УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко (канд. физ. - мат. наук, доц.), Н.Ф. Гоголева
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
кафедра высшей математики им. проф. В.В.Пака
E-mail: mironenko.leon@yandex.ua

ПРОСТОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЗВРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Целью работы является существенное упрощение вычисления, так называемых возвратных интегралов, рассматриваемых в интегральном исчислении при изучении метода интегрирования по частям. Используя формулу Эйлера, возвратные интегралы вычисляются без привлечения метода интегрирования по частям. Предложенный подход может быть использован для вычисления интегралов, относящихся к другим классам интегралов.
Ключевые слова: *возвратные интегралы, интегрирование по частям, формула Эйлера, интегрирование.*

Введение и общая постановка проблемы

Возвратные интегралы (1)-(2) появляются при решении ряда технических задач, особенно в переходных процессах в электротехнике и электронике. Интегралы, содержащие параметры, плохо поддаются анализу при использовании приближенных методов расчета.

При изучении метода интегрирования по частям выделяют три группы интегралов, берущихся по частям [1-3]. Остановимся на последней, третьей группе. Это интегралы вида

$$\int a^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{Bmatrix}dx,\quad \int\begin{Bmatrix}\cos(\log_a bx)\\ \sin(\log_a bx)\end{Bmatrix}dx, \tag{1}$$

где $\alpha,\beta.a,b,a\neq 1,a>0$ - заданные действительные числа (параметры интегралов).

Проще рассматривать эти интегралы при $a=e$

$$\int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{Bmatrix}dx,\quad \int\begin{Bmatrix}\cos(\ln(bx))\\ \sin(\ln(bx))\end{Bmatrix}dx, \tag{2}$$

Идея вычисления интегралов (1)-(2) заключается в том, что, интегрируя дважды по частям, возвращаемся к исходному интегралу и получаем линейное уравнение относительно исходного интеграла. Эта методика хорошо известна и описывается практически в каждом учебном пособии [1-3]. Вместе с тем, методика вычисления таких интегралов является, мягко говоря, неудовлетворительной, поскольку процедура вычисления дважды по частям является объемной и вероятность ошибки возрастает по мере применения метода. Так возникает необходимость в методе, который бы вычислял такие и подобные интегралы прямо, не используя такую сложную схему, которая является общепринятой на сегодня.

1. Метод вычисления возвратных интегралов вида (1)

Обозначим первые два интеграла (2) $K_o^e=\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx,\quad L_o^e=\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$. Вычислим их одновременно, записав в виде

$$K_o^e+iL_o^e=\int e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))dx,$$

где i - мнимая единица, $i^2=-1$.

Используем формулу Эйлера $\cos + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получим

$$K_o^e + iL_o^e = \int e^{\alpha x} e^{ibx} dx = \int e^{\alpha x + i\beta x} dx = \int e^{(\alpha + i\beta)x} dx = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha + i\beta} + C.$$

Уже на этом этапе процесс интегрирования завершен. Остается выделить действительную и мнимую части полученного выражения

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} = \frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x}}{\alpha+i\beta} = \frac{e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))}{\alpha+i\beta} = \frac{e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))(\alpha - i\beta)}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)} =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x) +)}{\alpha^2+\beta^2} + i\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} K_o^e &= \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2} + C, \\ L_o^e &= \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2} + C. \end{aligned} \tag{3}$$

Замечание. Мы вычисляли сразу два интеграла, но можно было это сделать по отдельности. Например, записать первый интеграл в виде $K_o^e = \mathrm{Re}\int e^{\alpha x + i\beta x}dx$, а потом, после вычисления интеграла, выделить действительную часть, или записать второй інтеграл $L_o^e = \mathrm{Im}\int e^{\alpha x + i\beta x}dx$ и, после вычисления, выделить мнимую часть.

Первые два интеграла (1) вычисляются аналогично интегралам (2), при этом, следует выполнить преобразование функции $a^{\alpha x}$ к основанию e: $a^{\alpha x} = e^{\ln a^{\alpha x}} = e^{\alpha x \ln a}$. В данном случае нет необходимости вичислять интегралы (1), следует в формулах (3) заменить $\alpha \to \alpha\ln a$ и преобразовать

$$\begin{aligned} K_o &= \int a^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{a^{\alpha x}(\alpha\ln a\cdot\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x))}{(\alpha\ln a)^2 + \beta^2} + C, \\ L_o &= \int a^{\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{a^{\alpha x}(\alpha\ln a\cdot\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x))}{(\alpha\ln a)^2+\beta^2} + C. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Метод вычисления возвратных интегралов вида (2)

Рассмотрим вычисление первых двух интегралов (2) одновременно, записав их в виде

$$I_o^e + iJ_o^e = \int (\cos(\ln(bx)) + i\sin(\ln(bx)))dx,$$

где $I_o^e = \int\cos(\ln(bx))dx$, $J_o^e = \int\sin(\ln(bx))dx$

Используем формулу Эйлера, получим

$$I_o^e + iJ_o^e = \int e^{i\ln(bx)}dx = \int e^{\ln(bx)^i}dx = \int (bx)^i\ dx = \frac{(bx)^{i+1}}{(i+1)b} + C.$$

На этом этапе интегрирование завершено. Остается выделить действительную и мнимую части полученного выражения

$$\frac{(bx)^{i+1}}{(i+1)b} = \frac{(bx)^i bx}{(i+1)b} = \frac{(bx)^i x}{(i+1)} = \frac{e^{\ln(bx)^i}x}{(i+1)(-i+1)}(-i+1) = \frac{e^{i\ln(bx)}x}{2}(-i+1) =$$

$$= \frac{x(\cos(\ln(bx)) + i\sin(\ln(bx)))(1-i)}{2}.$$

Выделим действительную и мнимую части выражения

$$I_o^e=\int\cos(\ln(bx))dx=\frac{x(\cos(\ln(bx))+\sin(\ln(bx)))}{2}+C,$$
$$J_o^e=\int\sin(\ln(bx))dx=\frac{x(-\cos(\ln(bx))+\sin(\ln(bx)))}{2}+C. \qquad (5)$$

Как при вычислении интегралов (3) имеет место замечание, а именно,

$$I_o^e==\operatorname{Re}\int e^{i\ln(bx)}dx\,,\ J_{oe}=\operatorname{Im}\int e^{i\ln(bx)}dx\ .$$

Следующие два интеграла (1) вычисляются аналогично интегралам (2), при этом, следует перейти в логарифме $\log_a bx$ к основанию e по формуле $\log_a bx=\dfrac{\ln bx}{\ln a}$.

В данном случае нет необходимости вичислять интегралы, следует в формулах заменить $i\to i/\ln a$ и преобразовать

$$\frac{(bx)^{i/\ln a+1}}{(i/\ln a+1)b}=\frac{e^{\ln(bx)^{i/\ln a}}x}{(i/\ln a+1)(-i/\ln a+1)}(-ii/\ln a+1)=\frac{e^{i\log_a n(bx)}x}{(1/\ln^2 a+1)}(-ii/\ln a+1)=$$
$$=\frac{x\ln a(\cos(\log_a bx)+i\sin(\log_a bx))(\ln a-i)}{\ln^2 a+1}.$$

В результате получим

$$I_o=\int\cos(\log_a bx)dx=\frac{x\cdot\ln a\cdot(\ln a\cdot\cos(\log_a bx)+\sin(\log_a bx))}{\ln^2 a+1}+C,$$
$$J_o=\int\sin(\log_a bx)dx=\frac{x\cdot\ln a\cdot(-\cos(\log_a bx)+\ln a\cdot\sin(\log_a bx))}{\ln^2 a+1}+C. \qquad (6)$$

3. Расширение класса возвратных интегралов

Класс возвратных интегралов допускает обобщение

$$\int x^n a^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{Bmatrix}dx,\quad \int x^n\begin{Bmatrix}\cos(\log_a bx)\\ \sin(\log_a bx)\end{Bmatrix}dx,\ n=1,2.3,.... \qquad (7)$$

Для вычисления первых двух интегралов используется правило дифференцирования интегралов по параметру (в данном случае по α или β) и сведения интегралов к виду (1). Демонстрируем примером.

$$K_2=\int x^2a^{\alpha x}\cos(\beta x)dx=\operatorname{Re}\int x^2a^{\alpha x}e^{i\beta x}dx=-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\operatorname{Re}\int a^{\alpha x}e^{i\beta x}dx=-\operatorname{Re}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(K_o+iL_o).$$

В общем случае, $K_n+iL_n=\int x^n a^{\alpha x}e^{i\beta x}dx=i^{-n}\dfrac{\partial^n}{\partial\beta^n}\int a^{\alpha x}e^{i\beta x}dx=i^{-n}\dfrac{\partial^n}{\partial\beta^n}(K_o+iL_o).$

Итак, мы получили формулу

$$K_n+iL_n=i^{-n}\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}(K_o+iL_o)\ \text{или}\ K_n+iL_n=-i\frac{\partial}{\partial\beta}(K_{n-1}+iL_{n-1}).$$

Для вычисления второй пары интегралов I_n и J_n также обходимся без формулы интегрирования по частям.

$$I_n+iJ_n=\int x^n\cos(\log_a bx)dx+i\int x^n\sin(\log_a bx)dx=\int x^n e^{i\log_a bx}dx=b^{\frac{i}{\ln a}}\int x^{\frac{i}{\ln a}+n}dx=$$
$$=\frac{\ln a}{i+(n+1)\ln a}b^{\frac{i}{\ln a}}x^{\frac{i}{\ln a}+n+1}+C=\frac{\ln a}{i+(n+1)\ln a}x^{n+1}(bx)^{\frac{i}{\ln a}}+C=$$
$$=\frac{\ln a}{1+(n+1)^2\ln^2 a}x^{n+1}e^{i\log_a(bx)}((n+1)\ln a-i)+C.$$

Записывая $e^{i\log_a(bx)}$ в виде $\cos(\log_a bx)+i\sin(\log_a bx)$, остается выделить действительную и мнимую части полученного выражения

$$I_n = \frac{x^{n+1} \cdot \ln a \cdot \left((n+1)\ln a \cdot \cos\left(\log_a bx\right) + \sin\left(\log_a bx\right)\right)}{1+(n+1)^2 \ln^2 a},$$

$$J_n = \frac{x^{n+1} \cdot \ln a \cdot \left(-\cos\left(\log_a bx\right) + (n+1)\ln a \cdot \sin\left(\log_a bx\right)\right)}{1+(n+1)^2 \ln^2 a}.$$

Заметим, что вывод этих формул допускает обобщение. Натуральное число n можно заменить действительным α , и таким образом обобщить вычисленные интегралы I_n и J_n на I_α и J_α

$$\int x^\alpha \begin{Bmatrix} \cos\left(\log_a bx\right) \\ \sin\left(\log_a bx\right) \end{Bmatrix} dx, \text{ где } \alpha \in R.$$

Выводы

Предложен эффективный метод вычисления возвратных интегралов, которые обычно вычисляются в курсе математического анализа интегрированием по частям. Метод основан на использовании формулы Эйлера, т.е. с использованием функции комплексной переменной. Метод отличается простотой и оригинальностью. Показано, что интегралы (1)-(2) и (7) могут быть вычислены без применения метода интегрирования по частям, а более простым способом.

В работе также приведено обобщение класса возвратных интегралов (7) и вычислены в общем случае, и также без привлечения метода интегрирования по частям.

Подход представляет ценность, потому что в случае, когда интегралы подобного класса не вычисляются в элементарных функциях, то привлекаются приближенные методы расчета. В нашем подходе такие интегралы могут быть удобно представленными для последующих аппроксимаций.

Список использованной литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. I. / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Наука,1970. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа. Т. 1. / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. - М.: Изд-во ФМЛ, 1956. — 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, Изд-во ФМЛ, 1972. — 795 с.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / T.M. Apostol. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol 1. – 667 p.
5. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus / R. Wrede, M. Spiegel. – Schaum's Series, The MacGraw-Hill Companies Inc. 2002 (First Edition 1966). – 433 p.
6. Шведов И.А. Компактный курс анализа. Т. 1. / И.А. Шведов. – Новосибирск, 2003. — 113 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики Т. 1. / В.И. Смирнов. – Наука: Москва, 1974. — 479 с.

Надійшла до редакції:
25.03.2013

Рецензент:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Малашенко В.В.

Л.П. Мироненко,Н.Ф. Гоголєва
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Простий метод розрахунку зворотних інтегралів. *Метою роботи є спрощення розрахунку, так званих зворотних інтегралів, які розраховуються в інтегральному численні за допомогою метода інтегрування по частинах. Використовуя формулу Ейлера, зворотні інтеграли*

розраховані без звернення до методу інтегрування по частинах. Запропонований підхід значно спрощує обчислення зворотних інтегралів і відкриває можливість обчислення інших видів інтегралів.
Ключові слова: *зворотні інтеграли, інтегрування по частинах, формула Ейлера, інтегрування.*

L.P. Mironenko, N.F. Gogoleva
Donetsk National Technical University
A Simple Method of Return Integrals Calculation. *The purpose of the paper is to simplify the calculation of the so called return integrals*

$$\int a^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{Bmatrix}dx, \quad \int\begin{Bmatrix}\cos(\log_a bx)\\ \sin(\log_a bx)\end{Bmatrix}dx,$$

where $\alpha,\beta.a,b.a\neq 1, a>0$ *are given real numbers (parameters).*

In mathematical analysis return integrals are calculated using integration by parts. It is a well known fact that such integrals are calculated applying this method twice. As a result we have an equation relative to the initial integral, which is easily solved.

Our idea of evaluating such integrals was taken from operation calculus. Using Euler's formula $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ *returned integrals can be reduced to exponential function integration. Here we provide a simple example:*

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \mathrm{Re}\int e^{\alpha x+i\beta x}dx = \mathrm{Re}\frac{e^{\alpha x+i\beta x}}{\alpha+i\beta}+C.$$

It is obvious that integration is performed without the method of integration by parts.

A more complicated case is as follows:

$$\int\cos(\ln bx)dx + i\int\sin(\ln bx)dx = \int\exp(i\ln bx)ddx = \int(bx)^i dx = \frac{(bx)^{i+1}}{i+1}+C.$$

The last step of problem solution is to separate real and imaginary parts of the expression.

The method can be used for more complex integrals such as

$$\int x^n a^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{Bmatrix}dx, \quad \int x^n\begin{Bmatrix}\cos(\log_a bx)\\ \sin(\log_a bx)\end{Bmatrix}dx,\ n=1,2.3,....$$

To calculate the first group of integrals we use the method of differentiation by parameter. For the second group we apply the following transformation

$$I_n+iJ_n=\int x^n\cos(\log_a bx)dx + i\int x^n\sin(\log_a bx)dx = \int x^n e^{i\log_a bx}dx = b^{\frac{i}{\ln a}}\int x^{\frac{i}{\ln a}+n}dx =$$

$$=\frac{\ln a}{i+(n+1)\ln a}b^{\frac{i}{\ln a}}x^{\frac{i}{\ln a}+n+1}+C=\frac{\ln a}{i+(n+1)\ln a}x^{n+1}(bx)^{\frac{i}{\ln a}}+C=$$

$$=\frac{\ln a}{1+(n+1)^2\ln^2 a}x^{n+1}e^{i\log_a(bx)}\big((n+1)\ln a - i\big)+C.$$

The integrals have been calculated completely, though it is a really complicated problem for the method of integration by parts.

In integration by parts such integrals are a complicated problem. Our theory eliminates this problem, though there remain some difficulties with separation of real and imaginary parts of a complex variable function.
Keywords: *return integrals, integration by parts, Euler's formula, integration, complex variable.*