

УДК 004.272.2:519.63

О.А. Дмитриева (канд. техн. наук, доц.)ГБУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: dmitrieva.donntu@gmail.com**ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ БЛОЧНЫХ
ОДНОШАГОВЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ**

Разработаны параллельные блочные коллокационные методы, содержащие производные высших порядков для решения задачи Коши. Получены коэффициенты расчетных схем коллокационных одношаговых блочных методов. Для разработанных методов определены условия устойчивости, порядки точности и доказана сходимость по начальным данным и по правой части. Сгенерированные расчетные формулы обладают меньшей вычислительной сложностью, повышенным порядком аппроксимации и являются весьма эффективными при решении жестких уравнений.

Ключевые слова: задача Коши, точки коллокации, параллельный метод, старшие производные, устойчивость, сходимость.

Общая постановка проблемы

При численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

хорошо зарекомендовали себя коллокационные стадийные методы [1-4], в которых используются явные и неявные варианты введения точек коллокаций на шаге. Коллоцирование может использоваться и в многошаговых блочных методах, которые носят чисто неявный характер, при этом коллокационный многочлен строится не по стадийным, а по расчетным точкам блока [5-7]. Неявные коллокационные методы обладают, как правило, абсолютной устойчивостью, что позволяет использовать их при решении жестких задач, но при этом проблематичной остается их реализация в параллельных вычислительных системах, так как методы не обладают внутренним параллелизмом [8]. Важным вопросом является определение оптимальных порядков введенных производных, которые бы обеспечивали одинаковый порядок аппроксимации во всех точках блока [5-6]. В отличие от классических методов с ведением точек коллокации на шаге, где определяющим является порядок аппроксимации в точке $t_n + \tau$, так как только эта точка используется для последующего счета, в блочных методах все рассчитанные точки формируют решение и необходимо обеспечить требуемую точность во всех узлах коллокации $t_n + j\tau$, $j = 1, 2, \dots, s$. Использование в расчетных схемах только правых частей не обеспечивает одинаковый порядок, и точность определяется по худшему результату [9-11].

Постановка задач исследования

Поскольку современные модели динамических объектов описываются системами большой размерности, разрабатываемые методы должны быть ориентированы на использование в параллельных компьютерных системах и иметь хорошие показатели параллелизма.

Разностные схемы обладать должны повышенным порядком аппроксимации, позволяющим обеспечить заданную точность решения на интервале с большим шагом интегрирования, а, следовательно, сокращение времени получения решения даже при последовательной реализации. Выравнивание порядка аппроксимации должно быть осуществлено за счет введения в разностные схемы дополнительных производных.

Направленность методов на решение жестких задач обуславливает необходимость построения на их основе алгоритмов автоматического изменения размера шага интегрирования в зависимости от поведения исходной задачи

Руководствуясь вышеизложенными положениями в работе для обеспечения более высокой скорости сходимости и автоматического управления шагом интегрирования предлагаются параллельные коллокационные блочные расчетные схемы со старшими производными, позволяющие обеспечивать автоматическое управление шагом интегрирования при моделировании динамических объектов в параллельных вычислительных системах.

Генерация одношаговых блочных коллокационных расчетных схем со старшими производными

Параллельная реализация методов со старшими производными, когда точки коллокации вводятся на шаге с s стадиями, позволяет обеспечить одновременный расчет на стадиях и характеризуется только дополнительными итерациями, связанными с пересчетом значений производных, при этом количество дополнительных пересчетов определяется значением l - старшим (как правило, небольшим) порядком $f^{(l)}(t_n + j\tau, k_j)$ в расчетной схеме. Такое же введение добавочных производных в точках коллокации может быть использовано при построении одношаговых коллокационных методов, когда точки коллокации вводятся не на шаге, а в блоке (рис1), по шаблону (рис. 2) для одношаговых многоточечных методов.

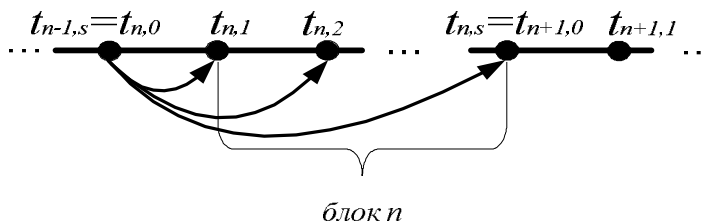


Рисунок 1 — Схема разделения на блоки s-точечного блочного метода

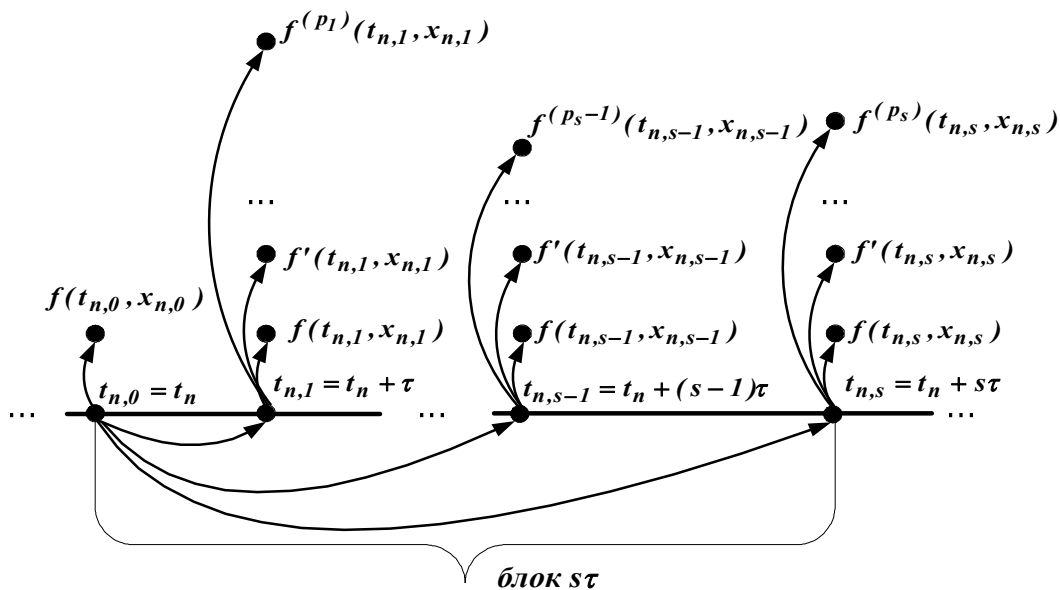


Рисунок 2 — Шаблон разностной схемы одношагового s-точечного блочного метода

Для получения разностных формул, определяющих значения приближенных решений дифференциального уравнения $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+s}$ в соответствующих узлах $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+s}$ по значению u_n в узле t_n , необходимо, чтобы в точках $t_{n+j} = t_n + j\tau \in [t_n, t_{n+s}]$, $j = 0, 1, \dots, s$ значения производных многочлена, построенного по значениям $\{t_{n+j}, f(t_{n,j}, u_{n,j}), f'(t_{n,j}, u_{n,j}), \dots, f^{(p_j)}(t_{n,j}, u_{n,j})\}$ совпадали бы с векторными полями дифференциального уравнения (1). В качестве многочлена с кратными узлами предполагается использование многочлена Эрмита, который может быть построен в виде рекуррентных соотношений вида [9, 12]

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \dots, \quad H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad (2)$$

или получен путем предельного перехода из многочленов Лагранжа и Ньютона [13].

Обозначим через $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+s}$ приближенные значения искомых решений, через $F_{n+1} = f(t_n + \tau, u_{n,1}), F_{n+2} = f(t_n + 2\tau, u_{n,2}), \dots, F_{n+s} = f(t_n + s\tau, u_{n,s})$ - правые части и через $F'_{n+1}, F'_{n+2}, \dots, F'_{n+s}, \dots, F^{(p_1)}_{n+1}, F^{(p_2)}_{n+2}, \dots, F^{(p_s)}_{n+s}$ соответствующие производные правых частей. Построим интерполяционный многочлен Эрмита $H_s(t)$ по таблице $\{t_{n+j}, f(t_{n,j}, u_{n,j}), f'(t_{n,j}, u_{n,j}), \dots, f^{(p_j)}(t_{n,j}, u_{n,j})\}$, $j = 0, 1, \dots, s$. Проинтегрируем (1) по t

$$x_{n+j} = x_n + \int_{t_n}^{t_n+j\tau} f(t, x(t)) dt, \quad j = 0, 1, \dots, s \quad (3)$$

Заменив в (3) функцию $f(t, x(t))$ на полином Эрмита $H_s(t)$ (2)

$$u_{n+j} = u_n + \int_{t_n}^{t_n+j\tau} H_s(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, s, \quad (4)$$

получим систему нелинейных разностных уравнений для определения значений $u_{n,j}$ приближенного решения задачи Коши (1) вида

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^s \tau^i a_{i,j}^{(1)} F_{n,i}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Приведем разностные уравнения одношагового четырехточечного метода, построенные по узлам $j = 1, 2, 3$ с дополнительно введенными первыми производными. Тогда для точек коллокации $\{t_n + \tau, t_n + 2\tau, t_n + 3\tau\}$ с шаблоном (рис. 3) система разностных уравнений примет вид (6).

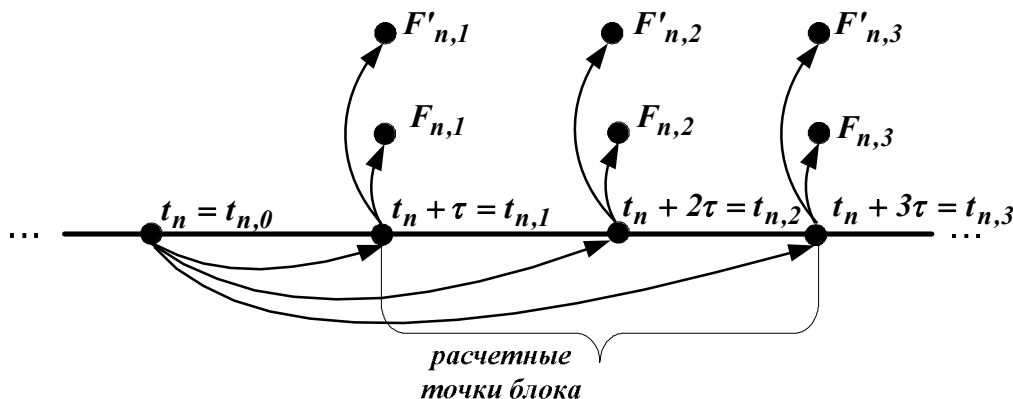


Рисунок 3 — Шаблон разностной схемы одношагового 3-точечного блочного метода с первыми производными

$$\begin{aligned}
 u_{n,1} &= u_{n,0} - \frac{\tau}{240} (949F_{n,1} - 608F_{n,2} - 581F_{n,3} + 637\tau F'_{n,1} + 1080\tau F'_{n,2} + 173\tau F'_{n,3}), \\
 u_{n,2} &= u_{n,0} - \frac{\tau}{15} (53F_{n,1} - 46F_{n,2} - 371F_{n,3} + 397\tau F'_{n,1} + 70\tau F'_{n,2} + 11\tau F'_{n,3}), \\
 u_{n,3} &= u_{n,0} - \frac{3\tau}{80} (93F_{n,1} - 96F_{n,2} - 77F_{n,3} + 69\tau F'_{n,1} + 120\tau F'_{n,2} + 21\tau F'_{n,3})
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Невязки в расчетных точках блока по соответствующим уравнениям системы:

$$\begin{aligned}
 r(t_n + \tau) &= -\frac{53x_0^{(7)}\tau^7}{4725} + O[\tau]^8, \\
 r(t_n + 2\tau) &= -\frac{107x_0^{(7)}\tau^7}{9450} + O[\tau]^8, \\
 r(t_n + 3\tau) &= -\frac{2x_0^{(7)}\tau^7}{175} + O[\tau]^8.
 \end{aligned}$$

Видно, что одинаковый седьмой порядок аппроксимации достигается во всех расчетных точках блока. Введем на тех же расчетных точках блока дополнительные производные и построим интерполяционный многочлен Эрмита $H_\tau(\mathbf{t})$ по таблице с элементами $\{t_{n+j}, F_{n+j}, F'_{n+j}, F''_{n+j}\}, j = 1, 2, 3$.

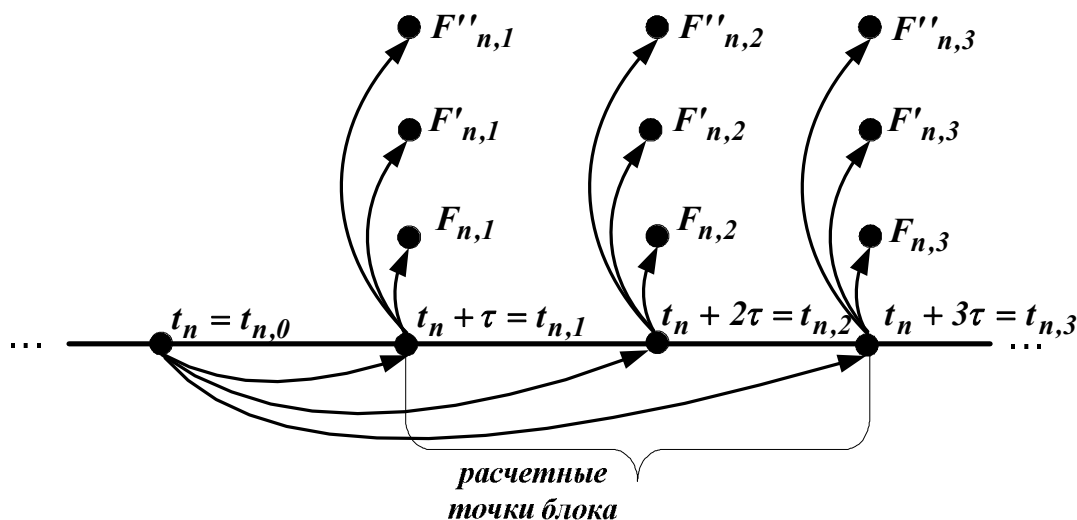


Рисунок 4 — шаблон разностной схемы одношагового 3-точечного блочного метода с первыми и вторыми производными

Сгенерированные разностные схемы будут представлены в виде:

$$\begin{aligned}
 u_{n,1} &= u_{n,0} + \frac{\tau}{40320} (1682097F_{n,1} - 2475264F_{n,2} + 833487F_{n,3} + 674937\tau F'_{n,1} + 408240\tau F'_{n,2} - \\
 &\quad - 295047\tau F'_{n,3} + 104119\tau^2 F''_{n,1} - 375296\tau^2 F''_{n,2} + 30409\tau^2 F''_{n,3}) \\
 u_{n,2} &= u_{n,0} + \frac{\tau}{1260} (53097F_{n,1} - 76584F_{n,2} + 26007F_{n,3} + 21177\tau F'_{n,1} + 12600\tau F'_{n,2} - \\
 &\quad - 9207\tau F'_{n,3} + 3259\tau^2 F''_{n,1} - 11696\tau^2 F''_{n,2} + 949\tau^2 F''_{n,3}), \\
 u_{n,3} &= u_{n,0} + \frac{3\tau}{4480} (62883F_{n,1} - 89856F_{n,2} + 31453F_{n,3} + 25083\tau F'_{n,1} + 15120\tau F'_{n,2} - \\
 &\quad - 11013\tau F'_{n,3} + 3861\tau^2 F''_{n,1} - 13824\tau^2 F''_{n,2} + 1131\tau^2 F''_{n,3}).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Порядки невязки в расчетных точках блока одинаковы:

$$r(t_n + \tau) = \frac{17x_0^{(10)}\tau^{10}}{179200} + O[\tau]^{11},$$

$$r(t_n + 2\tau) = \frac{43x_0^{(10)}\tau^{10}}{453600} + O[\tau]^{11},$$

$$r(t_n + 3\tau) = \frac{17x_0^{(10)}\tau^{10}}{179200} + O[\tau]^{11}.$$

и значительно превышают точность метода (6), имеющего 7-ой порядок и содержащего только первые производные правых частей. Что касается классического коллокационного метода, то на тех же стадийных точках и с той же размерностью системы метод дает только четвертый порядок [8].

Введение дополнительных производных, с одной стороны, значительно повышает порядок аппроксимации, а, с другой стороны, обходится значительно «дешевле» с точки зрения временных затрат, поскольку не приводит к росту размерности системы. Т.е. вычислительные затраты будут теми же, что и в случае решения стадийными коллокационными методами или соответствующими им неявными методами типа Рунге-Кутты. Таким образом, одношаговый многоточечный коллокационный метод в s раз эффективнее соответствующего одношагового односточечного коллокационного метода по скорости получения решения с фиксированным шагом, но обладает при этом повышенным порядком аппроксимации. Если же рассматривать поиск численного решения разработанными методами наряду с введением процедуры вариации шага, то для фиксированной точности получения результата время поиска решения значительно сократится еще и за счет возможности интегрирования с большим шагом.

Устойчивость и сходимость коллокационных одношаговых блочных методов со старшими производными

Так же, как и для случая введения точек коллокации со старшими производными на шаге, коллокационные блочные методы с выполнением свойства коллоцирования для производных порядка выше нулевого во всех точках блока, всегда устойчивы по начальным данным, так как решения однородной системы, соответствующей (5), в точках блока $t_n + j\tau, j = 1, 2, \dots, s$ имеют вид $u_{n,j} = u_{n,0}$ и являются равномерно по n ограниченными.

Для произвольной правой части необходимо получить оценку, устанавливающую устойчивость решения уравнения по правой части, из которой следует, что если разностное уравнение (5) аппроксимирует исходное уравнение (1), то решение разностной задачи сходится при $\tau \rightarrow 0$ к решению исходной задачи (1), причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации [13]. Запишем систему уравнений (5) в виде:

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(0)} F_{n,i}^{(0)} + \tau^2 \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(1)} F_{n,i}^{(1)} + \dots + \tau^{l+1} \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(l)} F_{n,i}^{(l)}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (8)$$

Исследование устойчивости по правой части проводится на одномерном модельном уравнении:

$$x' = \lambda x, \quad t > 0, \quad (9)$$

где λ - комплексное число ($\lambda < 0$). Этот вид модельного уравнения широко используется для анализа устойчивости численных методов решения дифференциальных уравнений [9, 13]. С учетом вида модельного уравнения систему (8) можно будет записать как

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(0)} u_{n,i} + \tau^2 \lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(1)} u_{n,i}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10)$$

Введем обозначения для матриц коэффициентов системы уравнений:

$$A^{(0)} = \{a_{i,j}^{(0)}\}, \quad A^{(1)} = \{a_{i,j}^{(1)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

для искомого вектора:

$$U_n = \{u_{n,j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а также вспомогательные обозначения:

$$\tau \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(1)} = C_j, \quad C = (C_j)^T \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad e = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

В векторной форме уравнение (10) будет иметь вид:

$$U_n = u_{n,0}e + \mu(A^{(0)}U_n + C),$$

где $\mu = \lambda t$.

После преобразований придем к уравнению:

$$(E - \mu A^{(0)})U_n = u_{n,0}(e + \mu Q).$$

Разрешим полученное уравнение относительно U_n

$$U_n = u_{n,0}(E - \mu A^{(0)})^{-1}(e + \mu Q) = Gu_{n,0},$$

где вектор $G = (g_1, g_2, \dots, g_s)^T$ представляет собой произведение матрицы на вектор вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \mu a_{1,1}^{(0)} & -\mu a_{1,2}^{(0)} & \dots & -\mu a_{1,s}^{(0)} \\ -\mu a_{2,1}^{(0)} & 1 - \mu a_{2,2}^{(0)} & \dots & -\mu a_{2,s}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu a_{s,1}^{(0)} & -\mu a_{s,2}^{(0)} & \dots & 1 - \mu a_{s,s}^{(0)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \mu Q_1 \\ 1 + \mu Q_2 \\ \vdots \\ 1 + \mu Q_s \end{pmatrix} \quad (11)$$

Введем вспомогательный вектор размерности s :

$$U_{n-1} = \{u_{n-1,s}, u_{n-1,s}, \dots, u_{n-1,s}\},$$

где $u_{n-1,s} = u_{n,0}$ и перейдем к эквивалентной системе:

$$U_n = \check{G}U_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

с матрицей

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & g_1 \\ 0 & 0 & \dots & g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_s \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Устойчивость численного метода (5) определяется собственными значениями матрицы \check{G} . Видно, что элементы этой матрицы являются рациональными функциями от μ и собственные значения матрицы \check{G} также будут зависеть от μ . Поэтому необходимо найти те области для собственных значений μ , в которых $|q(\mu)| < 1$. По виду матрицы \check{G} можно заключить, что она имеет $s-1$ нулевых собственных чисел $g_1 = g_2 = \dots = g_{s-1} = 0$ и $g_s \neq 0$.

Оценим устойчивость одношагового трёхточечного метода (6). Подставляя вместо правых частей соответственные значения из (10), сформируем вектор

$$G = \left(\frac{\mu(-945 + 907\mu - 210\mu^2)}{3(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)}, \frac{2\mu(-480 - 8\mu + 105\mu^2)}{3(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)}, \frac{-9\mu(35 + 37\mu + 10\mu^2)}{(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)} \right)^T$$

и матрицу \check{G}

$$\check{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu(-945 + 907\mu - 210\mu^2)}{3(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)} \\ 0 & 0 & \frac{2\mu(-480 - 8\mu + 105\mu^2)}{3(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)} \\ 0 & 0 & \frac{-9\mu(35 + 37\mu + 10\mu^2)}{(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)} \end{pmatrix}.$$

Определим собственные значения матрицы \check{G} , получим $g_1 = g_2 = 0$ и

$$g_3 = \frac{-9\mu(35 + 37\mu + 10\mu^2)}{(40 - 80\mu - 247\mu^2 + 30\mu^3)}$$

Граница области устойчивости одношагового трёхточечного метода (6) представлена на рис. 5. Из вида границы области устойчивости можно сделать вывод о том, что метод является $A(\alpha)$ -устойчивым со значением $\alpha = 85.91438322002513^\circ$.

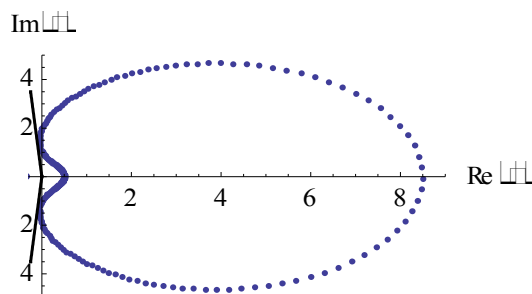


Рисунок 5 — Границы области устойчивости блочного одношагового коллокационного метода (6)

Для метода (7) собственные значения матрицы \check{G} будут иметь вид $g_1 = g_2 = 0$ и

$$g_3 = \frac{-9\mu(14595 + 16701\mu + 6650\mu^2)}{(6720 + 269637\mu + 546491\mu^2 + 188790\mu^3)}.$$

Границей области устойчивости метода со вторыми производными (7) является множество таких точек, для которых $|q(\mu)| = 1$. Из рис. 6 следует, что метод является $A(\alpha)$ -устойчивым со значением $\alpha = 86.63353933657021^\circ$.

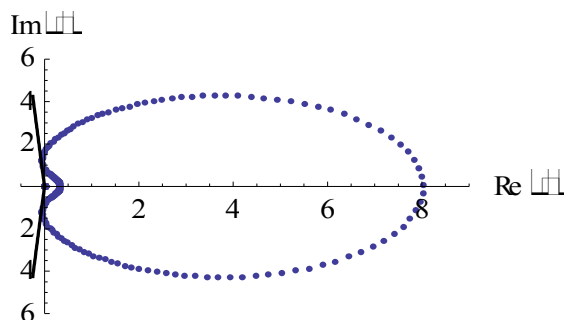


Рисунок 6 — Границы области устойчивости блочного одношагового коллокационного метода (7)

Таким образом, одношаговые многоточечные, четырёхточечный, блочные коллокационные методы являются $A(\alpha)$ -устойчивыми со значениями α , близкими к 90° , что позволяет использовать их для решения жестких систем.

Выводы

1. Разработаны коллокационные разностные формулы со старшими производными для блочных одношаговых многоточечных разностных схем решения задачи Коши. Определены условия устойчивости и доказана сходимость по начальным данным и по правой части, определён порядок их точности. Предложен математический аппарат для определения априорной оценки погрешности приближенного решения и характера устойчивости разностных схем.

2. Предложена методика генерации параллельных коллокационных разностных формул с производными высоких порядков на основе интегро-интерполяционного подхода, базирующаяся на использовании многочленов Эрмита.

3. Разработанные методы ориентированы на использование в параллельных вычислительных системах с улучшенными показателями ускорения и эффективности за счёт одновременного вычисления новых значений во всех точках блока. Потенциальное ускорение при этом соответствует количеству расчётных точек s .

Список использованной литературы

1. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1990. - 512с.
2. Куликов Г. Ю. Об одношаговых коллокационных методах со старшими производными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Ю. Куликов, А.И. Меркулов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1782-1807.
3. Куликов Г. Ю. Об автоматическом управлении длиной шага и порядком в одношаговых коллокационных методах со старшими производными / Г.Ю. Куликов, Е.Ю. Хрусталёва // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 6. – С. 1060-1077.
4. Аульченко С.М. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита / С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1665-1670.
5. Фельдман Л.П. Параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.П. Фельдман // Наук. пр. ДонНТУ, серія «Інфор., кібернет. та обчисл. техн.». – 2008. – Вип.9 (132). – С.33 - 40.
6. Фельдман Л.П. Разработка обобщенных коллокационных блочных методов / Л.П. Фельдман, О.А. Дмитриева // Моделирование-2012: конф., (16-18 мая 2012 г.): Сб. тр. конференции. – Киев: Институт проблем моделирования в энергетике, 2012. - С. 434-437.
7. Дмитриева О.А. Высокоэффективные алгоритмы управления шагом на основе параллельных коллокационных блочных методов / О.А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 77 – 88.
8. Dmitrieva O. Parallel Algorithms of Simulation. Increase of simulation of dynamic objects with the lumped parameters into parallel computer systems / O. Dmitrieva, A. Firsova. - Lambert Academic Publishing, 2012. – 192 p.
9. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитриева. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.
10. Дмитриева О.А. Организация параллельных вычислений при моделировании динамических объектов с автоматическим выбором шага и порядка / О.А. Дмитриева // Наукові праці ДонНТУ. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка» (ІКОТ-2012). – 2012. – Випуск 13(185). – С. 140-147.
11. Дмитриева О.А. Параллельное моделирование жестких систем на основе диагонализации полной матрицы / О.А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2011. – № 4. – С. 46-53.

12. Латыпов А.Ф. Численный метод решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита / А.Ф. Латыпов, О.В. Попик // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 78-85.
13. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Наука, 1989. – 432 с.

Надійшла до редакції:
04.02.2013

Рецензент:
д-р техн. наук, проф. Фельдман Л.П.

О.А. Дмитрієва

ДВНЗ «Донецкий национальный технический университет»

Підвищення порядку апроксимації паралельних блокових однокрокових різницевих схем розв'язання задачі Коші. Розроблено паралельні колокаційні методи, що містять похідні високих порядків для розв'язання задачі Коші. Отримано коефіцієнти розрахункових схем колокаційних однокрокових блокових методів. Для розроблених методів визначено умови стійкості, порядки точності і доведено збіжність за початковими даними і по правій частині. Згенеровані розрахункові формули мають меншу обчислювальну складність і є досить ефективними при розв'язанні жорстких рівнянь.

Ключові слова: задача Коші, точки колокації, паралельний метод, старші похідні, стійкість, збіжність.

O.A. Dmitrieva

Donetsk National Technical University

Increasing the Approximation Order of Parallel Block One-Step Difference Scheme for Solving the Cauchy Problem. The paper deals with the numerical realization of the Cauchy problem for ordinary differential equations and their systems in parallel computer systems. The block collocation methods are developed that allow us to find a solution simultaneously in all the calculating points of the block, which reduces the time of obtaining the solution even for the sequential implementation. In order to align the order of approximation in all the calculating points of the block the additional higher-order derivatives are introduced into the difference schemes. The collocation methods are based on the Hermite interpolation polynomials, the orders of which are equal to the number of collocation points. Interpolation polynomials with multiple nodes are constructed in the form of recurrence relations or are obtained by taking the limiting process of the Lagrange and Newton polynomials. The introduction of the additional derivatives does not increase the dimension of the system, so the computational cost is the same as in the case of solving by the stage collocation methods or their corresponding implicit Runge-Kutta methods. Thus, the one-step multi-point collocation method is s times more efficient than the corresponding one-step one-point collocation method in the speed of obtaining the solution with the fixed step, but has at the same time high order of approximation. In addition, for a fixed accuracy of obtaining the results the time of searching for solutions is also significantly reduced due to the possibility of integration with a big step. The conditions of stability, the order of accuracy and the convergence of the initial data and of the right-hand side are determined for the developed methods. It is proved that the methods are $A(\alpha)$ -stable with the values of α close to 90° . The software for generating the coefficients of design schemes of collocation one-step block methods of a given order of accuracy is developed. The systems of difference equations with arbitrarily imposed collocation points and the additional derivatives are given as the examples. It is shown that the order of approximation of the introduced methods is much higher than classical models, and is the same in all calculating points of the block. Thus, the developed design numerical schemes have less computational complexity, high approximation order and are very efficient in solving stiff equations.

Keywords: Cauchy problem, collocation points, parallel method, higher derivatives, stability, convergence.