа називають **координатами точки** *M* і записують у вигляді *M(x,y)*.

Координати у просторі. Назвемо координатним **базисом у просторі** віднесену до вибраної точки *O* (початок координат) упорядковану трійку перпендикулярних некомпланарних векторів $\bar{i}$ і $\bar{j}$, $\bar{\kappa}$. Орти $\bar{i}$ і $\bar{j}$ лежать в горизонтальній площині і визначають відповідно вісь *Ox*- вісь абсцис і вісь *Oy*- вісь ординат. Орт $\bar{\kappa}$ проведено перпендикулярно до площини, в якій лежать орти $\bar{i}$ і $\bar{j}$ і визначає вісь *O*z – вісь аплікат (додатний напрям $\bar{\kappa}$ - вгору). (Рис.10)

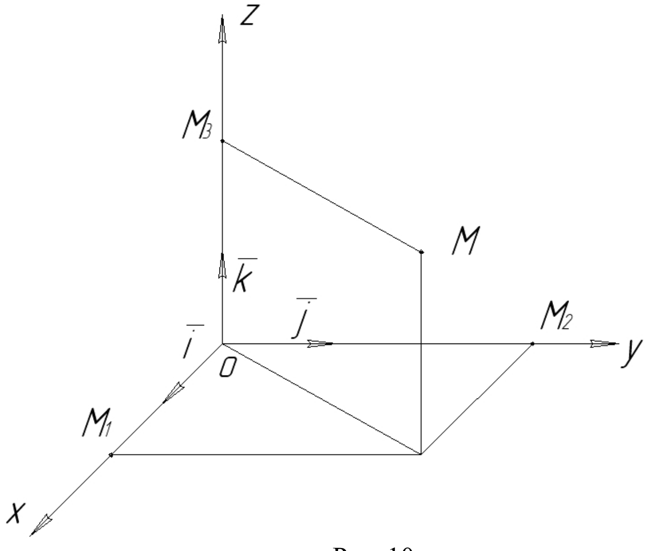

Рис. 10

Кожна пара з трійки векторів визначає площину, яку називають **координатною площиною**.

Всі точки координатної площини, що визначено ортами $\bar{j}$ і $\bar{\kappa}$ (площина Oyz), мають координату x-0, ортами $\bar{i}$ і $\bar{\kappa}$ (площина Oxz) - $y = 0$, а ортами $\bar{i}$ і $\bar{j}$ (площина Oxy)- $z = 0$.

Розклад довільного вектора $\overline{OM}$ за базисними векторами

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z \qquad (1.8)$$

однозначно визначає для кожного вектора $\bar{r}$ три упорядковані числа x, y, z - **координати вектора** $\bar{r}$ **у вибраному базисі** $\bar{i}$ і $\bar{j}$, $\bar{\kappa}$.

Положення кожної точки *М* простору визначає її радіус - вектор $\overline{OM}$. Цей вектор цілком визначено його координатами { x, y, z }. Тому і довільній точці *М* можна поставити взаємно однозначну відповідність упорядкованої трійки чисел x, y, z, які будемо називати **координатами точки** *М* і записувати *M(x, y, z)*.

5. Розглянемо тепер дії з векторами у координатній формі.

Якщо у просторі задано два вектори їх координатами

$$\bar{a} = \bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1 \qquad \bar{b} = \bar{i} \cdot x_2 + \bar{j} \cdot y_2 + \bar{k} \cdot z_2$$

то на підставі алгебраїчних властивостей додавання, віднімання і множення вектора на число отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{a} \pm \bar{b} &= (\bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1) \pm (\bar{i} \cdot x_2 + \bar{j} \cdot y_2 + \bar{k} \cdot z_2) = \\ &= \bar{i} \cdot (x_1 \pm x_2) + \bar{j} \cdot (y_1 \pm y_2) + \bar{k} \cdot (z_1 + z_2), \end{aligned} \qquad (1.9)$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (\bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1) = \bar{i} \cdot (\lambda \cdot x_1) + \bar{j} \cdot (\lambda \cdot y_1) + \bar{k} \cdot (\lambda \cdot z_1) \qquad (1.10)$$

тобто, **координати суми (різниці) двох векторів дорівнюють сумам (різницям) відповідних координат цих векторів, а координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам відповідних координат вектора на це число.**

Узагальненням цих результатів є правило знаходження координат лінійної комбінації векторів.

Якщо у просторі

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overline{a_n} \qquad (1.11)$$

і $\bar{a} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z$

$\overline{a_m} = \bar{i} \cdot x_m + \bar{j} \cdot y_m + \bar{k} \cdot z_m \quad (m = 1,2,3,...n)$ то

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n, \\ y = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n, \\ z = \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \ldots + \lambda_n \cdot z_n. \end{cases} \quad (1.12)$$

Для площини формули, відповідні формулам (1.9) - (1.12), отримаємо, взявши координати z = 0, а для прямої -*y=0,* z =0.

Знайдемо координату точки *M{x, y,* z*),* що ділить відрізок M_1M_2 (M_1 (x_1; y_1 ; z_1) і $M_2(x_2, y_2, z_2)$) у відношенні $\lambda = M_1M : MM_2$ З формули (1.1)

$$\bar{r} = \frac{\overline{r_1} + \lambda \cdot \overline{r_2}}{1 + \lambda} \qquad (1.13)$$

маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda} \quad (1.14)$$

Як окремий випадок для $\lambda = 1$ дістанемо формули, що визначають **координати середини відрізка** M_1M_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Тепер знайдемо координати *x, y,* z вектора $\overline{M_1M_2}$, початком якого є точка M_1 (x_1; y_1 ; z_1), а кінцем - точка M_2 (x_2 ,y_2, z_2). із-за того, що $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$ отримаємо

$$x = x_2 - x_1 \qquad y = y_2 - y_1 \qquad z = z_2 - z_1.$$

Як відомо, між колінеарними векторами $\bar{a} = \bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1$ $\bar{b} = \bar{i} \cdot x_2 + \bar{j} \cdot y_2 + \bar{k} \cdot z_2$ існує лінійна залежність

$$\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$$

Звідси

$$x_1 = \lambda \cdot x_2, \qquad y_1 = \lambda \cdot y_2, \qquad z_1 = \lambda \cdot z_2, \text{ або}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \qquad (1.15)$$

Це означає, що координати колінеарних векторів **пропорційні між собою.**

Між компланарними векторами $\bar{a} = \bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1$, $\bar{b} = \bar{i} \cdot x_2 + \bar{j} \cdot y_2 + \bar{k} \cdot z_2$ існує лінійна залежність:

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = 0.$$

Векторна рівність еквівалентна трьом різностям:

$$\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \cdot x_3 = 0,$$
$$\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 + \gamma \cdot y_3 = 0,$$
$$\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2 + \gamma \cdot z_3 = 0$$

Ця система рівнянь відносно α, β, γ - лінійна і однорідна. А для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулеві:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Отримана формула і дає **ознаку того, що три вектори компланарні.**

Підсумок заняття

Контрольні питання

1. Що називають скалярною величиною? Що - векторною?
2. Що таке вектор?
3. Які вектори називають колінеарними? Які - компланарними?
4. Як додавати вектори?
5. Як віднімати вектори?
6. Як помножити вектор на число?
7. Як визначити положення точки у просторі відносно початку координат?
8. Як визначити вектор $\overline{M_1M_2}$, якщо задано точки $M_1(\overline{r_1})$ і $M_2(\overline{r_2})$?
9. Як знайти радіус - вектор точки, що ділить відрізок у заданому відношенні?
10. Які вектори називають лінійно залежними?
11. Яка умова колінеарності двох векторів?
12. Яка умова компланарності трьох векторів?
13. Як визначити координати точки і вектора на прямій, на площині та в просторі?
14. Як додавати, віднімати і множити вектори, що задані своїми координатами?
15. Як знайти координати точки поділу?
16. Як записати умову колінеарності двох векторів у координатній формі?

17. Як записати умову компланарності трьох векторів у координатній формі?

Лекція 2.

Тема: Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів. Властивості та застосування в задачах.

План лекції

1. Скалярний добуток двох векторів, його властивості. Вираження скалярного добутку через координати.
2. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Вираження векторного добутку через координати.
3. Мішаний добуток трьох векторів. Властивості мішаного добутку. Вираження мішаного добутку через координати векторів - множників.

1. Скалярний добуток і його властивості.

Означення 1. ***Скалярним добутком*** двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ позначається символом $(\bar{a}, \bar{b})$ або $\bar{a} \cdot \bar{b}$; абсолютна величина позначається $|\bar{a}|$ *та* $|\bar{b}|$ і обчислюється за формулою, якщо

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\},$$

то

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ \ i \ \ |\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Отже, на основі означення отримаємо формулу:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \qquad (1.1)$$

де φ - кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$.

Оскільки $Пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi, \quad Пр_{\bar{b}}\bar{b} = |\bar{b}| \cos\varphi$,

то

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot Пр_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot Пр_{\bar{b}}\bar{a}$$

$$Пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \qquad (1.2)$$

Основні властивості скалярного добутку

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a}).$
2. $(\lambda \overline{a}, \overline{b}) = \lambda (\overline{b}, \overline{a}).$
3. $(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c}).$
4. $(\overline{a}, \overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2$, *звідки* $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \underline{a})}.$
5. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$ або один з них, або обидва є нульовим вектором.

Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, точка прикладання якої перемішується з початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота А цієї сили визначається рівністю

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) \qquad (1.3)$$

Визначення скалярного добутку через координати.

Якщо $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то отримаємо формулу для знаходження скалярного добутку:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (1.4)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Кут між двома векторами.

Якщо відомі координати векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (1.5)$$

Приклад 1. Обчислити $(\overline{a}, \overline{b})$, якщо $\overline{a} = \{4; -2; -4\}$, $\overline{b} = \{6; -3; 2\}$.

Розв'язання:

Користуючись формулою (1.4) знаходимо

$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$

Відповідь: $(\overline{a}, \overline{b}) = 22$.

Приклад 2. При якому значенні m вектори $\overline{a} = \{m;\, 3;\, 4\}$, $\overline{b} = \{4;\, m;\, -7\}$ будуть перпендикулярними?

Розв'язання:

Два вектори перпендикулярні, якщо скалярний добуток дорівнює нулеві, тобто користуючись формулою (1.4) знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, тобто $(\overline{a}, \overline{b}) = 4 \cdot m + 3 \cdot m + 4 \cdot (-7) = 7m - 28$. Оскільки вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні, то $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$. Отже, $7m - 28 = 0$. Звідси отримаємо, що $m = 4$.

Відповідь: При $m = 4$ вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні.

Приклад 3. Обчислити роботу, яка виконує сила $\overline{F} = \{3;\, -2;\, -5\}$, коли її точка прикладання рухається прямолінійно, переміщуючись із положення A(2; -3; 5) в положення B(3; -2; -1).

Розв'язання:

Згідно з формулою (1.3) робота $A = (\overline{F}, \overline{AB})$. Вектор переміщення $\overline{AB} = \{1;\, 1;\, -6\}$.

Тоді $A = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot (-6) = 31$. Отже, робота A, яку виконує сила $\overline{F}$, дорівнює 31.

Відповідь: робота A дорівнює 31.

Приклад 4. Дано вершини ΔABC A(-1; 2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1). Знайти його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язання:

Кут φ – це кут між векторами $\overline{BA}\ i\ \overline{BC}$ $\overline{BA} = \{3;\, 0;\, 4\}, \overline{BC} = \{7;\, 0;\, 1\}$.

Тоді використовуючи формулу (1.5) отримаємо:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{BA}, \overline{BC})}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{25}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Отже, φ=45^0.

Відповідь: Кут при вершині B дорівнює 45^0.

Приклад 5. Дано вектори $\overline{a}=\{1;-3;4\}$, $\overline{b}=\{3;-4;2\}$, $\overline{c}=\{-1;1;4\}$. Знайти проекцію вектора $\overline{a}$ *на* $2\overline{b}+3\overline{c}$.

<u>Розв'язання:</u>

Користуючись формулою (1.2) знаходимо

$2\overline{b}=\{6;-8;4\}$, $3\overline{c}=\{-3;3;12\}$ $2\overline{b}+3\overline{c}=\{3;-5;16\}$.

Далі знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ *та* $2\overline{b}+3\overline{c}$.

$\overline{a}\cdot(2\overline{b}+3\overline{c})=1\cdot 3+(-3)\cdot(-5)+4\cdot 16=3-15+64=52$.

$\left|2\overline{b}+3\overline{c}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+16^2}=\sqrt{9+25+256}=\sqrt{290}$

$$Пр_{2\overline{b}+3\overline{c}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot(2\overline{b}\cdot 3\overline{c})}{\left|2\overline{b}+3\overline{c}\right|}=\frac{52}{290}=\frac{26}{145}.$$

Відповідь: Проекція вектора $\overline{a}$ *на* $2\overline{b}+3\overline{c}$ дорівнює $\frac{26}{145}$.

2. Векторний добуток і його властивості.

<u>Означення 2.</u> ***Векторним добутком*** векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається $\overline{a}\times\overline{b}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;
2) довжина $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$;
3) якщо звести вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ та $\overline{a}\times\overline{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який міститься в кінці вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ бачитиме найкоротший поворот від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$, таким, що відбувається проти годинникової стрілки

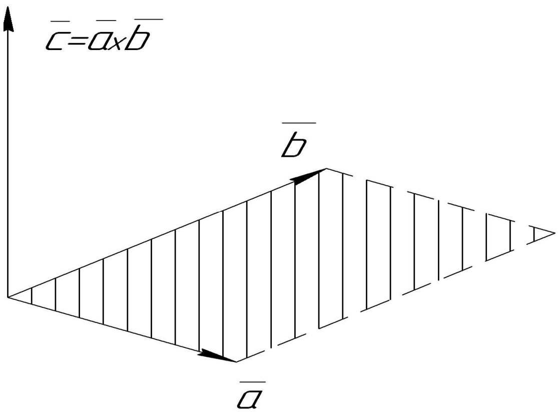

Рис. 11

Основні властивості векторного добутку

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$. (векторний добуток залежить від послідовності співмножників)
2. $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi \quad де \quad \varphi = \left(\overline{a}, \overline{b}\right)$
3. $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda \overline{a}) \times (\lambda \overline{b})$.
4. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$.
5. векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні (паралельні) або один з них нульовий, тобто $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

Формула **вираження векторного добутку через координати співмножників** має вигляд:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

Приклад 6. Дано точки A(2; -1; 2) , B(1; 2; -1), C(3; 2; 1). Знайти векторний добуток векторів $\overline{AB} \times \overline{BC}$.

Розв’язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ $\overline{AB} = \{-1; 3; -4\}, \overline{BC} = \{2; 0; 2\}$.

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\overline{i} - 4\overline{j} - 6\overline{k}.$$

Отже, $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{\,6; -4; -6\}$.

Відповідь: Векторний добуток векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ дорівнює $\{\,6; -4; -6\}$..

Застосування векторного добутку векторів.

Розглянемо задачі, в яких при їх розв'язанні застосовується векторний добуток векторів.

<u>**Задача 1.**</u> **Обчислення площі паралелограма**, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Модуль векторного добутку $\overline{a} \times \overline{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, які мають спільний початок, тобто виходять з однієї точки. Отже площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$ тому можна вивести формулу для обчислення площі паралелограма:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (1.7)$$

Формула (1.7) є формулою для ***обчислення площі паралелограма***.

З обчислення площі паралелограма знаходимо формулу обчислення площі трикутника вона буде дорівнювати половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (1.8)$$

Формула (1.8) є формулою для ***обчислення площі трикутника.***

<u>**Задача 2.**</u> **Обчислення моменту сили.** Момент сили $\overline{F}$, прикладеної в точці M, відносно фіксованої точки O. Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, прикладену до точки M, а вектор $\overline{a} = \overline{OM}$, то вектор $\overline{a} \times \overline{F}$ є моментом сили $\overline{F}$ відносно точки O, тобто

$$mom_o = \overline{a} \times \overline{F} \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) є формулою для ***обчислення моменту сил.***

Приклад 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\overline{a}=\left\{1;0;-\frac{1}{4}\right\},\quad \overline{b}=\{4;-12;-5\}.$$

Розв'язання:

Застосовуючи формулу (1.7) отримаємо

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 4 & -12 & -5\end{vmatrix}=-3\overline{i}+4\overline{j}-12\overline{k}.$$

$\overline{a}\times\overline{b}=\{-3;4;-12\}$. Тому площа дорівнює:

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-12)^2}=13\,(\textit{кв.од.})$$

Відповідь: Площа паралелограма дорівнює $13\,(\textit{кв.од.})$

Приклад 8. Знайти площу просторового трикутника з вершинами у точках A(1; 2; 1), B(4; 3; 2), C(2; 4; 4).

Розв'язання:

Нехай $\overline{a}=\overline{AB}=\{3;1;1\}$, $\overline{b}=\overline{AC}=\{1;2;3\}$. Знаходимо $\overline{a}\times\overline{b}$:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\overline{i}-8\overline{j}+5\overline{k}$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{1^2+(-8)^2+5^2}=\sqrt{1+64+25}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

Площа трикутника ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{10}=\frac{3}{2}\sqrt{10}\,(\textit{кв.од.})$$

Відповідь: Площа ΔABC дорівнює $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,(\textit{кв.од.})$

Приклад 9. Сила $\overline{F}=\{1;-2;4\}$ прикладена до точки M(1; 2; 3). Знайти момент цієї сили відносно точки A(3; 2; -1).

Розв’язання:

Знаходимо координати вектора $\overline{AM} = \{-2; 0; 4\}$ і застосовуючи формулу (1.9) отримаємо

$$mom_A \overline{F} = \overline{AM} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

$$mom_A \overline{F} = (8; 12; 4).$$

Відповідь: Момент сили $\overline{F}$ дорівнює $mom_A \overline{F} = (8; 12; 4)$.

3. Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості.

Означення 3. ***Мішаним добутком векторів*** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називається векторний добуток векторів $\overline{a} \times \overline{b}$ на скалярний добуток вектора $\overline{c}$.

Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ позначається символом $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$

Геометричне тлумачення мішаного добутку векторів.

Мішаний добуток, який є числом, має таке геометричне тлумачення: якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює об’ємові V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (мають спільний початок, тобто виходять з однієї точки), як на сторонах, якщо трійка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - права і мінус V паралелепіпеда, якщо ця трійка ліва. Висота h паралелепіпеда дорівнює $Пр_{\overline{a}} \overline{c}$. Отже його **об’єм** обчислюється за формулою

$$V = S \cdot h = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \qquad (1.10)$$

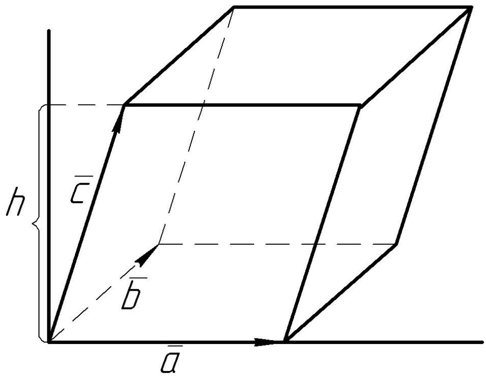

Рис.12

Основні властивості мішаного добутку

1. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$

2. якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів.

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.11)$$

Вираження мішаного добутку через координати векторів.

Нехай дані координати векторів
$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$
то мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (1.12)$$

Приклад 10. Знайти мішаний добуток векторів

$\overline{a}=\{3;\,2;\,1\}$, $\overline{b}=\{1;\,4;\,1\}$, $\overline{c}=\{1;\,1;\,3\}$.

Розв'язання:

Застосовуючи формулу (1.12) отримаємо

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=36+2+1-4-6-3=26$$

Відповідь: Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ дорівнює 26.

Приклад 11. Перевірити, чи точки A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежать в одній площині.

Розв'язання:

Умова, чи знаходяться точки в одній площині – це є умова компланарності векторів.

Знайдемо координати векторів

$\overline{AB}=\{-1;\,-1;\,6\}$, $\overline{AC}=\{-2;\,0;\,2\}$, $\overline{AD}=\{1;\,-1;\,4\}$

і обчислимо їх мішаний добуток. Отримаємо:

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0+(-2)+12-0-8-2=0$$

Отже, дані вектори компланарні, тобто лежать в одній площині.

Відповідь: Точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Застосування мішаного добутку векторів.

Розглянемо задачі, в яких при їх розв'язанні застосовується мішаний добуток векторів.

<u>Задача 1.</u> Обчислення об'єму тетраедра (трикутної піраміди) Об'єм трикутної піраміди ABCD становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, тобто

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right| \qquad (1.13)$$

Приклад 12. Знайти об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3).

<u>Розв'язання:</u>

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = \{3; 6; 3\}$, $\overline{AC} = \{1; 3; -2\}$, $\overline{AD} = \{2; 2; 2\}$

далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + (-24) + 6 - 18 - 12 - (-12) = -18$$

Використовуючи формулу (1.13) отримаємо $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|-18\right| = 3$ $(куб.од.)$

Відповідь: Об'єм піраміди дорівнює 3 $(куб.од.)$

Приклад 13. Дано вершини тетраедра: A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(9; -4; 8). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на площину ABC.

<u>Розв'язання:</u>

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрам и тетраедра $\overline{AB} = \{2; -2; -3\}$, $\overline{AC} = \{4; 0; 6\}$, $\overline{AD} = \{7; -7; 7\}$ далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 + (-84) + 84 - 0 - (-56) - (-84) = 140$$

Використовуючи формулу (1.13) отримаємо

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|140\right| = \frac{70}{3}\ (куб.од.)$$

З іншого боку

$$V_{nip} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot h. \qquad (1.14)$$

де h – висота піраміди.

Використовуючи формулу (1.8) площа ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}\ i\ \overline{AC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28$$

Площа трикутника ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}\ i\ \overline{AC}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14\ (кв.од.)$$

$$\frac{70}{3} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot h, \quad 14h = 70, \quad h = 5.$$

Відповідь: Довжина висоти, опущеної з вершини D дорівнює 5 *од*.

Підсумок заняття.

Контрольні питання

1. Що називають скалярним добутком двох векторів?
2. Для яких векторів скалярний добуток дорівнює нулю?
3. Які властивості скалярного добутку?
4. Як записати скалярний добуток двох векторів у координатній формі?
5. Як знайти кут між двома векторами?
6. Як знайти кути, що утворює вектор з координатними осями?
7. Чому дорівнює модуль вектора у координатній формі?
8. Що називають векторним добутком двох векторів?
9. Які властивості векторного добутку?
10. Який вираз має векторний добуток двох векторів у координатній формі?

11. Чому дорівнює модуль векторного добутку?
12. Що називають мішаним добутком трьох векторів?
13. Який геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів?
14. Яка умова компланарності трьох векторів?
15. Як записати мішаний добуток трьох векторів у координатній формі?
16. Яка умова того, що чотири точки лежать в одній прямій?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова „Высшая математика в упражнениях и задачах” Ч1. М.1986
2. В.Ю.Клепко, В.Л.Голець „Вища математика в прикладах і задачах” К. 2006.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, -М.: Наука, 1978.
4. За редакцією В.П.Дубовика І.І.Юрика „Вища математика. Збірник задач.” К. 2001.
5. Под редакцией Н.И.Кремера «Высшая математика для экономистов.» М. 2000.
6. Под редакцией В.И.Ермакова «Общий курс высшей математики для экономистов» М. 2000.
7. Под редакцией В.И.Ермакова «Сборник задач по высшей математики для экономистов» М. 2002.
8. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів” (теорія) К. 2005.
9. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів” (практика) К. 2005
10. За редакцією Ю.К. Рудавського „Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії” Л. „Бескит Біт” 2002.

Данильчук Оксана Миколаївна
Бабенко Марина Олегівна

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів усіх форм навчання*)

Підписано до друку 26.04.2012. Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 2,375.
Друк лазерний. Замовлення № 21/12. Тираж 50 прим.

Надруковано в Видавничому центрі КІІ ДВНЗ „ДонНТУ”