МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу

"МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦИИ"

Часть 1

Для студентов, обучающихся по направлению
6.050201“Системная инженерия”
(для дневной и заочной форм обучения)

Рассмотрено
на заседании кафедры
автоматики и телекомуникаций
Протокол № 1 от 24.01.2013г.

Утверждено на заседании учебно-
издательского совета ДонНТУ
Протокол № 1 от 21.02.2013г.

Донецк, ДонНТУ 2013 р.

УДК 62-52 (071)

Конспект лекций по курсу "Математические модели объектов и систем автоматизации", часть 1 (для студентов, обучающихся по направлению подготовки 6.050201“Системная инженерия” (СУА) дневной и заочной форм обучения)/ Составители: Р.В. Федюн, В.А.Попов. - Донецк: ДонНТУ, 2013.- 89 с.

Составители: Р.В. Федюн, доц.
В.А. Попов, доц.

Рецензенты В.В.Червинский, доц.
В.А.Светличная, доц.

Ответственный за выпуск А.Г.Воронцов, зав. каф.

ВВЕДЕНИЕ

Описание системы — ее модель — содержит концентрированные знания о физическом/техническом процессе. Модель процесса необходима для того, чтобы управляющая система могла выдавать соответствующие команды на базе собранных измерений. Модель позволяет оценить, как техническая система будет реагировать на конкретное управляющее воздействие или внешнее возмущение, и какое управляющее воздействие необходимо, чтобы достичь определенного состояния системы. Модели необходимы не всегда — для простых задач типа управления заслонкой для наполнения бака жидкостью или включения лампочки при наступлении темноты они просто излишни. Другие задачи управления являются более сложными, и для их решения необходима тщательно разработанная количественная модель. Например, точная модель динамики и траекторий движения обязательна в робототехнике.

Существуют два основных способа разработки моделей — на основе физических принципов и на основе экспериментальных данных (результатов измерений). Приведены общие методы описания динамики непрерывных систем — в виде уравнений состояния и в виде отношения вход/выход.

Если данные измерений используются в контексте знаний о системе, то можно рассчитать переменные процесса, которые не удается измерить. Процедура расчета или оценки значений переменных состояния есть следствие одной из основных характеристик системы, которая называется наблюдаемостью. Наблюдаемость — это оценка, дает ли имеющийся набор измерений адекватную информацию о системе. Другая характеристика системы — управляемость, которая показывает, достаточно ли параметров системы, на которую могут влиять исполнительные механизмы, для управления процессом нужным образом.

С моделированием процессов всегда связаны некоторые неопределенности; иногда их удается описать, что упрощает ситуацию.

1. ИСТОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Использование обратной связи для целей управления имеет увлекательную историю. Впервые принцип обратной связи был применен при создании поплавковых регуляторов в Греции за 300 лет до н. э. Такой регулятор был использован Ктесибиосом в водяных часах.

Время измерялось с помощью капель воды, падающих с постоянной скоростью через сопло из резервуара. Чтобы обеспечить постоянную скорость истечения воды, необходимо было поддерживать постоянный уровень воды в резервуаре, а для этого требовалось автоматическое регулирование. Интересно, что задача поддержания постоянного уровня жидкости в сосуде до сих пар сохраняет актуальность, и мы занимаемся проектированием соответствующих систем регулирования.

Одна из возможных конструкций водяных часов показана на рис. 1.1.

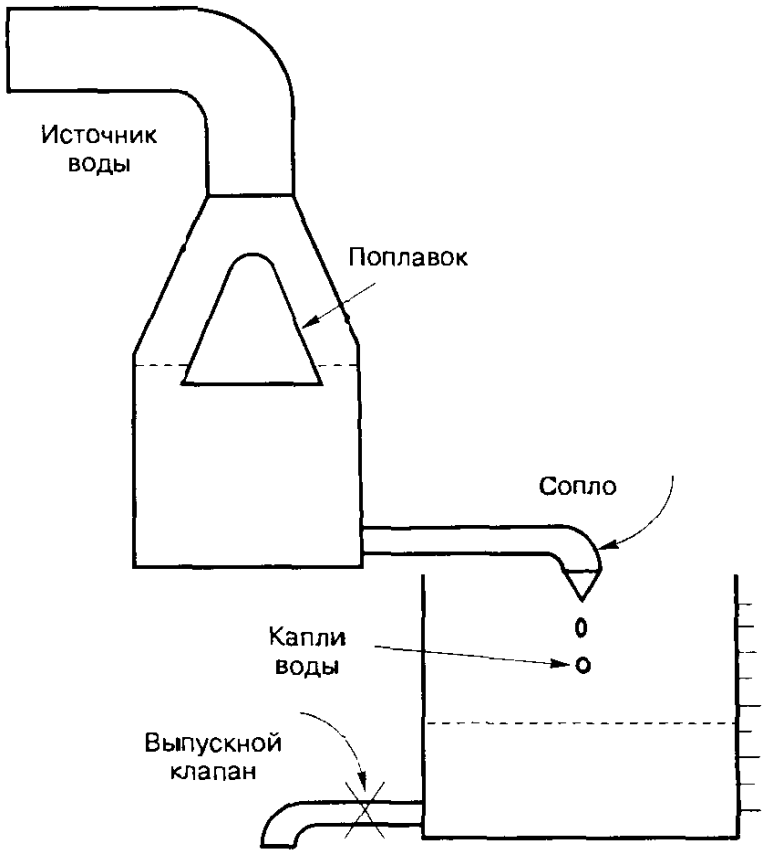


Рисунок 1.1. Простейшие водяные часы

Плавающий клапан в верхнем сосуде, одновременно выполняющий роль датчика и исполнительного устройства системы регулирования, служит для поддержания постоянного уровня воды в этом сосуде. Когда уровень воды соответствует заданному значению, клапан закрывает питающую магистраль. Если же уровень меньше заданного, то клапан открывает магистраль, что приводит к повышению уровня. Обратите внимание, что действие этого механизма аналогично работе сливного бачка в туалете. Вода через сопло капает в нижний сосуд, снабжённый проградуированной шкалой. Уровень воды в нём точно указывает промежуток времени с того времени, когда сосуд был пуст. Фактически накопление воды в нижнем резервуаре является операцией интегрирования (суммирования). Аналогичная процедура (суммирование) используется при численном интегрировании в цифровых компьютерах. Эта процедура использовалась 22 столетия назад, и в наши дни данный принцип лежит в основе работы современных компьютеров. Действительно, здесь трудно изобрести что-то новое.

В масляном фонаре, изобретенном Филоном приблизительно в 250 году н.э., поплавковый регулятор позволял поддерживать постоянный уровень масла, игравшего роль горючего. Херон из Александрии, живший в первом столетии н. э., написал книгу под названием ***Пневматика***, в которой привел несколько чертежей поплавковых регуляторов уровня воды.

Первой системой с обратной связью, изобретенной в современной Европе, был регулятор температуры Корнелиуса Дреббеля (1572-1633) из Голландии. Регулятор температуры, который он использовал в своих химических опытах и в инкубаторах для выведения цыплят. Этот регулятор содержал устройство, позволявшее выпускать нагретый воздух из камеры, когда температура в ней достигала желаемого значения. Его можно сравнить с уже известной нам системой автоматического регулирования температуры в жилом помещении; разница лишь в том, что в этой системе нагретый воздух начинал циркулировать, когда температура опускалась ниже заданного значения.

Дени Папен (1647-1712) в 1681 г. изобрел первый регулятор давления для паровых котлов, работавший по принципу предохранительного клапана.

Американец Уильям Генри (1729-1786) изобрёл регулятор температуры, в котором использовалась заслонка, автоматически управлявшая сгоранием топлива и, следовательно, температурой. Принцип действия датчика температуры и исполнительного устройства был основан на давлении нагретого воздуха при его расширении. Расширение воздуха приводило к закрытию заслонки и уменьшению сгорания топлива, а сжатие воздуха стремилось открыть заслонку.

Многими изобретателями были внесены усовершенствования в конструкцию поплавковых регуляторов уровня жидкости. Это сделали Джеймс Бриндли в 1758 г., Сат Томас Вуд в 1784 г. (оба — в США) и И.И.Ползунов в 1763 г. в России. Усовершенствования регуляторов давления для паровых котлов сделали Дени Папен (1647-1712), Рой Делап в 1799 г. и Мэтью Мюррей в 1799 г.

В России первой в истории системой с обратной связью был поплавковый регулятор уровня воды в паровом котле, изобретенный И. Ползуновым в 1765 г. (рис. 1.2). С помощью поплавка измерялся уровень воды, а рычажный механизм воздействовал на клапан, регулировавший подачу воды в котел.

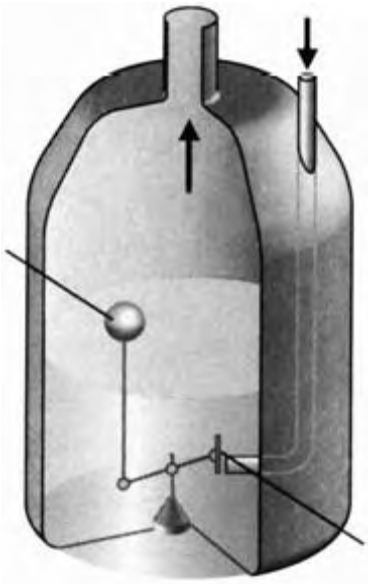


Рисунок 1.2. Поплавковый регулятор уровня воды в паровом котле

Главным изобретением в области управления скоростью ветряных мельниц и паровых машин был центробежный регулятор Томаса Мида (1787 г.). В 1788 г. Мэтью Бот и Джеймс Уатт предложили конструкцию центробежного регулятора скорости, изображённую на рис. 1.3.

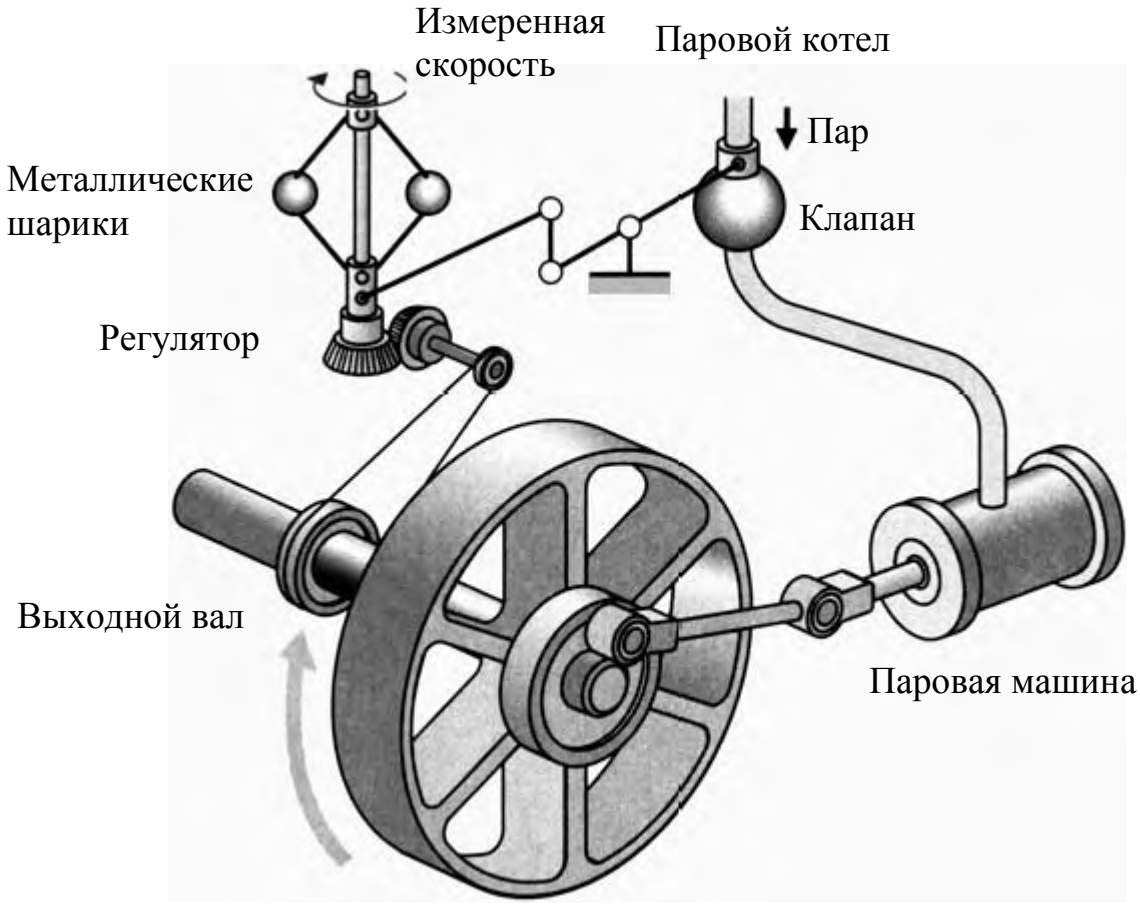


Рисунок 1.3. Центробежный регулятор скорости

При увеличении скорости вращения машины шарики за счёт центробежной силы расходились, что, в свою очередь, приводило к перемещению втулок вверх по оси машины. При этом с помощью клапана, управляемого рычажным механизмом, уменьшалась подача пара и, следовательно, скорость вращения. Уменьшение скорости вращения приводило к обратному эффекту.

Период до 1868 г. характеризовался появлением систем автоматического управления, главным образом, благодаря интуиции и изобретательству. Попытки увеличить точность управления приводили к медленному затуханию колебаний во время переходных процессов и даже к потере системой устойчивости. Именно

тогда и возникла необходимость разработки теории автоматического управления. Дж. Максвелл, используя дифференциальное уравнение как модель регулятора, заложил математические основы теории управления. Его работа была посвящена исследованию влияния изменения параметров системы на ее поведение. В те же годы И. А. Вышнеградский сформулировал математическую теорию регуляторов.

Чтобы устранить неустойчивость, потребовалось создание математических моделей физических устройств, т.е. уравнений, решение которых описывало бы поведение этих устройств. В результате появились современные математические методы моделирования, анализа и синтеза систем управления. В разработку этих методов внесли свой вклад очень многие ученые. Пьер Симон Лаплас (1749-1827) изобрёл преобразование (названное впоследствии его именем), являющееся основой большинства методов анализа и синтеза систем управления. Из других учёных отметим Исаака Ньютона (1642-1727) — математическое моделирование и анализ; Брука Тейлора — математический анализ (ряды Тейлора); Джеймса Клерка Максвелла (1831-1879) — математическое моделирование и анализ; Эдварда Джона Рауса (1831-1907) — критерий Рауса; Оливера Хевисайда (1850—1925) — математический анализ; Чарльза П. Стейнметца (1865-1923) — анализ частотных характеристик с помошью комплексных переменных; Гарри Найквиста (1889-1976) — критерий Найквиста; Хендрика У. Боде (1905-1982) — диаграмма Боде; Гарольда С. Блэка (1898-1981) — усилители с отрицательной обратной связью; У. Р. Эванса — корневой годограф; и Джона фон Неймана (1903-1957) — принцип действия цифрового компьютера. Этот список ни в коей мере не является исчерпывающим как в персональном плане, так и в плане достижений в отдельных областях. Он лишь призван дать читателю сведения о том, какие идеи и в какое время разрабатывали перечисленные выше учёные. Список современных учёных, внёсших весомый вклад в развитие теории автоматического управления, был бы слишком длинным и. конечно, далеко не бесспорным.

Перед Второй мировой войной развитие теории и практики управления в США и Западной Европе шло по несколько иному пути, нежели в России и Восточной Европе. В США в это время основные усилия были направлены на

применение обратной связи в системах телефонии и электронных усилителях. Главные достижения здесь принадлежат Боде, Найквисту и Блэку, которые предложили описывать работу усилителей с обратной связью с помощью частотных характеристик. Напротив, в бывшем Советском Союзе известные математики и механики опережали западных ученых в области собственно теории управления, причем акцент делался на анализ систем во временной области с использованием дифференциальных уравнений.

Приводимые ниже два примера показывают, как с помощью обратной связи можно улучшить свойства системы.

Гарольд С. Блэк в 1921 г. окончил Вустерский политехнический институт и поступил на работу в фирму «Белл лабораториз» корпорации AT&T. В то время главной задачей, над которой работала фирма, было улучшение качества телефонной связи и используемых при этом усилителей сигналов. Блэку было поручено заняться линеаризацией и стабилизацией усилителей, устанавливаемых в тракте передачи голосовых сообщений на расстояния в тысячи миль.

Блэк вспоминает:

Было утро вторника 2 августа 1927 г., когда во время переправы на пароме через Гудзон по дороге на работу мне внезапно в голову пришла мысль об использовании в усилителе отрицательной обратной связи. Более 50 лет я размышлял, как и почему возникла эта идея, но даже и теперь я не могу сказать, как всё произошло. Я знаю только то, что после нескольких лет работы над проблемой я неожиданно понял, что если подать сигнал с выхода усилителя на его вход, причем в обратной фазе, и воспрепятствовать самовозбуждению усилителя (свисту, как мы позже назвали этот эффект), то я получу именно то, что хотел — способ устранения искажений выходного сигнала. Я раскрыл утреннюю газету *Нью-Йорк Таймс* и на полях набросал соответствующую схему, дополнив ее формулой для коэффициента усиления с учетом обратной связи. Я подписался под этой схемой, а 20 минут спустя, когда я прибыл в лабораторию на Уэст-стрит, 463, ее также заверил своей подписью ныне покойный Эрл К. Блессинг.

Я представил себе, что это решение может привести к разработке усилителей с высокой степенью линейности (при отрицательной обратной связи от 40 до 50 дБ), но оставался один важный вопрос: как я узнал, что смогу избежать самовозбуждения подобной схемы в широком частотном диапазоне, хотя многие вообще сомневались в ее устойчивости? Моя уверенность основывалась на работах, которые я проделал два года назад, занимаясь исследованием оригинальных осцилляторов, и три года назад, когда проектировал оконечные каскады и разрабатывал математические основы телефонной системы для междугородных переговоров.

Другим примером инженерного решения проблемы управления является создание системы наведения орудия, выполненное Дэвидом Б. Паркинсоном из «Белл Телефон Лабораториз». Весной 1940 г. 29-летний инженер Паркинсон занимался модернизацией автоматического самопишущего прибора, предназначенного для регистрации на диаграммной бумажной ленте изменяющегося напряжения. Самым капризным элементом в приборе был маленький потенциометр, с помощью которого через исполнительный механизм производилось управление перемещением пера самописца.

В мыслях у Паркинсона было орудие, которое чувствовало бы приближение самолета и уничтожало его. Вот что описывает Паркинсон:

После трех или четырех выстрелов один из членов орудийного расчета улыбнулся и попросил меня подойти поближе. Когда я это сделал, он указал мне на левую цапфу орудийной турели, и я увидел, что там установлен такой же потенциометр, что и в моём самописце!

На следующее утро Паркинсон воплотил свои мечты в реальность:

«Если мой потенциометр был способен управлять перемещением пера самописца, то нечто похожее могло бы, с соответствующими техническими изменениями, управлять наводкой зенитного орудия».

После напряженной работы в этом направлении вооруженным силам США 1 декабря 1941 г. была предложена инженерная модель соответствующего устройства. В начале 1943 г. было налажено промышленное производство

подобных систем, и на вооружение было принято около 3000 систем орудийной наводки. На вход регулятора поступал сигнал от радиолокатора о текущем положении самолета, а в системе управления вычислялось его будущее положение.

Большой толчок развитию теории и практики автоматического управления дала Вторая мировая война, когда возникла потребность в создании автопилотов, систем орудийной наводки, станций радарного слежения и других устройств военного назначения, работающих на основе принципа обратной связи. Сложность систем военного назначения и ожидаемые выгоды от их применения побудили расширить круг технических средств и обострили интерес к системам управления и разработке новых методов их синтеза и анализа. До 1940 г. в большинстве случаев синтез систем управления проводился методом проб и ошибок и являлся своего рода искусством. В 40-е годы значительно выросло число аналитических методов синтеза, и теория управления по праву стала настоящей инженерной дисциплиной.

После Второй мировой войны в теории управления по-прежнему преобладали частотные методы, но наряду с этим возросла роль преобразования Лапласа и комплексной р-плоскости. В 50-е годы акцент в теории управления был сделан на разработку методов, связанных с использованием ^-плоскости, в частности, метода корневого годографа. В 80-е годы обычным делом стало применение цифровых компьютеров в системах управления. В настоящее время в США в системах прямого цифрового управления задействовано более 400000 компьютеров, благодаря чему появилась возможность одновременного измерения и управления многими переменными.

Запуск первого искусственного спутника Земли и начало космической эры дали новый толчок развитию техники управления. Возникла необходимость создания сложных, высокоточных систем управления для ракет и космических зондов, а возросшие требования к точности этих систем и желание минимизировать массу спутников обусловили повышенный интерес к теории оптимального управления. Именно поэтому в последние два десятилетия стали

популярными методы анализа и синтеза во временной области, разработанные Ляпуновым, Минорским и другими учеными, в особенности Л. С. Понтрягиным в СССР и Р. Беллманом в США. Теперь не вызывает сомнения, что при решении задач анализа и синтеза систем одновременно должны использоваться как частотные, так и временные методы.

Избранные этапы развития теории автоматического управления и математических методов автоматизации :

1769 Дж. Уатт разработал паровую машину с регулятором. Это считается началом Промышленной Революции в Великобритании. За время Промышленной Революции достигнуты большие успехи в механизации процессов, считающейся предшественницей автоматизации.

1800 Эли Уитни предложил концепцию взаимозаменяемости деталей при производстве мушкетов. Это считается началом эпохи массового производства.

1868 Дж. Максвелл создал математическую модель регулятора для паровой машины.

1913 Генри Форд на своем предприятии внедрил механизированную сборку автомобилей.

1927 Г. Боде занимается анализом усилителей с обратной связью

1932 Г. Найквист разработал метод анализа устойчивости систем

1952 В Массачусетском технологическом институте разработаны станки с числовым программным управлением.

1954 Джорж Девол создал «устройство для переноса предметов», считающееся прообразом промышленных роботов.

1960 На основе идей Девола создан первый робот «Юнимейт».

В **1961** г. такие роботы начали применяться для обслуживания штамповочных станков.

1970 Предложены модели систем в переменных состояния; разработана теория оптимального управления

1980 Подробно исследуются робастные системы управления

1990 Предприятия, работающие на экспорт, широко внедряют автоматизацию

1994 Системы управления с обратной связью устанавливаются в автомобилях.

В производстве появляется спрос на надежные робастные системы управления

История развития компьютерного (цифрового) управления

Первый пример практического применения управляющей ЭВМ относится к 1959 году; он связан с работой нефтехимического завода компании "Texaco" в городе Порт-Артур, штат Техас. Компания "Texaco" выполнила эту пионерскую работу совместно с производителем ЭВМ — компанией Thomson RamoWoolridge. Компьютер RW300, построенный на электронных лампах, следил за расходом, температурой, давлением и концентрацией на нефтеперегонном производстве, а также рассчитывал необходимые управляющие воздействия на основе обработки входной информации и затем либо самостоятельно изменял опорные значения для аналоговых регуляторов, либо указывал оператору, какие управляющие воздействия нужно выполнить вручную. Эта ЭВМ по сравнению с современными компьютерами имела очень скромные возможности: время сложения составляло 1 мс, а умножения — около 20 мс. Кроме того, она имела очень невысокую надежность — среднее время между отказами в лучшем случае составляло от нескольких часов до нескольких дней.

Вначале все факторы были против применения управляющих компьютеров. Чтобы оправдать стоимость системы управления в несколько миллионов долларов, капиталовложения в производство должны были быть по крайней мере на порядок больше. Это означало, что сам процесс должен был быть очень сложным, как, например, в случае химического завода. Другим ключевым фактором было — и остается — структурирование проблемы управления как необходимое предварительное условие внедрения компьютерного управления.

Экономическая эффективность была не единственной проблемой. Надежность аппаратной части ЭВМ была низкой из-за использования электронных ламп. Программы создавались в машинном коде и использовали скромный объем памяти до последнего бита. И все же эти новаторские усилия были поддержаны многими производителями компьютеров, которые увидели огромный потенциальный рынок для новых приложений.

Компьютерное управление — это область, в которой с самого начала существовало необычайно конструктивное взаимодействие между теорией и практикой. Как описано далее, компьютерное управление имеет свои специфические черты. Известные математические методы, базирующиеся на анализе непрерывных функций, напрямую не применимы для проектирования систем управления на базе цифровых компьютеров. Поэтому потребовалось создать специальную теорию дискретного управления. Счастливым совпадением стало развитие в 1960-е годы американской космической программы и особенно проекта "Аполлон", который послужил катализатором для теоретических и практических разработок в области компьютерного управления.

Важный шаг был сделан в 1962 году, когда английская компания ICI (Imperial Chemical Industries) представила концепцию прямого цифрового управления. Первоначально идея заключалась в замене нескольких аналоговых контуров управления центральным компьютером. Огромная и дорогостоящая панель управления с сотнями аналоговых регуляторов и самописцев заменялась несколькими терминалами. Компьютер численно моделировал аналоговые регуляторы способом, который мало отличался от сегодняшних решений.

Принцип прямого цифрового управления применяется во многих современных промышленных компьютерных системах. Причина его успеха в том, что задачи управления уже были описаны и структурированы для аналоговой техники. Поэтому для таких приложений риск был меньше, чем для инновационных разработок, где цели компьютерного управления не полностью осмыслены и не определены должным образом. Очевидный недостаток прямого цифрового управления — существенная зависимость надежности системы от

центрального компьютера. Однако за дополнительную плату можно было установить второй компьютер, который бы обеспечивал работоспособность системы в случае отказа первого. Выпущенный в 1962 году управляющий компьютер Ferranti-Argus был гораздо совершеннее модели 1959 года — время сложения и умножения уменьшилось в десятки раз, а показатель надежности возрос не менее чем на порядок.

Изобретение в 1960-х годах транзистора дало заметный толчок развитию компьютерных приложений. Стоимость единицы вычислительной мощности мини-компьютера на транзисторной элементной базе была на порядок меньше, чем у больших ЭВМ ***(mainframe)***, хотя стоимость самого мини-компьютера все еще превышала 100 000 долларов. Так или иначе, компьютерное управление стало экономически целесообразным для небольших и не очень сложных производств. Появилась возможность разместить мини-компьютер поблизости от производственных помещений, и поэтому такие ЭВМ стали популярными для автоматизации технологических процессов и испытательных установок. Согласованное влияние трех главных факторов — совершенствование технической базы компьютеров, экономическая целесообразность их применения в управлении относительно простыми процессами и развитие теории управления — привело к широкому распространению компьютерного управления.

Практически каждое десятилетие появлялись новые технологии, которые приводили к значительному увеличению производительности и снижению цены компьютеров по сравнению с предшествующим поколением. Мощные одноплатные микрокомпьютеры появились на рынке в середине 1970-х годов, и сегодня даже простейший регулятор экономически выгодно создавать на основе цифровых устройств. Современные персональные компьютеры намного превосходят мини-компьютеры 1960-х и 1970-х годов — типичная конфигурация, как правило, включает 16-или 32-разрядный центральный процессор (ЦП), мегабайты оперативной памяти (оперативное запоминающее устройство — ОЗУ), гигабайты дисковой памяти, — а стоят несравнимо дешевле первых моделей ЭВМ.

В настоящее время в промышленном управлении популярны компьютерные системы, использующие так называемую открытую шинную архитектуру, где акцент сделан не на конкретные аппаратные компоненты, а на организацию интерфейса, который в этом случае позволяет подбирать их исходя из требований приложения и максимальной эффективности использования ресурсов компьютера.

С другой стороны, производительность компьютера — это еще не все. Эффективность системы зависит не только от управляющего компьютера. Бортовая ЭВМ корабля первой лунной экспедиции "Apo11o-11" (1969 год) имела только 64 Кбайт оперативной памяти, а о жестких дисках не могло быть и речи. Сегодня никто не воспримет такую машину всерьез, но если вспомнить результат, достигнутый с помощью этой ЭВМ, то напрашивается очевидный вывод — основное внимание нужно уделять главной цели технического процесса, а не мощности компьютера. Высокая производительность не может быть аргументом сама по себе, напротив, она должна рассматриваться в свете динамики и сложности контролируемого процесса. Медленный компьютер прекрасно справится с управлением медленным процессом, например химическим или биологическим.

В системах цифрового управления сравнительно легко вводятся новые стратегии, поскольку можно полностью изменить образ действий компьютера, заменив программу, без перепроектирования и переоснащения всей системы. Поэтому системы цифрового управления представляют собой не просто новый способ применения отработанных принципов, но и совершенно новую технологию, обладающую большой гибкостью и новыми возможностями. Понимание природы процесса, динамических свойств системы и теории управления - это необходимые слагаемые успеха компьютерного управления, но они представляют едва ли половину картины.

Главная трудность — структурировать все решения в терминах аппаратного и программного обеспечения и обмена информацией.

Необходимо иметь в виду, что чрезмерное и одностороннее увлечение компьютерными технологиями может заслонить собой фундаментальные проблемы. Сегодня, после сорока лет применения компьютеров, существует достаточный опыт, чтобы задаться вопросом о реальных преимуществах, которые они принесли в промышленность и административное управление. В западных странах в 1950-60-х годах, еще до широкого распространения ЭВМ, один работающий мог содержать целую семью, включая выплату кредита за дом. В типичной современной семье по крайней мере уже двое должны работать, чтобы поддержать стиль жизни, удовлетворяющий средним запросам, уровень которых продолжает повышаться. То, что два десятилетия назад представлялось золотым веком, обусловленным повсеместным внедрением компьютеров и автоматизации, сильно потускнело сегодня благодаря новым проблемам — от безработицы до загрязнения окружающей среды. То же самое может произойти с сегодняшней чрезмерно высокой оценкой Интернета и компаний, основной бизнес которых построен на Интернет-технологиях (виртуальные магазины и т. д.). Нисколько не принижая их достоинства и преимущества, следует отметить, что они не дают надежных и эффективных способов решения реальных проблем. Чрезмерный упор на использование компьютеров, особенно с причудливыми картинками и звуком, может отвлечь внимание от действительно серьезных задач.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Понятие "объект"

Можно сказать, что это самая фундаментальная категория, потому что все, чем мы занимаемся, представляет собой различные объекты. Как физические, так и психические возможности человека ограничены, поэтому свою деятельность в окружающем мире он начинает с выделения в нем отдельных частей или **объектов**.

Можно выделить следующие **основные виды объектов**:

- **статический** - объект, рассматриваемый как недвижущийся (не изменяющий формы, содержания, положения во времени и пространстве);

- **динамический** - объект, рассматриваемый как движущийся (движение и покой относительны, т.е. один и тот же объект можно рассматривать в различных условиях и как статический, и как динамический);

- **простой** - объект, в котором не выделяется составных частей (других объектов);

- **сложный** - объект, по крайней мере одна часть которого выделяется как другой объект (т.е. сложность объектов зависит от степени нашей заинтересованности);

- **внутренний** - объект, являющийся частью другого, сложного объекта, который по отношению к нему называется **внешним**;

- **составной** - сложный объект, рассматриваемый как объединение его внутренних объектов.

Свойства объектов и их описание. При изучении какого-либо объекта выделяют одно или несколько его свойств.

Свойство объекта – это одна из частей его сущности, проявляющаяся в связи (например, во взаимодействии) с другими объектами.

Например, можно говорить о свойстве магнита притягивать железные предметы, свойстве электрической цепи отклонять стрелку амперметра и т.п.

Типовой объект (аналог) – это объект, основные свойства которого, составляющие его сущность, совпадают с основными свойствами данного объекта. Типовые объекты могут объединяться в классы.

Основные свойства объекта не есть что-то абсолютное и постоянное: с точки зрения одной задачи могут быть выделены одни свойства, принимаемые за основные, с точки зрения другой – другие. Поэтому классификация фактически производится по некоторому **критерию** (или признаку) – правилу, описывающему основные свойства классифицируемых объектов.

Характеристика (синоним: координата) **объекта** – величина (переменная), выбранная для описания объекта или его отдельных свойств.

Все характеристики подразделяются на два больших класса: признаки и параметры.

Признак объекта – его качественная характеристика (не измеряется числами).

Параметр объекта – его количественная характеристика (измеряется числами).

Например, сила тока – это параметр электрической цепи.

2.2. Понятие движения

Основными в этой группе являются категории "**процесс**", "**событие**" и "**состояние процесса**".

Процесс - это движение динамического объекта, рассматриваемое как имеющее протяженность во времени.

Таким образом, процесс всегда происходит на некотором интервале времени (t_1,t_2), где t_1 - момент начала, а $t_2 = t_1 + \Delta t$ $(\Delta t>0)$ - момент завершения процесса. В частном случае процесс можно рассматривать как бесконечный, происходящий на бесконечном временном интервале.

Процесс можно также рассматривать как объект, представляющий собой движение другого, динамического объекта. В теории систем управления этим

часто пользуются, когда говорят о процессах, протекающих в объекте управления, или об объекте управления как об управляемом процессе.

Событие - это движение динамического объекта, рассматриваемое как происходящее мгновенно (не имеющее протяженности во времени).

Как следует из определения, любое событие происходит в некоторый момент времени ***t***. Оно также может рассматриваться как объект.

Отметим, что процесс и событие относительны, т.е. одно и то же движение в зависимости от условий может рассматриваться и как процесс, и как событие ("жизнь - только миг между прошлым и будущим").

Состояние (процесса или объекта) - это динамический объект, который в некоторый момент из интервала его движения рассматривается как статический, обладающий определенными свойствами или свойством.

Понятие состояния широко используется при организации управления различными объектами, например, для описания движения систем управления во времени (см. далее). Обычно состояние объекта описывается набором значений соответствующих характеристик (см. § 3). Например, состояние больного может быть описано такими параметрами, как давление, пульс и т.п.

Дискретный процесс – процесс, рассматриваемый как последовательность событий на некотором интервале времени, между которыми состояние процесса не изменяется.

Непрерывный процесс (на некотором интервале) – процесс такой, что на всем интервале не существует ни одного внутреннего интервала, на котором состояние процесса остается неизменным.

Отметим следующее:

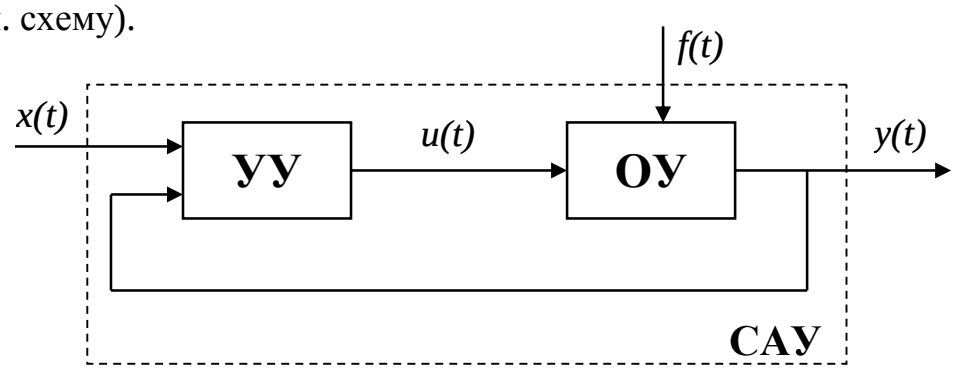
1. Непрерывный процесс не всегда описывается непрерывной функцией.
2. Могут быть введены дискретно-непрерывные или непрерывно-дискретные процессы, ведущие себя на различных интервалах времени попеременно и как непрерывные, и как дискретные.
3. Контроль за поведением или протеканием процесса на некотором интервале времени сводится к контролю текущего состояния в каждый

момент из данного интервала. Для непрерывных процессов необходим, как правило, непрерывный контроль текущего состояния, для дискретных – можно ограничиться дискретным, проводимым в отдельно взятые моменты времени. При этом важно, чтобы на каждый интервал времени между двумя последовательными событиями в дискретном процессе приходился по крайней мере один момент контроля, и чтобы продолжительность контроля не выходила за этот интервал.

2.3. Понятие "система управления"

Система управления - это динамическая система, состоящая из трех **основных** (могут быть еще дополнительные) элементов: *объекта управления*, *управляющего устройства* и *цели управления*. Воздействия *объекта управления* на *управляющее устройство* рассматриваются как передача информации о текущем состоянии объекта управления и называются **информационными воздействиями**, воздействия *управляющего объекта* на *объект управления* определяются на основе информационных воздействий и называются **управляющими воздействиями**. *Цель управления* рассматривается как *новое состояние* объекта управления и управляющие воздействия направлены на ее достижение.

Таким образом, структура системы управления выглядит следующим образом (см. схему).



Объект управления является динамическим объектом и поэтому часто говорят о его движении как о процессе, о процессах, протекающих в объекте

управления или об управляемом процессе. Если объект управления рассматривается как система, то вводится понятие "**управляемая система**".

Управляющее устройство - это сложный динамический объект, внутренними объектами которого могут быть люди, автоматы и другие устройства, здания и сооружения, каналы связи, средства труда и т.п. Если управляющее устройство рассматривается как система, то оно называется "**управляющей системой**".

Физическая величина *y(t)*, которая характеризует состояние объекта и которую преднамеренно изменяет или поддерживает постоянной в процессе управления, называется управляемой величиной. Для обозначения этого понятия используют также термины «управляемая координата» и «управляемая переменная». Управляемой величиной может служить физическая величина, которая либо изменяется (непосредственно на выходе объекта), либо вычисляется по нескольким измеряемым величинам.

Управляемая величина является выходной величиной объекта и зависит от двух входных воздействий: возмущающего *f(t)* и управляющего *u(t)*.

Алгоритм управления в общем случае выражает зависимость управляющего воздействия *u(t)* от задающего воздействия *x(t)*, управляемой величины *y(t)* и возмущающих воздействий *f(t)* и может быть представлен в виде:

$$u(t) = A_y[x(t), y(t), f(t)].$$

Воздействия *f(t)* и *x(t)* являются внешним для рассматриваемой системы, а воздействие u(t) – внутренним.

Движение системы управления во времени

В каждый момент времени система управления находится в некотором состоянии, называемом **текущим**. Текущее состояние системы управления описывается некоторым набором значений характеристик и является основой для последующей выработки и реализации управляющих воздействий.

Поведение системы управления во времени (или ее движение) можно рассматривать как последовательность сменяющих друг друга ее текущих

состояний, которая называется **траекторией движения системы управления**. Данная траектория является динамической характеристикой достижения системой цели управления (или удаления от нее).

Понятие «Управление»

Ранее под управлением мы понимали любую осознанную, целенаправленную деятельность человека. Вышеизложенный позволяет дать более точное определение:

Управление - это движение управляющего устройства в системе управления, направленное на достижение цели, причиной которого считается осознанная деятельность человека.

Управление каким-либо объектом (объект управления будем обозначать ОУ) есть воздействие на него в целях достижения требуемых состояний или процессов.

Связи в системах управления

В дальнейшем понадобится ряд определений, относящихся к связям в системах управления.

Интервал времени от момента получения управляющего устройства информационных воздействий и до момента выдачи на объект управления соответствующих управляющих воздействий называется **циклом управления**.

Таким образом, жизненный цикл системы управления складывается из отдельных циклов управления.

Связь управляющего устройства с объектом управления в виде управляющих воздействий называется также **прямой связью с объектом управления**, а связь объекта управления с управляющим устройством в виде информационных воздействий - **обратной связью с объектом управления** или **цепью обратной связи**.

Контур, образованный обратной и прямой (именно в такой последовательности!) связями с объектом управления, называется **контуром управления**.

Выделяют **отрицательную** и **положительную** обратные связи: в первом случае отклонения значений параметров объекта управления от их предшествовавших значений в процессе управления уменьшаются (движение объекта управления "замедляется"), во втором - увеличиваются (движение "ускоряется").

Иногда (очень редко) выдача управляющих воздействий в системах управления рассматривается независимо от предшествовавших информационных воздействий. В этом случае говорят об **управлении без обратной связи** и **системах управления без обратной связи**.

Системы управления с возмущениями

Возмущение (в системе управления) - это любое воздействие на внутренние объекты системы управления, не являющееся частью управления или его прогнозируемым следствием, но влияющее на достижение цели управления.

Другими словами, к возмущению человек относит все то, что происходит независимо от него, как правило, неожиданно, и либо мешает ему достичь цели, либо, наоборот, помогает. В первом случае говорят об **отрицательных**, а во втором - о **положительных** возмущениях.

Объект, воздействие которого на тот или иной внутренний объект системы управления представляет собой возмущение, называется **источником возмущения**. Если источник возмущения является внутренним объектом системы управления, то возмущение называется **внутренним**, а если он является объектом внешней среды, то возмущение называется **внешним**.

Из сказанного следует, что, во-первых, возмущения могут действовать на любые внутренние объекты системы управления - элементы (включая цель управления), связи, подсистемы и т.п. Во-вторых, любое воздействие на открытую систему управления из ее внешней среды заведомо не относится к

управлению и может быть только возмущением даже в том случае, если оно является частью управления в вышестоящей системе. Согласно введенному определению каждое подобное возмущение является внешним.

Внутренние возмущения могут классифицироваться следующим образом: они либо не направлены на достижение цели (рабочий изготовил на станке предмет личного потребления), либо не одобрены проектировщиком системы (самовольное изменение технологии), либо не предусматривались им как результат управления (возгорание объекта).

3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Принято различать три фундаментальных принципа управления: *принцип разомкнутого управления*, *принцип компенсации*, *принцип обратной связи*.

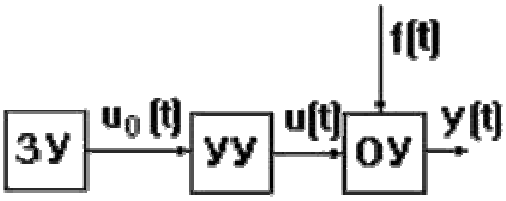


Рис. 5

Рассмотренную САУ хлебопекарной печи можно изобразить функциональной схемой (рис.5). В данной схеме заложен <u>*принцип разомкнутого управления*</u>, сущность которого состоит в том, что программа управления жестко задана ЗУ; управление не учитывает влияние возмущений на параметры процесса.

В системах такого типа отсутствует контроль управляемой величины и возмущающего воздействия. Управляемая величина является функцией только от задающего воздействия.

Системы такого типа достаточно эффективны лишь при условии, что влияние возмущений на управляемую величину невелико и все элементы разомкнутой цепи обладают стабильными характеристиками.

Рассмотрим пример системы, работающей на этом принципе.

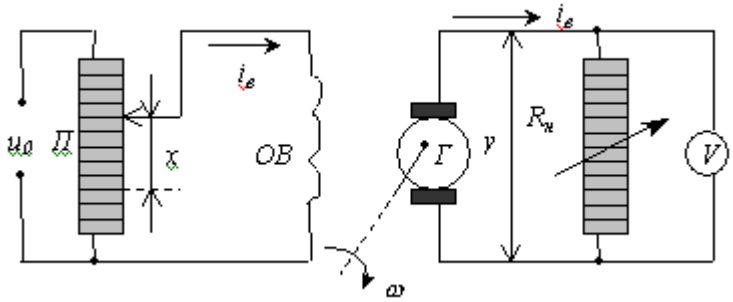


Рис.а. Схема генератора напряжения без обратной связи

На рис.а изображена схема управляемого генератора постоянного напряжения, работающего следующим образом. С помощью потенциометра П снимается напряжение *x*, питающее обмотку возбуждения ОВ генератора постоянного напряжения Г, ротор которого вращается с постоянной скоростью w. Взаимодействие магнитного потока, создаваемого обмоткой возбуждения и

обмоткой ротора, приводит к появлению ЭДС *e* на щетках генератора. Полагая нагрузку выходной цепи генератора активным сопротивлением $R_н$, получим на нем напряжение *y*, контролируемое вольтметром *V*. При всех постоянных факторах, таких, как сопротивление нагрузки $R_н$, скорость вращения ротора w и др., напряжение *y* будет зависеть от величины *x*. Управление выходной величиной *y* будет осуществляться с помощью задающего воздействия *x*.

Предположим, что мы установили требуемое значение напряжения *y*, однако после этого величина нагрузки $R_н$, скачкообразно изменилась (рис.б)

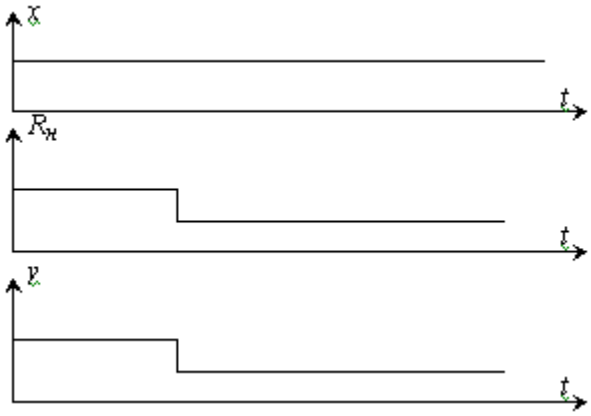


Рис.б Характер изменения переменных у генератора без обратной связи

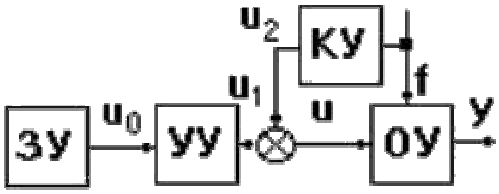
Это приведет к тому, что при прежней величине *x* выходное напряжение *y* изменится, так как оно зависит от сопротивления нагрузки.

Падение этого напряжения никак не отразится на характере управления. Таким образом, при прежнем значении задающего воздействия *x* выходная координата *y* изменится за счет изменения внешнего воздействия (нагрузки). Этот пример показывает, что в системах, работающих по разомкнутому циклу, нежелательные отклонения выходного процесса управляющим устройством не учитываются и не компенсируются. Для улучшения качества системы можно было бы измерять величину сопротивления нагрузки и в соответствии с этим изменять величину *x*. Очевидно, что техническая реализация подобного способа сложна, тем более, что ряд возмущающих воздействий измерить невозможно или измерения могут проводиться с большими погрешностями. Рассмотренный пример позволяет утверждать, что качество систем, работающих по разомкнутому

циклу, как правило, невысокое, а возможности измерения возмущающих воздействий для компенсации их вредного влияния ограничены. По этим причинам принцип управления по разомкнутому циклу нашел ограниченное применение на практике.

Примерами систем, работающих по принципу разомкнутого управления, являются часы, магнитофон, компьютер и т.п.

Принцип компенсации возмущающего воздействия



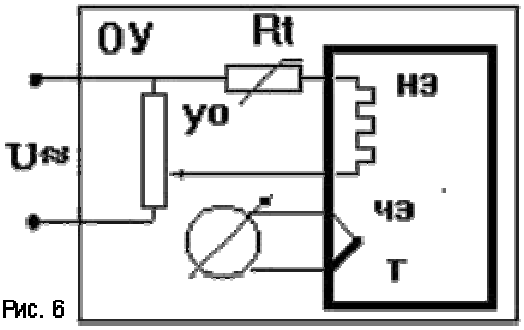


Рис. 6

Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют *принцип компенсации* (рис.6, КУ- *корректирующее устройство*).

Пусть $\mathbf{y_o}$ - значение выходной величины, которое требуется обеспечить согласно программе. На самом деле из-за возмущения f на выходе регистрируется значение **y**. Величина $\mathbf{e = y_o - y}$ называется *отклонением от заданной величины*. Если каким-то образом удается измерить величину **f**, то можно откорректировать управляющее воздействие **u** на входе ОУ, суммируя сигнал УУ с корректирующим воздействием, пропорциональным возмущению **f** и компенсирующим его влияние.

Достоинства принципа компенсации:

- быстрота реакции на возмущения – влияние возмущения компенсируется еще до того, как оно проявится на выходе объекта;

- он более точен, чем принцип разомкнутого управления;

- не возникает проблема устойчивости (разомкнутые системы).

Недостатки:

- невозможность учета подобным образом всех возможных возмущений;

- в этих системах, как и в разомкнутых, появляются отклонения выходной величины при изменении характеристик ОУ;

- такие системы можно создавать только тогда, когда возмущающие воздействия можно измерить.

Примеры систем компенсации: биметаллический маятник в часах, компенсационная обмотка машины постоянного тока и т.п. На рис.6 в цепи НЭ стоит термосопротивление $\mathbf{R_t}$, величина которого меняется в зависимости от колебаний температуры окружающей среды, корректируя напряжение на НЭ.

Принцип обратной связи (принцип управления по отклонению управляемой величины от задающего воздействия)

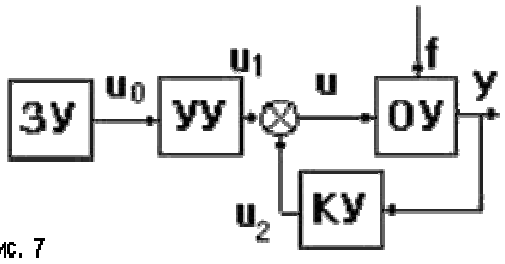


Рис. 7

Наибольшее распространение в технике получил *принцип обратной связи* (рис.7). Здесь управляющее воздействие корректируется в зависимости от выходной величины **y(t)**. И уже не важно, какие возмущения действуют на ОУ. Если значение **y(t)** отклоняется от требуемого, то происходит корректировка сигнала **u(t)** с целью уменьшения данного отклонения. Связь выхода ОУ с его входом называется *главной обратной связью (ОС)*.

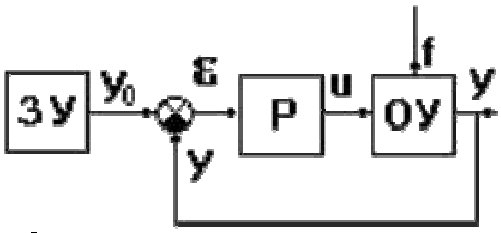


Рис. 8

В частном случае (рис.8) ЗУ формирует требуемое значение выходной величины $\mathbf{y_o(t)}$, которое сравнивается с действительным значением на выходе САУ **y(t)**. Отклонение $\mathbf{e = y_o - y}$ с выхода сравнивающего устройства подается на вход *регулятора* Р, объединяющего в себе УУ, УО, ЧЭ. Если $\mathbf{e \neq 0}$, то регулятор формирует управляющее воздействие **u(t)**, действующее до тех пор, пока не обеспечится равенство $\mathbf{e = 0}$, или $\mathbf{y = y_o}$. Так как на регулятор подается разность сигналов, то такая обратная связь называется *отрицательной*, в отличие от *положительной обратной связи*, когда сигналы складываются.

Такое управление в функции отклонения называется *регулированием*, а подобную САУ называют *системой автоматического регулирования* (САР).

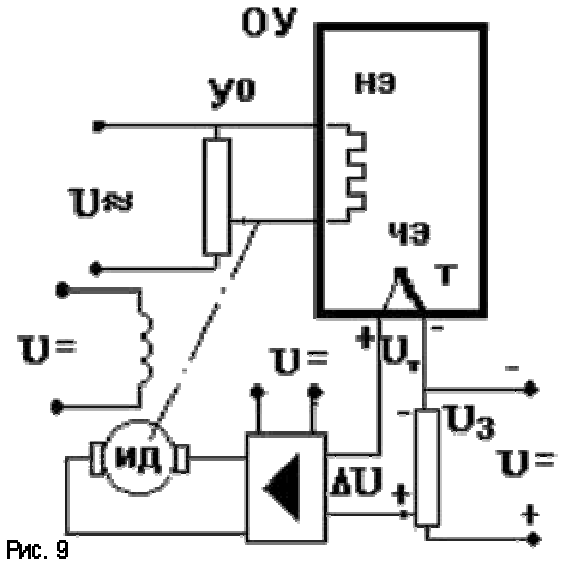


Рис. 9

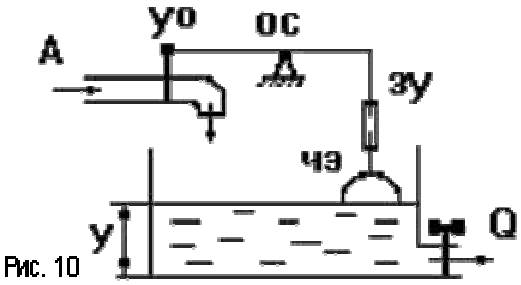


Рис. 10

Так на рис.9 изображена упрощенная схема САР хлебопекарной печи. Роль ЗУ здесь выполняет потенциометр, напряжение на котором $\mathbf{U}_з$ сравнивается с напряжением на термопаре $\mathbf{U}_т$. Их разность $\Delta\mathbf{U}$ через усилитель подается на исполнительный двигатель ИД, регулирующий через редуктор положение движка реостата в цепи НЭ. Наличие усилителя говорит о том, что данная САР является *системой непрямого регулирования*, так как энергия для функций управления берется от посторонних источников питания, в отличие от *систем прямого регулирования*, в которых энергия берется непосредственно от ОУ, как, например, в САР уровня воды в баке (рис.10).

Рассмотрим простейший пример системы такого рода. На рис.в. изображена схема генератора постоянного напряжения с обратной связью. В ее основе лежит схема, ранее изображенная на рис.а. Особенности работы состоят в следующем. Выходное напряжение у подается на обмотку соленоида *С*, и в зависимости от значения этого напряжения сердечник соленоида, прикрепленный с одной стороны к пружине *Пр*, будет либо больше, либо меньше втягиваться внутрь соленоида. К тяге, стоящей между сердечником и пружиной, может крепиться движок задающего потенциометра. После установки желаемого напряжения у движок потенциометра закрепляется на тяге сердечника. Если по каким-либо причинам произошло уменьшение напряжения у (например, при уменьшении $R_н$), то сердечник соленоида выдвинется из соленоида и сместит движок потенциометра вверх. Напряжение возбуждения увеличится и тем самым

возрастет напряжение у (рис.д) Параметры соленоида можно подобрать так, чтобы уменьшение напряжения у за счет изменения сопротивления нагрузки $R_н$ скомпенсировалось увеличением напряжения возбуждения. Таким же образом будет работать система и при непреднамеренном увеличении *у*, только при этом напряжение возбуждения *x* уменьшится. Важно подчеркнуть, что причины, которые нарушили нормальную работу этой системы, не играют роли, так как управление происходит путем измерения конечного эффекта управления – выходного напряжения *у*. Как и в предыдущем примере, рассматриваемая система работает без участия человека, то есть автоматически. Однако за счет включения устройства обратной связи через соленоид качество работы можно значительно повысить, что видно из сравнения рис.б и рис.д.

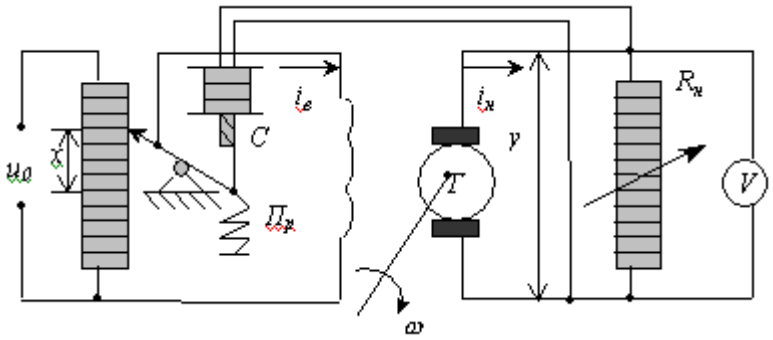


Рис.в. Схема генератора напряжения с обратной связью

Обобщая выводы из последнего примера, можно сказать, что в системах, работающих по замкнутому циклу, происходит автоматическая компенсация влияния возмущающих воздействий без их непосредственного измерения. Она осуществляется за счет измерения выходных координат объекта управления и сравнения их с желаемыми значениями. Управляющие воздействия вырабатываются на основе этого сравнения. Системы с замкнутым циклом управления обладают более высоким качеством и поэтому нашли широкое практическое применение. Благодаря наличию устройства обратной связи они называются системами с обратной связью, или замкнутыми системами.

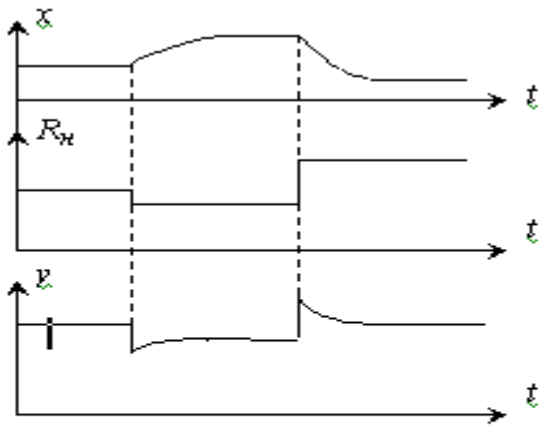


Рис. 8. Характер изменения переменных у генератора с обратной связью

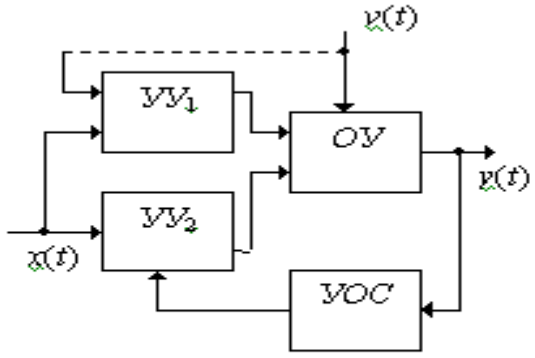


Рис. 9. Комбинированное управление

Достоинства принципа обратной связи:

- уменьшает отклонение управляемой независимо от того, какими факторами оно было обусловлено (учитывают все возмущения, действующие на управляемую величину);
- менее чувствителен к изменению параметров элементов системы, в сравнении с разомкнутыми системами.

Недостатки принципа обратной связи:

- наличие обратной связи приводит к возникновению колебаний в системе, что иногда делает систему неработоспособной;
- возникает проблема устойчивости;
- инерционность системы – работа управляющего устройства начинается только после того, как возмущающее воздействие вызовет отклонение управляемой величины.

Часто применяют *комбинацию данного принципа с принципом компенсации*, что позволяет объединить достоинства обоих принципов: быстроту реакции на возмущение принципа компенсации и точность регулирования независимо от природы возмущений принципа обратной связи. Блок-схема подобной системы показана на рис.9.

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование – замещение одного объекта (оригинала) другим (моделью) и фиксация или изучение свойств оригинала путем исследования свойств модели.

Модель – представление объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования.

Польза от моделирования может быть достигнута только при соблюдении следующих достаточно очевидных условий:

- модель адекватно отображает свойства оригинала, существенных с точки зрения цели исследования;

-модель позволяет устранять проблемы, присущие провеѳдению измерений на реальных объектах.

При экспериментировании с моделью сложной системы можно получить больше информации о внутренних взаимодействующих факторах системы, чем при манипулировании с реальной системой благодаря изменяемости структурных элементов, легкости изменения параметров модели и т.д.

Исторически сложились два основных подхода при моделировании процессов и систем.

Классический (индуктивный) рассматривает систему путем перехода от частного к общему, т.е. модель системы синтезируется путем слияния моделей ее компонент, разрабатываемых отдельно.

При **системном** подходе предполагается последовательный переход от общего к частному, когда в основе построения модели лежит цель исследования. Именно из нее исходят, создавая модель. Подобие процесса, протекающего в модели реальному процессу, является не целью, а лишь условием правильного

функционирования модели, поэтому в качестве цели должна быть поставлена задача изучения какой-либо стороны функционального объекта.

Качество моделирования определяется тем, в какой степени решаются задачи, поставленные исследователем.

Для правильно построенной модели характерно то, что она выявляет только те закономерности, которые нужны исследователю и не рассматривает те свойства системы, которые не существенны для данного исследования.

Принципы моделирования

1. Принцип **информационной достаточности.** При полном отсутствии информации об исследуемом объекте построить его модель невозможно. Если информация полная, то моделирование лишено смысла. Должен существовать некоторый критический уровень априорных сведений об объекте (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена его адекватная модель.

2. Принцип **осуществимости.** Модель должна обеспечивать достижения поставленной цели с вероятностью отличной от нуля и за конечное время. Обычно задают некоторое пороговое значение вероятности P_0 и приемлемую границу времени t_0 достижения цели. Модель осуществима, если

$$\mathbf{P(t) \geq P_0} \quad \text{и} \quad \mathbf{t \leq t_0}\ .$$

3. Принцип **множественности** моделей. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства моделируемой системы или процесса, которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно, с помощью конкретной модели можно изучить лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих более разносторонне и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый объект или процесс.

4. Принцип **агрегирования.** Сложную систему обычно можно представить состоящей из подсистем (агрегатов), для математического описания которых используются стандартные математические схемы. Кроме того, этот принцип позволяет гибко перестраивать модель в зависимости от целей исследования.

5. Принцип **параметризации.** В ряде случаев моделируемая система может иметь относительно изолированные подсистемы, которые характеризуются определенным параметром (в том числе векторным). Такие подсистемы можно заметить в модели соответствующими числами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость этих величин от ситуации может быть задана в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Это позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо помнить, что параметризация снижает адекватность модели.

Свойства моделей

Если цель поставлена, то возникает проблема построения модели. Это возможно, если имеется информация или выдвинуты гипотезы относительно структуры, алгоритмов функционирования и параметров исследуемого объекта.

Если модель построена, то возникает проблема организации работы с ней. Основные задачи здесь - минимизация времени получения результатов и обеспечения их достоверности.

Наконец, если в результате эксперимента с моделью получены результаты, возникает задача их обработки и интерпретации. Средства вычислительной техники, используемые при моделировании, могут помочь с точки зрения эффективности реализации сложной модели, но не являются гарантами правильности той или иной модели. Только на основе обработанных данных и опыта исследователя можно достоверно оценить адекватность модели по отношению к реальному процессу.

С усложнением объектов моделирования усложняются и модели, которые характеризуются следующими показателями (свойствами):

1. Цель функционирования, которая определяет степень целенаправленности поведения модели. Могут быть одноцелевые модели (для решения одной задачи) и многоцелевые, позволяющие рассмотреть ряд сторон функционирования реального объекта.

2. Сложность, которая оценивается по общему числу элементов в системе и связей между ними.

3. Целостность, определяемая тем, что модель является одной целостной системой, включающей в себя большое число элементов, находящихся в сложной взаимосвязи друг с другом.

4. Неопределенность, которая проявляется по состоянию системы, по методам решения поставленных задач, по достоверности исходной ин формации и т.д. Основной характеристикой неопределенности служит такая мера информации, как энтропия, которая в ряде случаев позволяет определить количество управляющей информации, необходимой для достижения заданного состояния системы.

5. Адаптивность – свойство высокоорганизованной системы. Благодаря ей система приспосабливается к различным внешним возмущающим факторам. Применительно к модели существенно изучение ее поведения в изменяющихся условиях, близких к реальным.

6. Организационная структура системы моделирования зависят от сложности модели и совершенства средств моделирования. Необходимо, чтобы оптимально сочетались комплекс технических средств, информационное и программное обеспечение, Организация процесса моделирования.

7. Управляемость модели, подразумевающая возможность (влияния) (целенаправленного) со стороны экспериментатора на работу модели. Этой цели служат управляемые параметры и переменные модели, возможность интерактивного режима работы модели и т.п.

8. Возможность развития модели как с точки зрения расширения спектра изучаемых функций, так и в смысле увеличения числа подсистем модели.

Классификация методов моделирования.

По характеру изучаемых процессов

- **детерминированное моделирование** – предполагается отсутствие всяких случайных воздействий и, как следствие, возможны точные решения.

- **стохастическое моделирование**– учитываются случайные факторы, влияющие на работу моделируемой системы.

По признаку развития процессов во времени:

- **статическое моделирование**– описание моделируемой системы в какой – либо конкретный момент .

- **динамическое моделирование** – отражает поведение объекта во времени.

По представлению информации в модели:

- **дискретное,**
- **непрерывное,**
- **дискретно – непрерывное.**

В зависимости от представления объекта моделирования (ОМ)

- **реальное** - объект есть и можно осуществить:
  - натуральное моделирование (можно поставить эксперимент).
  - физическое моделирование (на специальных установках, имеющие физическое подобие).
- **мысленное** (если объект моделирования не существует, либо существует вне условий для его физического создания).

Мысленное → наглядное
Мысленное → символическое
Мысленное → математическое

Наглядное:

1)Гипотетическое: если знаний об объекте недостаточно для создания формальных моделей. Выдвигается гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте.

2)Аналоговое: применяются аналогии различных уровней. Наивысший уровень – полная аналогия. Если объект сложный, применяют аналоговые модели, отображающие несколько или одну сторону функционирования объекта.

3)Макетирование: мысленное макетирование – если происходящие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать другим видам моделирования.

Символическое - искусственный процесс создания логического объекта, замещающего реальный.

1)Знаковое: вводят условные обозначения отдельных понятий (знаки) и операции над ними (объединения, пересечения и дополнения теории множеств). Используя образованные цепочки слов можно дать описание реального объекта.

2)Языковое: в основе тезаурус – словарь, в котором нет неоднозначности, т.е. каждому слову соответствует единственное понятие. Набор слов ограничен.

Математическое моделирование

Нас будет интересовать в дальнейшем **математическое** моделирование, при котором закономерности функционирования реального объекта описываются математической моделью. Исследование этой модели позволяют получить характеристики реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы объекта, так и от задач исследования, требуемой точности и достоверности.

Математическое моделирование подразделяется на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Аналитическое моделирование: описание ОМ функциональными соотношениями (дифференциальные и интегральные уравнения, алгебраические уравнения) с последующей попыткой решить их аналитически или численными методами.

Аналитическая модель может быть исследована методами:

а) аналитическим: получают в явном виде зависимости для искомых характеристик;

б) численными: получают числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественными: не имея в явном виде решения можно найти свойства решения.

При усложнении систем применение аналитических методов вызывает затруднения, приходится идти на упрощение модели.

Численный метод позволяет использовать более широкий класс систем, но решения носят при этом частный характер.

Имитационное моделирование: при этом подходе реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени.

При этом имитируются элементарные явления в моделируемом объекте, их связь и последовательность. Имитационное моделирование позволяет учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейности, случайного воздействия и т.д.

Если результаты работы имитационного моделирования являются реализациями случайных величин и функций, то для нахождения характеристик процесса требуется его многократное повторение со статистической обработкой информации. Метод имитационного моделирования позволяет исследовать

большие системы, оценивать варианты структуры системы, эффективность алгоритмов управления, влияние различных параметров системы.

Комбинированное (аналитико–имитационное) моделирование: предварительно производят декомпозицию процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используют аналитические модели, для остальных имитационные. Особое место в моделировании занимает кибернетическое моделирование. Здесь отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессом. Отображают некоторую функцию, рассматривая объект как “черный ящик”, имеющие входной и выходной. Обычно этот подход используют для анализа поведения объекта при различных воздействиях внешней среды. Для построения имитационного моделирования при этом подходе выделяют исследуемую функцию объекта, формализуют ее в виде некоторых операторов связи между входным выходным и воспроизводят на модели. При исследовании вычислительных систем для построения имитационного моделирования наиболее широко используют метод статистических испытаний (метод Монте - Карло). Это численный метод, который применяется для моделирования случайных чисел и функций. Метод машинной реализации имитационного моделирования поэтому называют статистическим моделированием. Важнейшее свойство статистического моделирования – универсальность, дающая возможность анализа систем практически любой сложности с произвольной степенью детализации изучаемых процессов.

5. МОДЕЛИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В УПРАВЛЕНИИ

Модель процесса — основа управления. Любая стратегия управления базируется на некотором понимании того, как физический процесс реагирует на входной сигнал. Поэтому умение анализировать и моделировать динамику системы является основной предпосылкой для успешного управления.

5.1. Типы моделей

Существует много способов описания систем с помощью моделей. Конкретный выбор зависит от предварительно имеющейся информации, возможностей собирать данные о процессе по мере его развития и, что важнее всего, от цели моделирования. В отличие от науки, где целью моделирования является глубокое проникновение в суть системы, модель в инженерном смысле считается адекватной, если соответствующие процессы управления работают предсказуемым образом, т. е. имеется устойчивый выход с малыми отклонениями от заданного значения, воспроизводимость отклика на входной сигнал и т. д.

Пример 5.1. Модель двигателя внутреннего сгорания

Двигатель внутреннего сгорания — чрезвычайно сложная динамическая система. Общей модели двигателя не существует, и модель фактически зависит от поставленной цели, т. е. для разных целей модели могут существенно отличаться.

Научная модель, цель которой — описать все детали процесса внутреннего сгорания, должна учитывать геометрию цилиндра, смешивание воздуха и топлива в цилиндре, химический состав топлива, распространение процесса горения в пространстве и времени и результирующие силы, которые приводят поршень в движение. Масштаб времени при этом измеряется миллисекундами.

Модель для конструирования системы управления составом горючей смеси будет использовать другой подход. Цель здесь — сохранить отношение воздух/топливо в смеси близким к расчетному оптимуму. При этом нет необходимости учитывать распространение процесса горения в пространстве — для управления вполне достаточно знать расход воздуха и топлива по отдельности. Кроме того, масштаб времени отличается от миллисекундного диапазона научной модели и может быть в 10-100 раз больше.

Совершенно другая модель нужна водителю. Важнее всего в этом случае — связь между давлением на педаль газа и ускорением автомобиля, а деталями горения или процессом смешивания воздуха и топлива можно пренебречь.

Прикладное управление ориентировано на динамические системы, т. е. системы, состояние которых можно смоделировать заранее и которыми можно управлять с помощью соответствующих сигналов. В динамических системах эффект от входного воздействия проявляется не сразу, а лишь спустя некоторое время. Существует много способов моделирования динамических систем, наиболее важные из которых следующие.

• **Непрерывное во времени (аналоговое) описание** *(continuous time description).* Система описывается линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями баланса массы, энергии, сил или моментов. Во многих случаях нелинейные уравнения можно линеаризовать и тем самым упростить работу с ними.

• **Дискретное во времени описание** *(sampled time description).* Физические свойства описываются линейными или нелинейными разностными уравнениями. Такой подход означает, что информация о системе доступна только в определенные, дискретные, моменты времени. Этот тип описания в действительности почти неизбежен при цифровом управлении потому, что компьютеры, базирующиеся на наиболее распространенной архитектуре фон Неймана (von Neumann), выполняют инструкции последовательно. Определение интервала дискретизации, т. е. периодичности обновления или пересчета данных, является наиболее важным элементом такого моделирования.

• **Модели систем**, основанных на **дискретных событиях** *(discrete events model)* или на **последовательности событий** *(sequencing system).* Пример управления последовательностью событий будет рассмотрен ниже. При таком описании входные и выходные величины системы дискретны во времени и обычно являются бинарными сигналами типа "включено/выключено". Многие системы управления последовательностью можно описать как системы очередей и моделировать так называемыми марковскими цепями или марковскими процессами.

• **Модели систем с неопределенностями** *(system with uncertainties).* Как на сами управляемые системы, так и на измерения часто влияют нежелательные шумы и возмущения. В одних случаях возмущения и неполные знания о техническом процессе можно интерпретировать статистически. В других — факторы неопределенности вместо количественных характеристик можно описывать лингвистическими и логическими выражениями. Пример такого описания — правила экспертных систем "если – то - иначе". Еще одно средство описания неопределенностей — так называемая нечеткая *(fuzzy)* алгебра.

Обычное заблуждение заключается в предположении, что процесс можно исчерпывающе описать только одной моделью. В действительности верно обратное. Структура и сложность модели должны соответствовать цели, моделирования, поэтому выбор модели процесса зависит от того, как она будет использоваться. Для каждого типа регуляторов также требуется своя модель. Наиболее приемлемой является простейшая из возможных моделей, которая обеспечивает управление, удовлетворяющее заданному критерию качества.

Системы и процессы можно рассматривать в терминах входных и выходных сигналов, связь между которыми описывается как во временной, так и в частотной областях.

5.2. Масштаб времени динамических моделей

Масштаб времени — одна из наиболее важных характеристик динамического процесса. Большинство технических систем и производств включают в себя несколько процессов, существенно отличающихся временем реакции. Поэтому при описании процесса важно выбрать масштаб времени, который соответствует поставленной цели.

Проиллюстрируем это на примере промышленного производства. Задачи управления можно разбить на несколько уровней. События на уровне станков происходят за доли секунды, как, например, при управлении манипулятором робота или инструментом станка. На следующем, более высоком уровне управления, на уровне участка, цель — синхронизация различных механизмов,

например решение, когда робот должен переместить деталь между двумя станками. Масштаб времени здесь уже имеет порядок от секунд до минут. На уровне участка предполагается, что задача управления конкретным станком уже решена на более низком уровне. Масштаб времени на уровне участка определяется задачами снабжения станка заготовками, определения, свободен ли робот, чтобы захватить новую деталь, и т. д. На еще более высоком уровне планируется производство в целом, т. е, что производить и с какими конкретными характеристиками. Решение таких проблем может занимать дни или недели, и по сравнению с этим динамика одного станка рассматривается как одномоментная.

Другой пример различных масштабов времени в рамках одного и того же технического процесса — из области биологической очистки сточных вод. Сжатый воздух подается в аэраторный бак для поддержания жизнедеятельности аэробных микроорганизмов, которым нужен кислород; эта операция занимает несколько минут. Из-за неоднородности входного потока воды изменение концентрации растворенного кислорода проявляется только через несколько часов, а для изменения метаболизма микроорганизмов нужны дни или даже недели. При изучении недельных изменений метаболизма процессы длительностью в несколько часов можно рассматривать как мгновенные. С другой стороны, для управления подачей воздуха необходимо измерять концентрацию растворенного кислорода ежеминутно, и в этом случае состав микроорганизмов и их концентрация считаются постоянными.

Выбор масштаба времени модели зависит от того, для кого она предназначена, т. е. от пользователя, в качестве которого может выступать, в частности, и автоматический регулятор. Оператор может проверить состояние технического процесса и принять управляющие решения за минуты и часы. Инженерная служба или отдел логистики могут быть заинтересованы только в дневной производительности или суточных изменениях процесса, и поэтому им нужна другая временная шкала. Наконец, директора завода интересуют, в первую очередь, объем производства и сезонные колебания спроса. Каждый подход и каждая реакция имеют свой собственный масштаб времени.

5.3. Моделирование динамических систем

Существуют как хорошо известные и давно изученные процессы, так и процессы, которых известно очень мало и которые трудно поддаются количественному описанию. Например, динамика самолетов и ядерных реакторов изучалась очень тщательно, и существуют достаточно точные, хотя и очень сложные модели этих процессов. Есть процессы, которые трудно описать количественно. Например, лабораторный процесс ферментации микроорганизмов одного типа в четко определенной питательной среде можно описать весьма точно. В отличие от этого, процесс биологической очистки сточных вод содержит сложную смесь организмов в среде, трудно поддающейся описанию. Такой процесс только частично можно описать обычными количественными моделями. Когда количественных моделей недостаточно или они слишком сложны, для описания процессов применяют семантические (лингвистические) модели. Другие примеры частично изученных процессов — производство металла, разделение жидких и твердых субстанций, многие биохимические процессы и работа печей кругового обжига.

Для процессов, параметры которых изменяются во времени, характерны свои специфические проблемы. Например, в биологической системе добавление нового субстрата в процесс может вызвать мутацию микроорганизмов, которая приведет к значительному изменению динамики всего процесса.

Как правило, моделирование сложной системы представляет собой трудный, дорогой и требующий много времени процесс, особенно если необходима экспериментальная проверка. В принципе, существуют два способа разработки модели. При физическом подходе модель формируется исходя из физических соотношений и уравнений баланса. Другой способ построения динамической модели основан на экспериментальных данных. В технический процесс вносятся возмущения в виде различных типов входных сигналов, а затем выполняется анализ серий входных и выходных данных с помощью процедуры, которая называется **идентификацией параметров**. Если анализ выполняется в реальном времени, т. е. со скоростью, сопоставимой со скоростью протекания

процесса, то такая процедура называется **рекурсивной оценкой** *(recursive estimation).*

На практике обычно применяется комбинирование физического моделирования и идентификации параметров. При более глубоком изучении основных свойств процесса становится проще получить точное динамическое описание. Однако даже тщательно разработанные модели, основанные на физическом подходе, требуют экспериментальной проверки.

Параметры многих процессов и систем изменяются не только во времени, но и в пространстве, например концентрация жидкости в баке. Физический баланс таких систем описывается уравнениями в частных производных. В системах управления процессами эти уравнения обычно аппроксимируются конечными разностями по пространственным переменным для того, чтобы система описывалась обыкновенными дифференциальными уравнениями.

5.4. Моделирование дискретных событий

Моделирование систем, основанных на последовательности дискретных событий, принципиально отличается от моделирования динамических систем с помощью математических соотношений. Для управления на основе обратной связи температурой, уровнем жидкости или давлением модель процесса фактически не нужна. В этом случае значение контролируемого параметра поддерживается на заданном уровне с определенной точностью с помощью включения и выключения исполнительного механизма.

Связной теории для моделирования управления последовательностью пока нет. При бинарном управлении уже на стадии анализа системы должны быть рассмотрены все возможные нештатные и аварийные ситуации. Что будет, если сломается насос либо датчики или отключится питание и т. д.? Подготовка исчерпывающего списка всех возможных событий в системе — сложная задача, которую нельзя решить на основе систематической теории.

Для участка, на котором станки обслуживаются роботом, необходима модель синхронизации. Эта задача принципиально отличается от простого

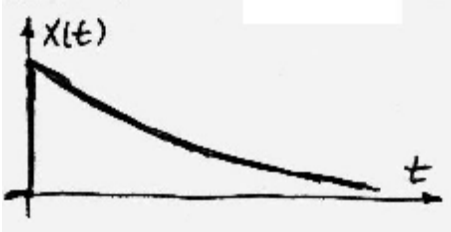
управления на основе обратной связи. Синхронизация должна быть корректной в том смысле, что определенные детали должны быть доставлены конкретному станку в соответствующее время и в соответствующем порядке. Эта задача имеет много общего с операционной системой, которая управляет ресурсами ЭВМ; в определенных случаях для решения таких задач можно использовать теорию очередей.

6. ВИДЫ СИГНАЛОВ И ВОЗДЕЙСТВИЙ В САУ.

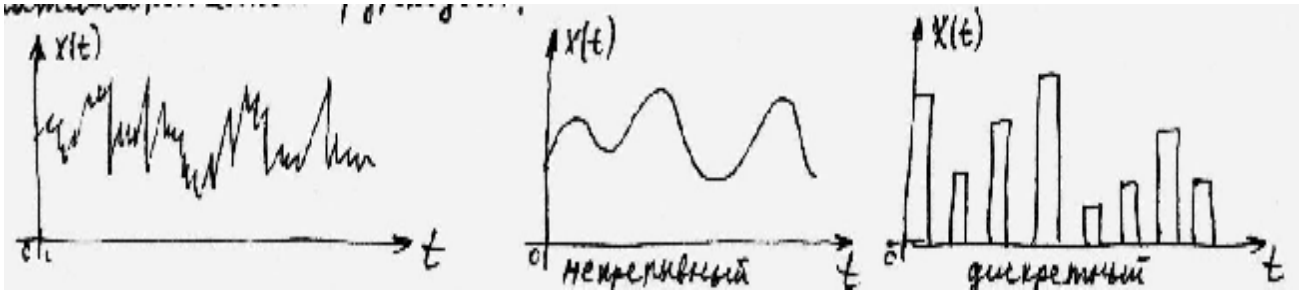
Изучение и математический анализ автоматических систем упрощаются, если пользоваться разработанной в теории управления типизацией воздействий и сигналов.

В зависимости от характера изменения сигнала во времени и от формы его математического представления различают регулярные и нерегулярные сигналы.

Регулярный (детерминированный сигнал) изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией. К классу регулярных сигналов относятся различные периодические сигналы и непериодические импульсы конечной длительности. Пример регулярного сигнала - импульс, описываемый экспонентой.



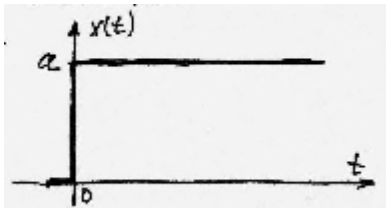
Нерегулярный (случайный) сигнал изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен в виде определенной математической функции.



Если значение регулярного или случайного сигнала определено в каждый момент времени, то сигнал называется непрерывным или аналоговым. Если же значения сигнала заданы лишь в некоторые моменты времени, то он называется дискретным.

При экспериментальном и теоретическом исследовании автоматических систем и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых типовыми воздействиями. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при испытании систем. Наибольшее применение в теории управления находят следующие четыре типовых воздействия: ступенчатое, импульсное, гармоническое и линейное.

Ступенчатое воздействие - это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным.



Ступенчатому воздействию соответствует функция вида:

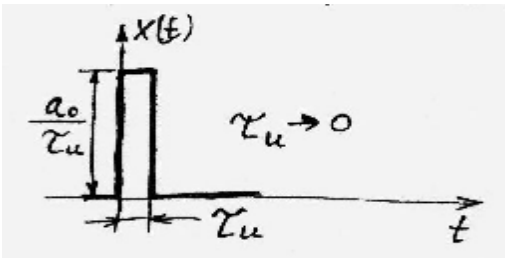
$$X(t) = \begin{cases} 0, при \ t < 0 \\ a, при \ t \geq 0 \end{cases}$$

При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие с амплитудой $a = 1$. Его называют ступенчатым воздействием (единичным сигналом) и обозначают 1(t). Математическое описание единичного скачка имеет вид:

$$X(t) = \begin{cases} 0, при \ t < 0 \\ 1, при \ t \geq 0 \end{cases}$$

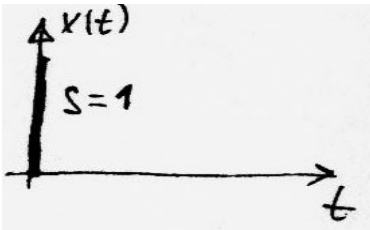
Любое неединичное ступенчатое воздействие можно обозначить *a1(t)*. Ступенчатое воздействие чаще всего используют при испытаниях и расчетах систем стабилизации, так как эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям системы стабилизации.

Импульсное воздействие представляет собой одиночный импульс прямоугольной формы, имеющий достаточно большую высоту и весьма малую продолжительность по сравнению с инерционностью испытываемой системы. Площадь такого импульса всегда равна a_0.



При математическом анализе автоматических систем используют единичное импульсное воздействие, которое описывается дельта функцией:

$$d\ (t) = \begin{cases} 0\,, при\ \ t \neq 0 \\ a\,, при\ \ t = 0 \end{cases}$$



причем $\int_{-\infty}^{+\infty} d\ (t)\,dt = 1$.

Дельта функцию можно рассматривать как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта функцию можно определить также как производную единичного скачка:

$$d(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

Неединичное импульсное воздействие с площадью a_0 обозначается $a_0 d(t)$:

$$x(t) = a_0 d(t).$$

Если единичный импульс действует в момент времени $t = t_1$, то ему соответствует смещенная дельта функция $d(t - t_1)$.

Основное свойство дельта функции выражается соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t\ )d\ (t\ - t) = x(t)$$

Это выражение означает, что неединичная импульсная функция $x(t\ )$, полученная как произведение произвольной функции $x(t\ )d\,(t - t)$ на дельта функцию,

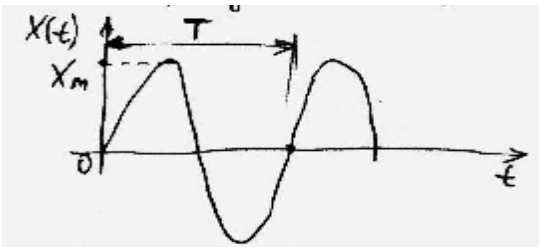
существует только в момент $t = t$. Это свойство дельта функции называют фильтрующим.

Математическая интерпретация основного свойства дельта функции может рассматриваться как разложение некоторой функции $x(t)$ на сумму бесконечно большого числа элементарных импульсов вида $x(t)d(t-t)dt$. Каждый элементарный импульс действует лишь в момент времени $t = t$. и имеет площадь $x(t)d(t-t)$.

В качестве стандартного гармонического воздействия используют обычно сигнал синусоидальной формы, описываемой функцией

$$x(t) = x_m \sin wt, \quad -¥ < t < +¥,$$

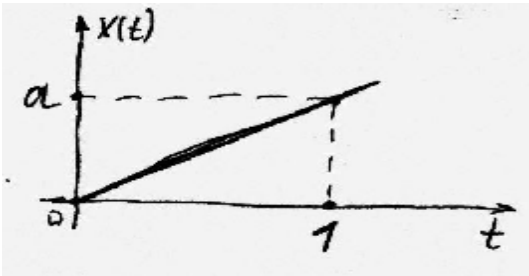
где x_m – амплитуда сигнала, $w = 2p/T$ – круговая частота, T – период сигнала.



Гармонические воздействия широко используются при исследовании точности и устойчивости как стабилизирующих, так следящих и программных автоматических систем. Это объясняется двумя обстоятельствами: во-первых, реальные возмущения имеют периодический характер и поэтому могут быть представлены в виде суммы гармонических составляющих; во-вторых, математический аппарат анализа автоматически систем хорошо разработан именно для случая гармонических воздействий.

Для следящих и программных систем типовым является линейное воздействие:

x(t) = 1(t) a*t, $\quad 0 \le t \le \infty$.



Коэффициент a характеризует скорость нарастания воздействия

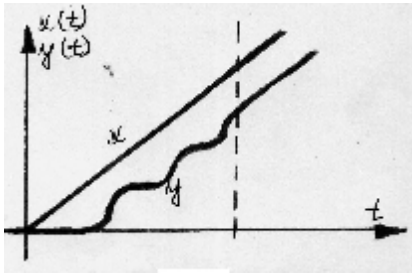
7. РЕЖИМЫ РАБОТЫ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

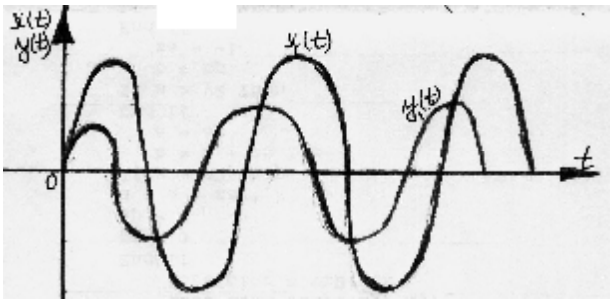
Состояние системы характеризуется изменением управляемой величины во времени. Состояние системы и режимы перехода зависят как от формы, так и от собственных свойств системы.

Различают два режима работы автоматических систем и их элементов: статический и динамический.

Статическим режимом называют состояние системы, при котором управляемая (выходная) величина не изменяется во времени, $y(t)=const$. Понятно, что статистический режим может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывается алгебраическими уравнениями.

В динамическом режиме работы системы управляемая (выходная) величина непрерывно изменяется во времени – $y(t) = var$. Динамические режимы имеют место, когда в системе после нанесения внешних воздействий происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы называются процессами управления и описываются в общем случае дифференциальными уравнениями. Динамические режимы разделяются на неустановившиеся и установившиеся. Неустановившиеся, или переходные режимы имеют место сразу после изменения внешних воздействий. Вид функции $y(t)$ в переходном режиме зависит от типа воздействия и собственных динамических свойств системы. Установившийся режим работы наступает после окончания переходного процесса, когда выходная величина системы изменяется во времени по такому же закону, что и входное воздействие. Статический режим является частным случаем установившегося режима при $x(t)=const$.





Эти графики иллюстрируют разницу между переходными и установившимися режимами работы при типовых воздействиях.

<u>*Статические характеристики*</u>

Режим работы САУ, в котором управляемая величина и все промежуточные величины не изменяются во времени, называется *установившимся*, или *статическим режимом*. Любое звено и САУ в целом в данном режиме описывается *уравнениями статики* вида $y = F(u,f)$, в которых отсутствует время t. Соответствующие им графики называются *статическими характеристиками*. Статическая характеристика звена с одним входом u может быть представлена кривой $y = F(u)$. Если звено имеет второй вход по возмущению f, то статическая характеристика задается семейством кривых $y = F(u)$ при различных значениях f, или $y = F(f)$ при различных u.

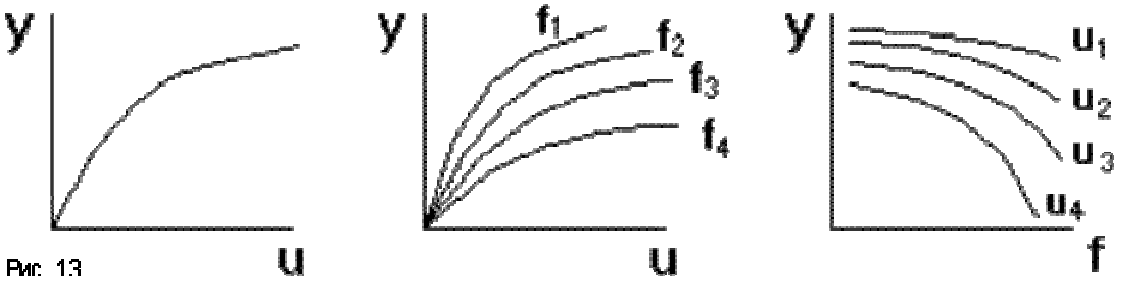
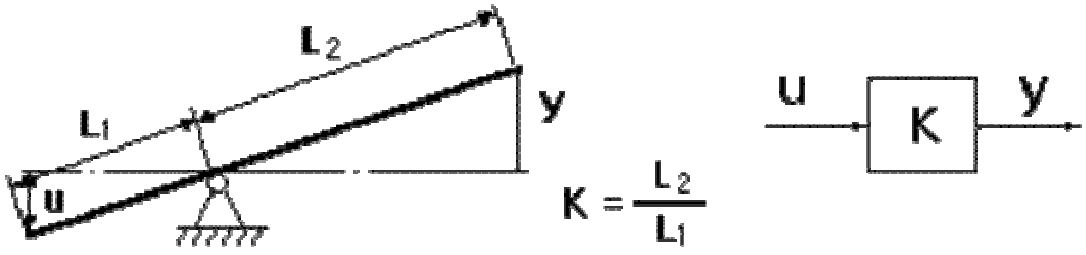


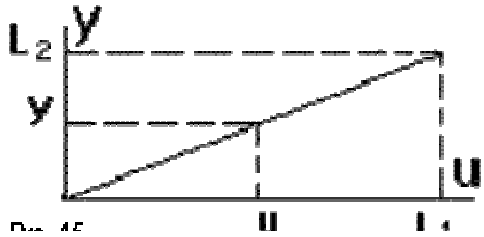
Рис. 13

Так примером одного из функциональных звеньев системы регулирования воды в баке (см. выше) является обычный рычаг:



Уравнение статики для него имеет вид $y = Ku$. Его можно изобразить звеном, функцией которого является усиление (или ослабление) входного сигнала в K раз. Коэффициент $K = y/u$, равный отношению выходной величины к входной называется *коэффициентом усиления* звена. Когда входная и выходная величины имеют разную природу, его называют *коэффициентом передачи*.

Статическая характеристика данного звена имеет вид отрезка прямой линии с наклоном **a = arctg(L_2/L_1) = arctg(K)**.



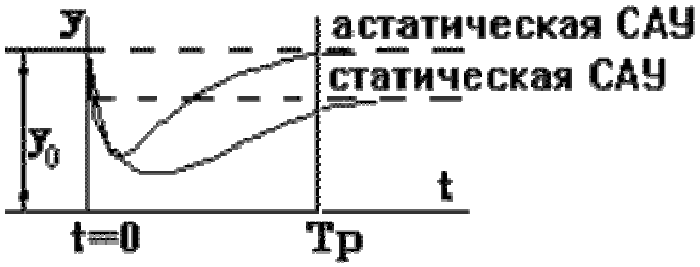
Звенья с линейными статическими характеристиками называются *линейными*. Статические характеристики реальных звеньев, как правило, нелинейны. Такие звенья называются *нелинейными*. Для них характерна зависимость коэффициента передачи от величины входного сигнала:

$$K = \Delta y/\Delta u \neq const.$$

<u>*Динамический режим САУ.*</u>

Установившийся режим не является характерным для САУ. Обычно на управляемый процесс действуют различные возмущения, отклоняющие управляемый параметр от заданной величины. Процесс установления требуемого значения управляемой величины называется *регулированием*. Ввиду инерционности звеньев регулирование не может осуществляться мгновенно.

Рассмотрим САР, находящуюся в установившемся режиме, характеризующемся значением выходной величины $y = y_o$. Пусть в момент $t = 0$ на объект воздействовал какой-либо возмущающий фактор, отклонив значение регулируемой величины. Через некоторое время регулятор вернет САР к первоначальному состоянию (с учетом статической точности):



Если регулируемая величина изменяется во времени по апериодическому закону, то процесс регулирования называется *апериодическим*. При резких возмущениях возможен *колебательный затухающий* процесс (рис. а). Существует и такая вероятность, что после некоторого времени T_p в системе установятся незатухающие колебания регулируемой величины - *незатухающий колебательный* процесс (рис. б). Последний вид - *расходящийся колебательный* процесс (рис. в).

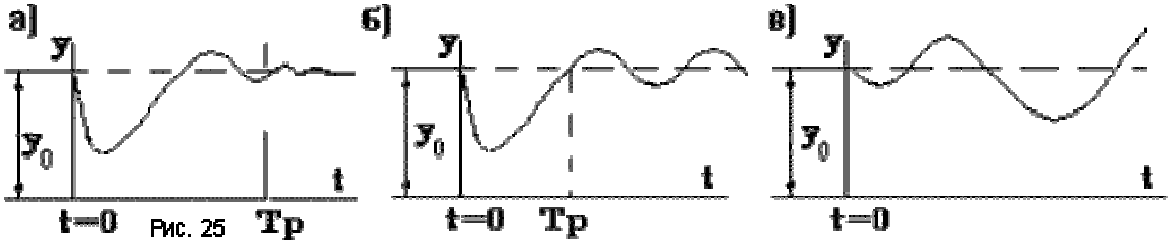


Рис. 25

Таким образом, основным режимом работы САУ считается *динамический режим*, характеризующийся протеканием в ней *переходных процессов*. Поэтому *второй основной задачей при разработке САУ является анализ динамических режимов работы САУ*.

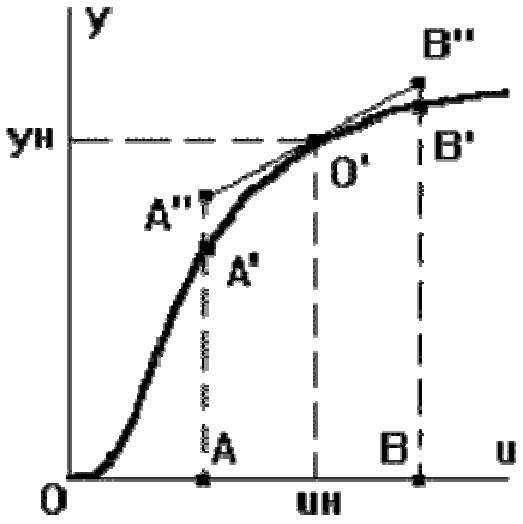
Поведение САУ или любого ее звена в динамических режимах описывается *уравнением динамики* $y(t) = F(u,f,t)$, описывающее изменение величин во времени. Как правило, это дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. Поэтому *основным методом исследования САУ в динамических*

режимах является метод решения дифференциальных уравнений. Порядок дифференциальных уравнений может быть довольно высоким, то есть зависимостью связаны как сами входные и выходные величины $u(t)$, $f(t)$, $y(t)$, так и скорости их изменения, ускорения и т.д. Поэтому уравнение динамики в общем виде можно записать так:

$$F(y, y', y'',..., y^{(n)}, u, u', u'',..., u^{(m)}, f, f', f'',..., f^{(k)}) = 0.$$

<u>*Линеаризация уравнения динамики*</u>

В общем случае уравнение динамики оказывается нелинейным, так как реальные звенья САУ обычно нелинейны. В целях упрощения теории нелинейные уравнения заменяют линейными, которые приблизительно описывают динамические процессы в САУ. Получаемая при этом точность уравнений оказывается достаточной для технических задач. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называется *линеаризацией уравнений динамики*. Рассмотрим сначала геометрическое обоснование линеаризации.



В нормально функционирующей САУ значение регулируемой и всех промежуточных величин незначительно отличается от требуемых. В пределах малых отклонений все нелинейные зависимости между величинами, входящими уравнение динамики, могут быть приближенно представлены отрезками прямых линий. Например, нелинейная статическая характеристика звена на участке АВ (рис.) может быть представлена отрезком касательной в точке номинального режима А"В". Начало координат переносится в точку О', и в уравнениях записываются не абсолютные значения величин y, u, f, а их отклонения от номинальных значений: $\Delta y = y - y_н$, $\Delta u = u - u_н$, $\Delta f = f - f_н$. Это позволяет получить *нулевые начальные условия*, если считать, что при $t \le 0$ система находилась в номинальном режиме в состоянии покоя.

Математическое обоснование линеаризации состоит в том, что если известно значение $f(a)$ какой - либо функции $f(x)$ в любой точке $x = a$, а также значения производных от этой функции в данной точке $f'(a), f''(a), ..., f^{(n)}(a)$, то в любой другой достаточно близкой точке $x + \Delta x$ значение функции можно определить, разложив ее в окрестности точки а в ряд Тейлора:

$$f(x+\Delta x)\Big|_a = f(a) + \frac{\Delta x}{1!}f'(a) + \frac{\Delta x^2}{2!}f''(a) + \frac{\Delta x^3}{3!}f'''(a) + ...$$

Аналогично можно разложить и функцию нескольких переменных. Для простоты возьмем упрощенный, но наиболее характерный вариант уравнения динамики САУ: $F(y,y',y'',u,u') = f$. Здесь производные по времени u', y', y'' также являются переменными. В точке, близкой к номинальному режиму: $f = f_н + \Delta f$ и $F = F_н + \Delta F$. Разложим функцию F в ряд Тейлора в окрестности точки номинального режима, отбрасывая члены ряда высоких порядков малости:

$$F_н + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_н \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_н \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_н \Delta y'' + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_н \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)_н \Delta u' = f_н + \Delta f.$$

В номинальном режиме, когда все отклонения и их производные по времени равны нулю, получаем частное решение уравнения: $F_н = f_н$. Учитывая это и вводя обозначения получим:

$$a_o\Delta y'' + a_1\Delta y' + a_2\Delta y = b_o\Delta u' + b_1\Delta u + c_o\Delta f.$$

Отбрасывая все знаки Δ, получим:

$$a_o y'' + a_1 y' + a_2 y = b_o u' + b_1 u + c_o f.$$

В более общем случае:

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = b_o u^{(m)} + ... + b_m - 1u' + b_m u + c_o f.$$

При этом всегда нужно помнить, что в данном уравнении используются не абсолютные значения величин y, u, f и их производных по времени, а отклонения этих величин от номинальных значений. Поэтому полученное уравнение будем называть *уравнением в отклонениях*.

К линеаризованной САУ можно применить *принцип суперпозиции*: реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна

сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Это позволяет звено с двумя входами u и f разложить на два звена, каждое из которых имеет один вход и один выход:

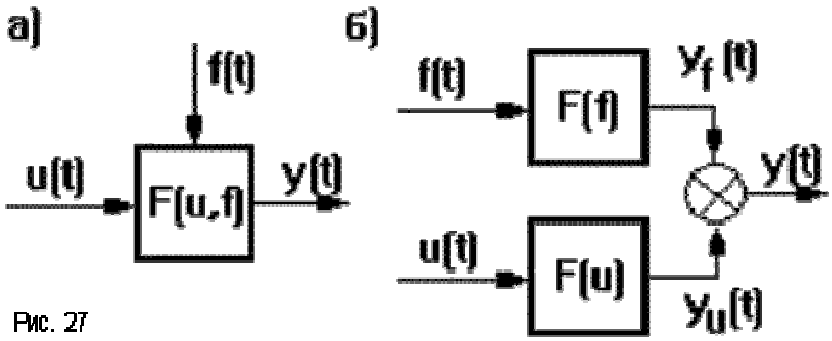


Рис. 27

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением поведения систем и звеньев с одним входом, уравнение динамики которых имеет вид:

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b_o u^{(m)} + \ldots + b_m - 1u' + b_m u.$$

Это уравнение описывает САУ в динамическом режиме лишь приближенно с той точностью, которую дает линеаризация. Однако следует помнить, что линеаризация возможна только при достаточно малых отклонениях величин и при отсутствии разрывов в функции F в окрестностях интересующей нас точки, которые могут быть созданы различными выключателями, реле и т.п.

Обычно $n \geq m$, так как при $n < m$ САУ технически нереализуемы.

8. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦИИ.

Дифференциальные уравнения

Наиболее распространенной формой описания передаточных свойств автоматических систем и их элементов являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Для элемента, имеющего один входной сигнал *x(t)* и один выходной сигнал *y(t)*, обыкновенное дифференциальное уравнение записывается в общем случае следующим образом:

$$\Phi\left[y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t); x(t), \ldots, x^{(m)}(t), t\right] = 0 \qquad (8.1)$$

Это уравнение связывает независимую функцию *y(t)* и её производную $y'(t)\ldots y^{(n)}(t)$ с независимой переменной *t* известной (заданной) функцией времени *x(t)*. Такое уравнение называют уравнением динамики или уравнением движения элемента.

Дифференциальное уравнение может быть линейным и нелинейным. Линейным оно является в том случае, если функция **Ф** линейна по отношению ко всем ее аргументам. Если же переменные *y(t)*, *x(t)* и их производные входят в выражение функции **Ф** в виде произведений, частных или степеней, то уравнение является нелинейным.

В выражение функции **Ф**, кроме основных переменных, входят постоянные величины, названные параметрами. Числовые значения параметров зависят от конструктивных данных описываемого элемента – масс, индуктивностей, емкостей и т.д.

Для большинства реальных элементов исходное уравнение (8.1), составленное строго в соответствие с законом физики, оказывается нелинейным, что значительно усложняет все последующие процедуры анализа. Поэтому всегда стремятся перейти к линейному дифференциальному уравнению вида:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots + a_n y(t) = \tag{8.2}$$
$$= b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x(t)$$

где *x(t)* и *y(t)* входная и выходная величины элемента или системы;

a_i, b_i – коэффициенты уравнения.

Данное уравнение устанавливает связь между входной и выходной величинами как в переходных, так и в установившихся режимах.

Коэффициенты дифференциального уравнения a_i, b_i называются параметрами. Иногда параметры некоторых элементов систем изменяются во времени, причем скорость их изменения соизмерима со скоростью процессов управления в системе. Такую систему называют нестационарной или системой с переменными параметрами.

Если при составлении линейного дифференциального уравнения использованы статические характеристики или приняты допущения о линейности тех или иных взаимосвязей, то уравнение справедливо лишь для малых отклонений входной и выходной величин от их значений в статическом режиме:

$$\Delta x = x(t) - x_0, \quad \Delta y = y(t) - y_0$$

Для САУ, описываемых линейным уравнением (8.2) справедлив принцип наложения или принцип суперпозиции, согласно которому изменение выходной величины *y(t)*, возникающее при действии на систему нескольких входных сигналов $x_i(t)$, равно сумме изменений $y_i(t)$ величины *y(t)*, вызываемых каждым сигналом в отдельности.

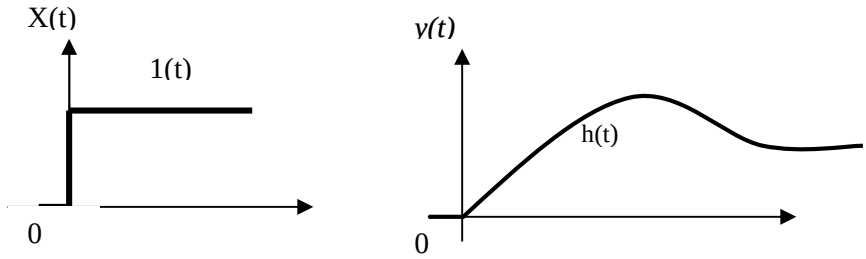
Временные характеристики

Дифференциальное уравнение является самой общей формой описания элемента и не дает наглядного представления о передаточных свойствах элемента. Наглядное представление об этих свойствах дает функция *y(t)*, являющаяся решением дифференциального уравнения. Но одно и тоже дифференциальное

уравнение может иметь множество решений, конкретный вид которых зависит от начальных условий и от характера функции *x(t)*, т.е. от начального состояния элемента и вида внешнего воздействия. Поэтому в автоматике принято динамические свойства элементов и систем характеризовать решением дифференциального уравнения, которое соответствует нулевым начальным условиям и одному из типовых воздействий.

Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его переходная функция (характеристика).

<u>Переходной функцией</u> *h(t)* называют изменение выходной величины *y(t)* во времени, возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях.



Переходная функция может быть задана графически или аналитически. Формульное выражение функции *h(t)* для конкретного элемента можно найти, решая его дифференциальное уравнение при

$x(t) = 1(t)$ *и* $y(-0) = y'(-0) = y''(-0)\ldots = y^{(n-1)}(-0) = 0$

Это условие означает, что выходная величина *y(t)* и ее производные до (n-1)-го порядка непосредственно перед подачей ступенчатого воздействия равен нулю.

Переходная функция *h(t)* имеет две составляющие: вынужденную $h_в(t)$ и свободную составляющую $h_с(t)$.

<u>Вынужденная составляющая</u> $h_в(t)$ переходного процесса представляет собой частное решение исходного уравнения. При ступенчатом воздействии вынужденная составляющая равна установившемуся значению выходной величины, которое может быть определено из дифференциального уравнения:

$$h_в(t) = y(\infty) = \frac{b_m}{a_n}$$

<u>*Свободная составляющая*</u> $h_c(t)$ может быть найдена как решение соответствующего однородного дифференциального уравнения в виде:

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}$$

где p_k - корни характеристического уравнения

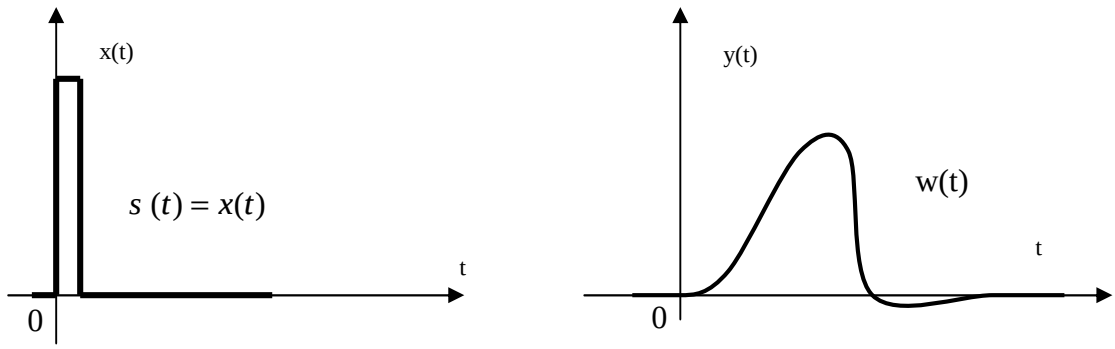
C_k – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий

<u>*Характеристическое уравнение*</u> данного дифференциального уравнения представляет собой алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части этого дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения (8.2) характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Для линейных систем справедливо следующее общее правило: реакция *y(t)* на неединичное ступенчатое воздействие *a*1(t)* равна произведению переходной функции *h(t)* на величину множителя *a*, т.е. *y(t) = ah(t)*.

<u>Импульсной переходной функцией</u> *w(t)* называют изменение выходной величины *y(t)*, возникающее после передачи на вход дельта-функции, при нулевых начальных условиях.



Если входное воздействие представляет собой неединичный импульс *a s (t)*, то ординаты функции выходной величины *y(t)* , будут в *a* раз больше ординат функции *w(t)*, т.е. *y(t) = aw(t)*.

Связь между переходной и импульсной переходной функциями *h(t)* и *w(t)* существует следующая взаимосвязь:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \qquad h(t) = \int_0^t w(t)\,dt\,.$$

При помощи импульсной переходной функции элемента можно определить ее реакцию на входное воздействие произвольного вида. Связь между изменениями входной и выходной величин во времени устанавливается интегралом свертки:

$$y(t) = \int_0^\infty x(t)w(t-t)w(t)\,dt = \int_0^\infty x(t-t)w(t)\,dt\,.$$

Второе распространенное название функции *w(t)* – весовая. Действительно, эта функция определяет вес (долю), с которым каждый входной импульс, полученный при разложении сигнала *x(t)*, участвует в формировании результирующего выходного сигнала *y(t)*.

Операционный метод. Передаточная функция.

Наиболее распространенным методом описания автоматических систем является операционный метод (метод операционного исчисления). В основе метода лежит преобразование Лапласа:

$$x(p) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}\,dt\,,$$

которое устанавливает соответствие между функциями действительной переменной *t* и функциями комплексной переменной *p*. Функцию времени *x(t)*, входящую в интеграл Лапласа называют оригиналом, а результат интегрирования – функцию *x(p)* – изображением функции *x(t)* по Лапласу.

Преобразование Лапласа выполнимо лишь для таких функций времени, которые равны нулю при $t < 0$. Это условие обеспечивается обычно умножением функции *x(t)* на единичную ступенчатую функцию *1(t)*. С математической и физической точек зрения такой искусственный прием корректен, так как функции

x(t) описывают процессы в автоматических системах, начинающиеся с некоторого момента времени, а этот момент времени всегда может быть принят за начало отсчета.

Для нахождения изображений по Лапласу различных функций существую справочные таблицы.

Основные свойства преобразования Лапласа приведены в таблице.

Свойство	Оригинал	Изображение
Линейность	$ax(t)$ $x_1(t) \pm x_2(t)$	$aX(p)$ $X_1(p) \pm X_2(p)$
Правило дифференцирования (при нулевых начальных условиях)	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$X(p)*p^k$
Правило интегрирования (при нулевых начальных условиях)	$\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{k-раз} x(t)dt^k$	$\frac{X(p)}{p^k}$
Изменение масштаба времени (теорема подобия)	$x(\frac{t}{T_m})$	$X(pT_m)*T_m$
Смещение аргумента оригинала (теорема запаздывания)	$x(t-t)$	$X(p)e^{-pt}$
Теорема о начальном значении оригинала	$\lim_{t \to 0} x(t)$	$\lim_{p \to \infty} pX(p)$
Теорема о конечном значении оригинала	$\lim_{t \to \infty} x(t)$	$\lim_{p \to 0} pX(p)$

Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа являются следующие правила:

при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала *x(t)* по переменной *t* соответствует умножение изображения *X(p)* на комплексную переменную *p*, а интегрированию оригинала соответствует деление *X(p)* на *p*.

Широкое распространение операционного метода в ТАУ обусловлено тем, что с его помощью определяют передаточную функцию, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применим преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению (8.2), полагая, что до приложения внешнего воздействия система находилась в покое и все начальные условия равны нулю. Используя свойство линейности и правило дифференцирования, можно получить алгебраическое уравнение в изображениях:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots a_n) Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) X(p).$$

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p) \qquad (8.3)$$

где $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – собственный оператор

$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$ – входной оператор

Уравнение (8.3) получено из уравнения (8.2) с использованием следующей замены оригиналов изображениями:

$$\frac{d^k}{dt^k} \to p^k, \quad y(t)=Y(p), \quad x(t)=X(p)$$

<u>Передаточной функцией</u> W(p) называют отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Для системы, описываемой уравнением (8.2), передаточная функция представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через линейный элемент и не зависящий от вида входного воздействия $x(t)$, а характеризующий лишь собственные динамические свойства описываемого элемента или системы.

Передаточную функцию формально можно получить из дифференциального уравнения путем замены в нем символа кратного дифференцирования на соответствующую степень p и деления образованного таким образом многочлена правой части уравнения на многочлен левой части.

Основные свойства и особенности передаточной функции САУ.

1. Передаточная функция устанавливает связь между входной и выходной величиной, как в динамическом, так и в статическом режимах.
2. Передаточная функция реальных элементов – правильная рациональная дробь, у которой степень многочлена числителя меньше или равна степени многочлена знаменателя $m \le n$.
3. Все коэффициенты передаточной функции – действительные числа, характеризующие параметры элемента или системы.
4. Передаточная функция является функцией комплексной переменной $p = a \pm jb$, которая при некоторых значениях переменной *p* может обращаться в нуль или бесконечность. Значение переменной *p*, при котором функция W(p) обращается в нуль, называют нулем, а при котором обращается в бесконечность – полюсом передаточной функции. Нули передаточной функции – корни полинома *K(p)*, полюса – корни полинома *D(p)*. Корни полиномов числителя и знаменателя могут быть комплексными, мнимыми и вещественными. Если эти корна известны, то передаточная функция может быть представлена в виде:

$$W(p) = \frac{b_0(p-g_1)(p-g_2)\ldots(p-g_m)}{a_0(p-l_1)(p-l_2)\ldots(p-l_n)},$$

где g_i - корни многочлена *K(p)* (нули W(p));

l_i - корни многочлена *D(p)* (полюса W(p)).

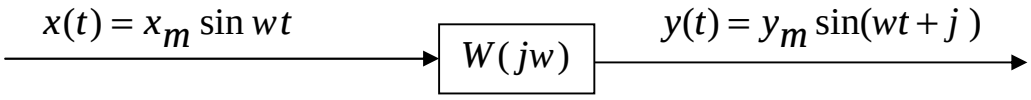
5. Передаточная функция элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \int_0^\infty w(t)e^{-pt}dt.$$

Частотные характеристики

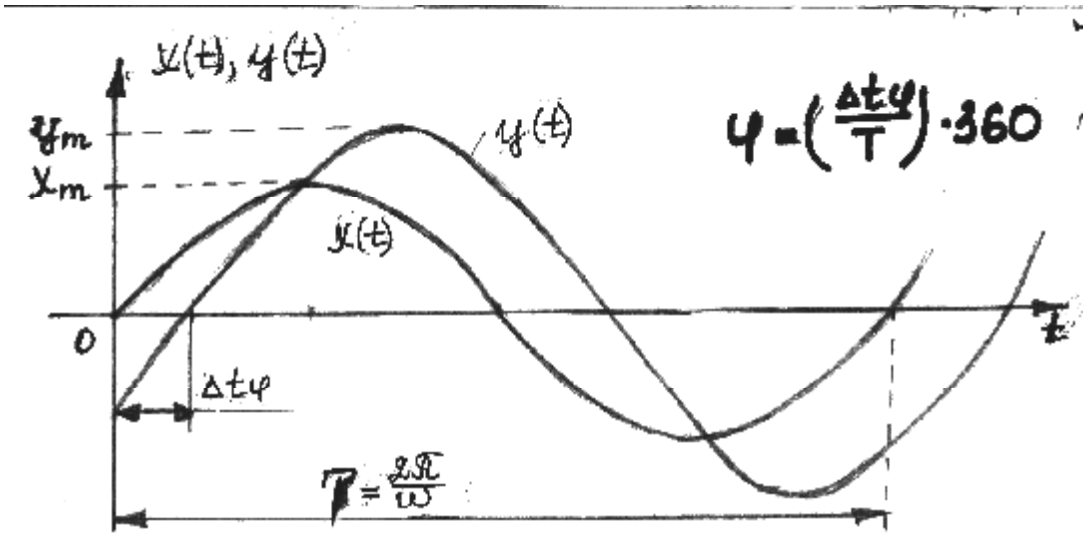
Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и системы в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных

внешним гармоническим воздействием. Частотные характеристики широко используются в теории и практике автоматического управления, так как реальные возмущения, действующие на САУ, могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.



Для исследования частотных свойств системы и получения ее частотных характеристик на вход системы подают гармоническое воздействие определенной частоты w и амплитуды X_m:

$$x(t) = x_m \sin wt$$



После окончания переходного процесса элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина *y(t)* будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой *w*, но с отличающейся амплитудой y_m и со сдвигом Δt_j по оси времени:

$$y(t) = y_m \sin(wt + j)$$

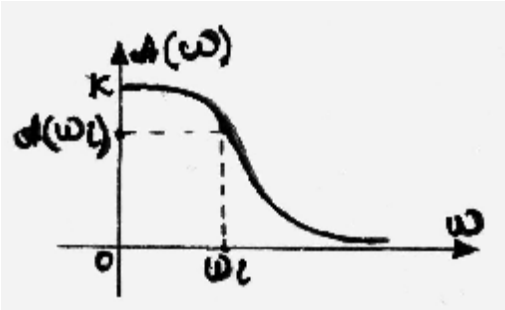
где $j = (\Delta t_j / T) * 360$ - фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами.

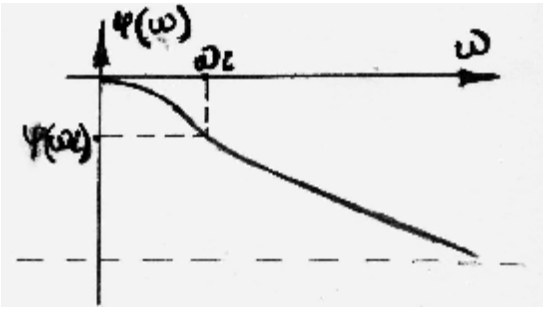
Повторяя такой эксперимент при фиксированном X_m для различных значений частоты (от 0 до ∞), можно установить, что амплитуда y_m и фазовый

сдвиг j выходного сигнала элемента зависят от частоты воздействия. Подавая гармоническое воздействие на вход различных элементов, можно убедиться, что величины y_m и j зависят также от типа и параметров элемента. Следовательно, зависимости амплитуды y_m и сдвига j от значений частоты w могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты называют амплитудной частотной характеристикой (сокращенно - АЧХ) и обозначают $A(w)$.

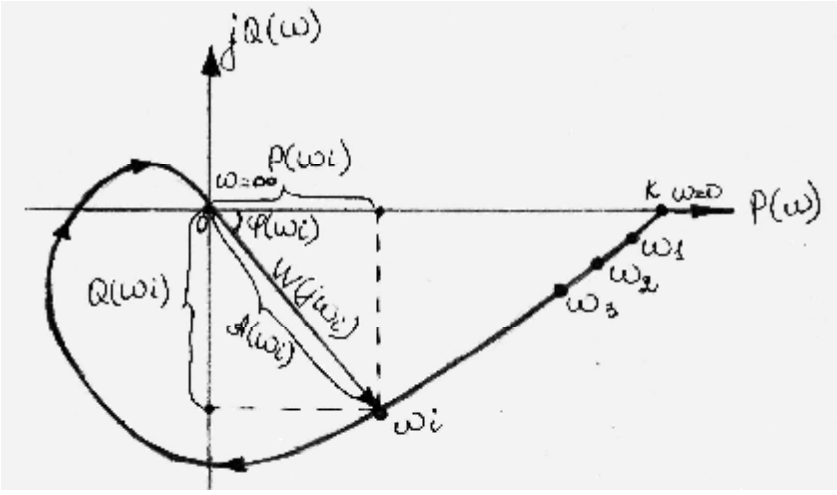
Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют фазовой частотной характеристикой (сокращенно - ФЧХ) и обозначают $j(w)$.





АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Оценка пропускания производится по отношению амплитуд y_m/x_m. ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент на различных частотах.

Амплитудную и фазовую частотную характеристику можно объединить в одну общую – амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ или АФХ). АФЧХ $W(jw)$ представляет собой функцию комплексной переменной jw, модуль которой равен $A(w)$, а аргумент равен $j(w)$. Каждому фиксированному значению частоты w_i соответствует комплексное число $W(jw_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(w_i)$ и угол поворота $j(w_i)$.



При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор *W(jw)* поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно увеличивается или уменьшается длина вектора. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора *W(jw)* на действительную и мнимую оси называют соответственно действительной *P(w)* и мнимой *Q(w)* частотными характеристиками.

$$P(w) = \mathrm{Re}W(jw) \qquad Q(w) = \mathrm{Im}W(jw)$$

Действительная или вещественная частотная характеристика P(ω) – всегда четная функция частоты, мнимая Q(ω) – всегда нечетная функция.

Аналитическое выражения для АФЧХ можно получить из передаточной функции путем подстановки $p = jw$:

$$W(jw) = W(p)\big|_{p=jw}$$

АФЧХ *W(jw)* может быть представлена:

– в показательной форме $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

– в алгебраической $W(jw) = P(w) + jQ(w)$

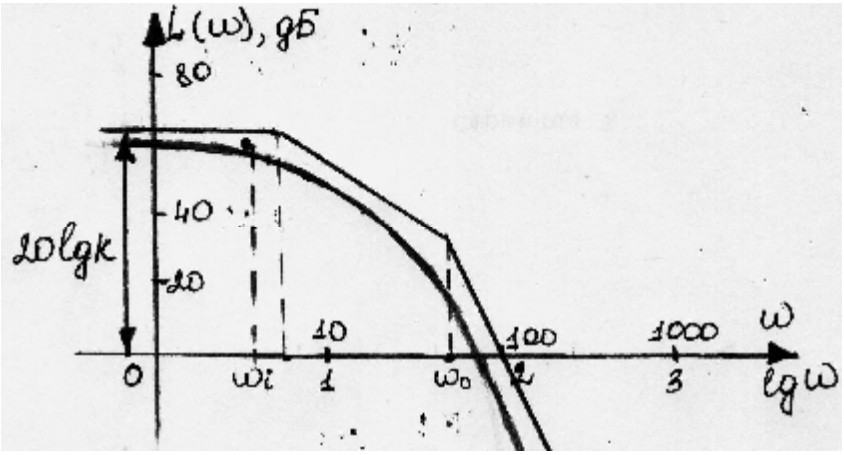
– в тригонометрической $W(jw) = A(w)\cos j(w) + jA(w)\sin j(w)$

Связь между различными частотными характеристиками:

$$A(w) = |W(jw)| = \sqrt{P^2(w) + Q^2(w)}$$

$$j(w) = argW(jw) = arctg\left(\frac{Q(w)}{P(w)}\right).$$

При практических расчетах САУ удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют логарифмическими. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближено, заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем, эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.]



За единицу длины по оси частоты логарифмических характеристик декаду. Декада – интервал частот, заключенный между произвольным значением w_I и его десятикратным значением $10*w_i$. Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ:

$$L(w) = 20lgA(w).$$

Ординаты ЛАЧХ измеряются в белах (Б) или децибелах (дБ). Бел – единица измерения отношения мощностей двух сигналов.

Если мощность одного сигнала больше (меньше) мощности другого сигнала в 10 раз, то эти мощности отличаются на 1Б.

9. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЗАЦИИ

Физический подход к моделированию динамических систем основан на уравнениях баланса сил, массы, энергии и моментов. В этом разделе на простых примерах рассмотрены некоторые общие принципы моделирования динамических систем.

9.1. Механические системы

Краеугольным камнем динамической модели любой механической системы является второй закон Ньютона.

Для применения закона Ньютона необходимо задать некоторую систему отсчета, относительно которой будут определяться положение, скорость и ускорение. Пусть вектор **F** — сумма всех сил, действующих на тело, ***m*** — масса тела, а вектор **z** характеризует его положение. Ускорение ***a*** — вектор с тем же направлением, что и вектор **F**. Уравнение баланса сил имеет вид

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2}$$

В действительности Ньютон сформулировал свое утверждение относительно импульса следующим образом

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \mathbf{v})$$

Второй закон Ньютона можно записать как систему дифференциальных уравнений первого порядка, в форме так называемых уравнений состояния.

При прямолинейном движении координата z и скорость v выражаются как скаляры

$$\frac{dz}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

Более общая форма уравнений динамики — это уравнения Лагранжа.

Пример 9.1. Механическая система с пружиной и амортизатором

Многие механические системы аналогичны показанной на рис. 6.1. Тело массы m связано с неподвижной стеной пружиной и амортизатором. Сила реакции пружины пропорциональна ее относительному растяжению, а сопротивление амортизатора — скорости тела.

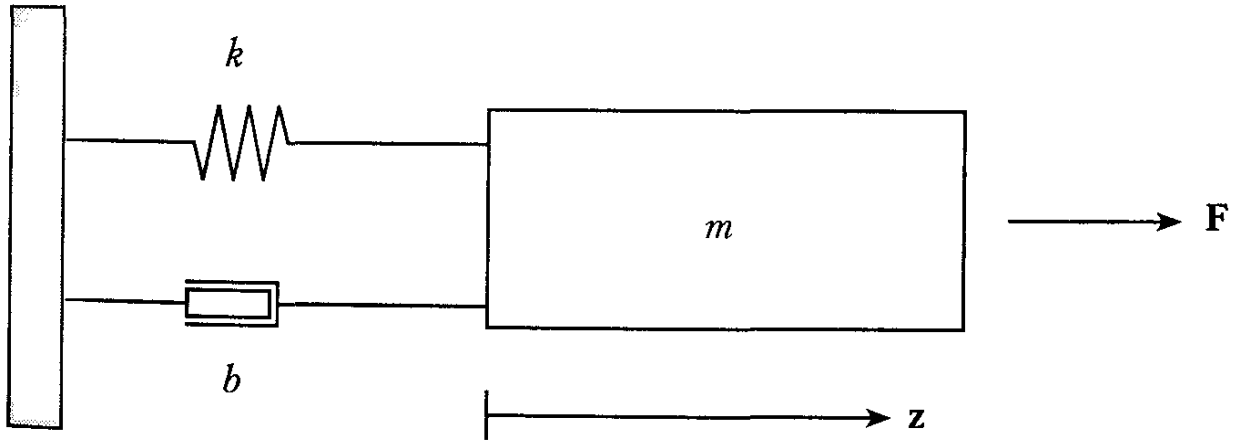


Рисунок 9.1 – Закон Ньютона для прямолинейного движения

Закон Ньютона в этом случае

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = -b \cdot \frac{dz}{dt} \qquad -k \cdot z + F$$

После преобразований получим:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m} \cdot z = \frac{F}{m}$$

Уравнение из примера 9.1 можно использовать для описания многих сервомеханизмов. Качественно решение уравнения зависит от относительной величины коэффициентов b, k и m. При малом коэффициенте демпфирования b уравнение описывает колебательный процесс, а при больших значениях b колебания отсутствуют.

Системы такого рода часто характеризуются относительным демпфированием, частотой собственных колебаний, шириной полосы пропускания и коэффициентом усиления.

Закон Ньютона для систем вращения имеет вид

$$\frac{d(J \cdot \omega)}{dt} = \mathbf{T}$$

где **T** - сумма всех моментов, действующих на тело; ***J*** - момент инерции; w - угловая скорость (рис. 9.2). Часто ***J*** — непостоянная величина, например, при работе промышленного робота или прокатного стана, и нужно учитывать его зависимость от времени.

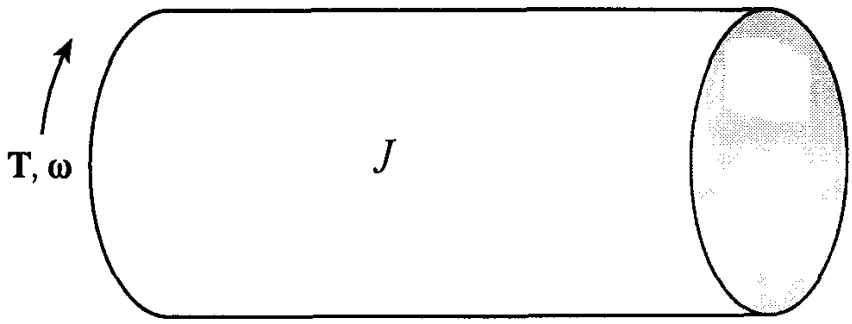


Рисунок 9.2 – Закон Ньютона для вращения

Если ввести понятие угла поворота e, то динамику вращения можно описать в форме уравнений состояния. При этом полагают, что известно направление вращения и что величина ***J*** постоянна. Тогда дифференциальные уравнения записываются в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T}{J}$$

Пример 9.2. Момент электрического двигателя

Электрический двигатель связан с нагрузкой жестким валом. Результирующий момент Т - разность между вращающим моментом T_m и моментом сопротивления нагрузки T_L. Момент двигателя T_m является функцией тока ротора, магнитного потока и, в некоторых типах двигателей, угловой скорости и угла поворота. Ток зависит от переходного процесса в цепи ротора.

Момент сопротивления нагрузки T_L также зависит от многих факторов. Кулоновское трение вызывает момент d_0, который зависит не от скорости, а только от направления вращения и действует всегда против него (рис. 9.3). В некоторых системах есть вязкое сопротивление с моментом, характеризующееся параметром d_1. В компрессоре или насосе момент сопротивления нагрузки также зависит от турбулентности жидкости и пропорционален квадрату скорости — $d_2 \cdot w^2$, где параметр d_2 зависит от условий работы.

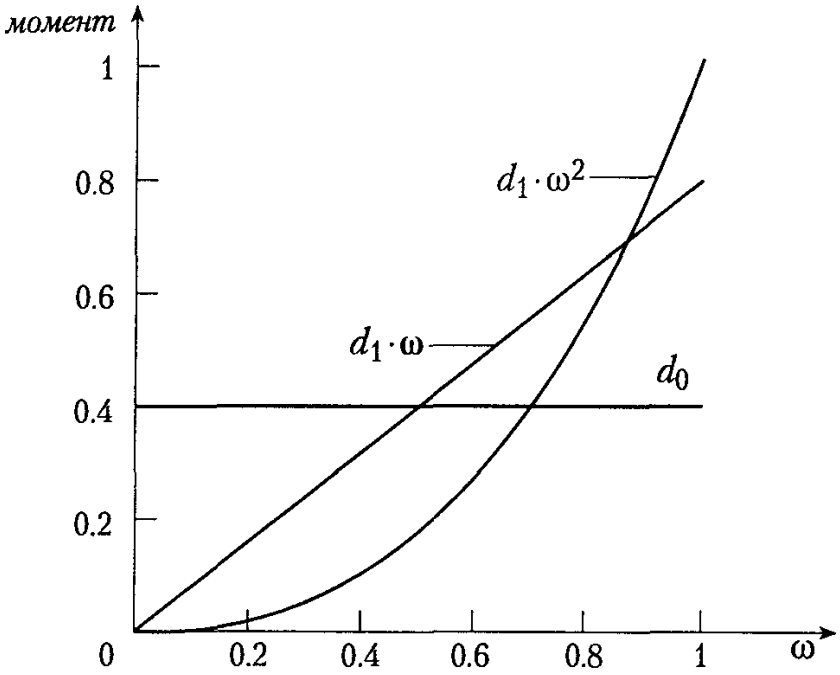


Рисунок 9.3 – Момент двигателя как функция угловой скорости

В итоге полный момент сопротивления нагрузки можно представить суммой упомянутых моментов и момента внешней нагрузки T_{L0}:

$$T_L = d_0 \cdot \mathrm{sign}(\omega) + d_1 \cdot \omega + d_2 \cdot \omega^2 + T_{L0}$$

Функция $sign(w)$ принимает значение +1 для положительного аргумента w и -1 — для отрицательного и используется для обозначения направления. Общий баланс моментов ротора

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = T_m - T_L$$

где J – полный момент инерции двигателя и нагрузки

Промышленный робот - это сложная механическая система, состоящая из связанных жестких рычагов. Описание динамики движения манипулятора робота базируется на законах Ньютона. Уравнения Лагранжа являются обобщенной формой закона Ньютона. Существуют деформируемые механические системы, например, крыло самолета, при движении которых могут появляться нежелательные колебания; такие динамические системы, вообще говоря, очень сложны для управления.

9.2. Электромагнитные цепи

Динамика большинства электромагнитных цепей определяется несколькими основными законами. Законы Кирхгоффа описывают связь между напряжениями и токами в электрической цепи. Электрические цепи образуются ветвями и узлами. **Ветвь** определяется как проводник или элемент с двумя концами. Элемент ветви может быть пассивным, т. е. сохраняющим или потребляющим ток, или активным, т. е. генерирующим напряжение или ток. **Узел** — это точка, в которой соединяются три или более ветвей. В узле ток может иметь более чем один путь.

Закон Кирхгоффа для тока утверждает, что сумма всех токов в любом узле равна нулю, а закон Кирхгоффа для напряжений — сумма падений напряжения по любому замкнутому контуру равна нулю.

Закон Кирхгоффа для напряжений есть следствие принципа сохранения энергии. При записи баланса напряжений можно идти вокруг замкнутого контура

в любом направлении и суммировать падения напряжения при условии, что каждый элемент учитывается только один раз.

Основы электромагнитной теории сформулированы в уравнениях Максвелла. С точки зрения динамических систем имеется два элемента с зависимым от времени состоянием: конденсатор — для накопления электрического заряда и индуктивность — для накопления энергии магнитного поля.

Конденсатор в цепи накапливает электрический заряд, т. е. энергия сохраняется в электрическом поле. Ток, текущий через конденсатор, пропорционален производной от напряжения на конденсаторе по времени

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

где C — емкость конденсатора.

Пример 9.3 Простая резистивно-емкостная цепь

Рассмотрим простую резистивно-емкостную *(RC)* цепь (рис. 9.4) и проанализируем зависимость напряжения на конденсаторе от напряжения источника.

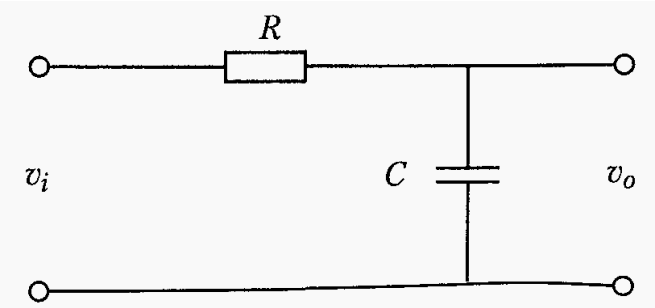


Рисунок 9.4 – Пассивный низкочастотный фильтр первого порядка

Закон Кирхгоффа для напряжений цепи дает

$$v_i - R \cdot i - v_o = 0$$

где R - активное сопротивление, а v_0 - напряжение на конденсаторе, определяемое уравнением

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$$

После исключения тока ***i*** из дифференциального уравнения, имеем

$$R \cdot C \cdot \frac{dv_o}{dt} = -v_o + v_i$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка характеризуется **постоянной времени** *(time constant)* $T = R \cdot C$

Если начальное напряжение на конденсаторе равно нулю, то скачок входного напряжения v_i вызовет экспоненциальный рост напряжения на конденсаторе

$$v_o(t) = v_i(1 - e^{-t/T})$$

На рис. 9.5 показаны переходные процессы в RC-цепи для различных значений постоянной времени — с ростом ***T*** реакция процесса замедляется.

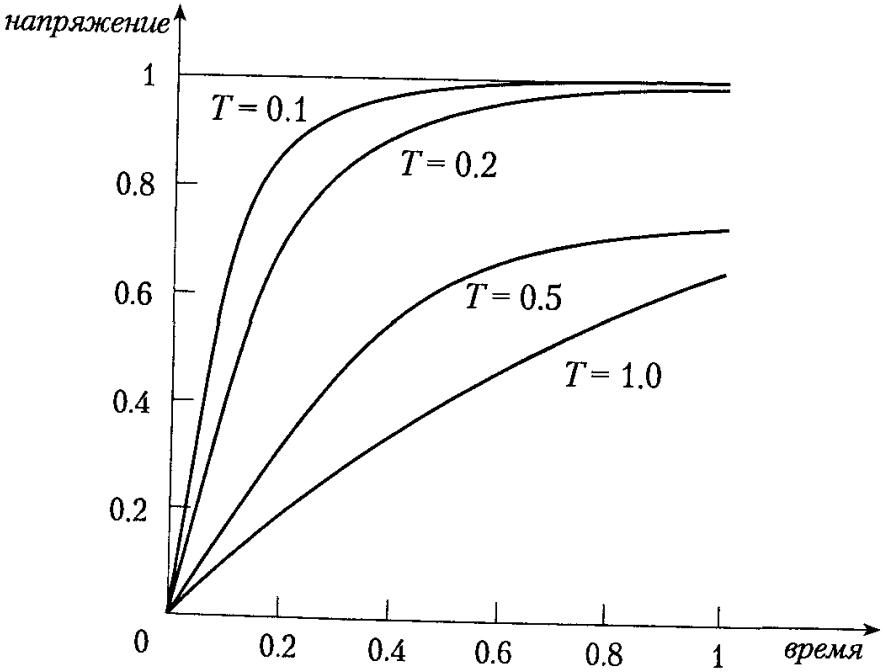


Рисунок 9.5 – Изменение напряжения на конденсаторе RC-цепи при скачке входного напряжения для различных значений постоянной времени T= RC

В электронике и технике связи обычной практикой анализа систем является использование синусоидального входного сигнала. Предположим, что входное напряжение цепи имеет вид

$$v_i(t) = V_i \cdot \sin(\omega t)$$

Выходной сигнал имеет такую же частоту, что и входной, но другие амплитуду и фазу:

$$v_o(t) = V_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

где $V_o = V_i / \sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}$ и $\varphi = \mathrm{arctg}(\omega \cdot R \cdot C)$.

С ростом частоты амплитуда выходного напряжения падает, и все больше и больше отстает по фазе. Цепь с такими свойствами называется **низкочастотным фильтром** *(low-pass filter),* поскольку она пропускает низкие, но гасит высокие частоты.

Приведенный пример иллюстрирует два основных метода описания линейных систем — во **временной области** *(time-domain)* и в **частотной области** *(frequency-domain).* Анализ во временной области рассматривает поведение системы во времени, т. е. зависимость от времени ее реакции на конкретный входной сигнал — скачок. Частотный анализ исследует поведение системы под воздействием внешних возмущений различной частоты.

При изменении магнитного поля во времени возникает электрическое поле. Это — закон Фарадея (закон электромагнитной индукции), который описывается одним из уравнений Максвелла. В соответствии с законом индукции напряжение ***e*** - э.д.с. индукции, — наведенное на концах идеальной катушки, т. е. катушки без активного сопротивления, равно

$$-\frac{d\Psi}{dt} = e$$

где Ψ — потокосцепление витков катушки (потокосцепление — это произведение магнитного потока **Ф** через один виток на число витков N). Потокосцепление катушки с током I и индуктивностью L

$$\Psi = L \cdot I$$

Другими словами, в катушке (индуктивности) энергия сохраняется в магнитном поле.

Дифференциальные уравнения для емкости и индуктивности представляют собой основу для описания электромагнитных цепей. Другие отношения можно получить из этих основных уравнений с помощью алгебраических

преобразований. Соотношение между магнитной индукцией ***B*** и напряженностью магнитного поля ***H*** определяется свойствами среды

$$B = \mu \cdot H$$

где m — магнитная проницаемость материала.

В ферромагнитных материалах проницаемость непостоянна и для больших значений ***H*** величина магнитного потока ***Ф***, пропорциональная магнитной индукции ***B*** будет достигать насыщения. Связь между магнитным потоком и током, создающим напряженность магнитного поля, показана на рис. 9.6.

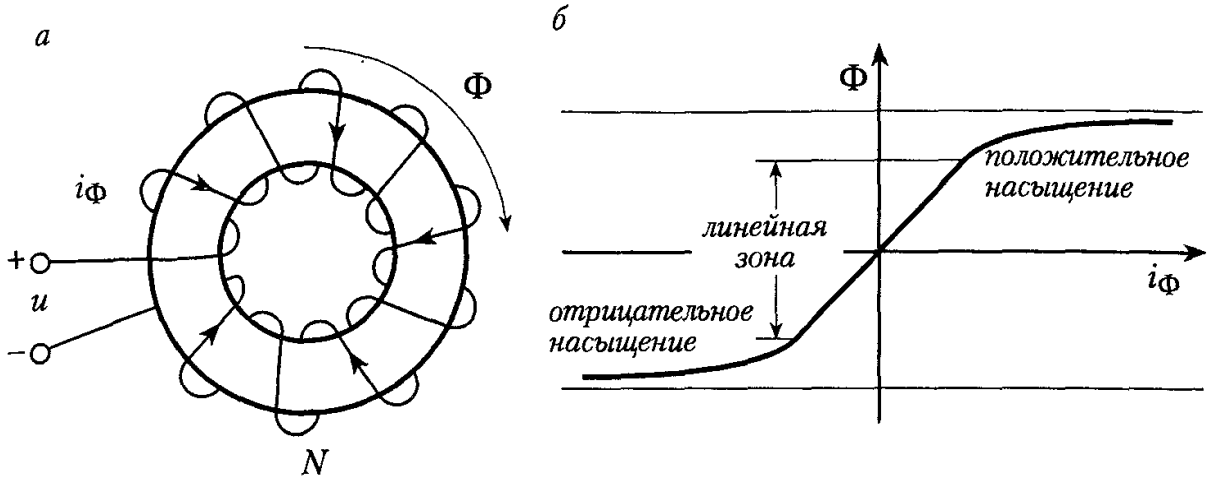


Рисунок 9.6 Простая магнитная цепь (а), типовая кривая намагничивания без гистерезиса (б)

Часто при описании магнитных цепей необходимо учитывать явление гистерезиса, из-за которого магнитная индукция не только функция тока, но и зависит от предыстории намагничивания.

Пример 9.4 Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

Двигатель постоянного тока *(d.c. motor)* преобразует электрическую энергию в механическую в виде вращающего момента (рис. 9.7).

В двигателе существуют два магнитных поля. Поле статора создается или постоянным магнитом, или электромагнитом; последний должен быть соединен с отдельным источником напряжения. Для простоты будем здесь полагать, что поле

статора постоянно во времени. Магнитное поле ротора возникает при подаче напряжения в цепь ротора.

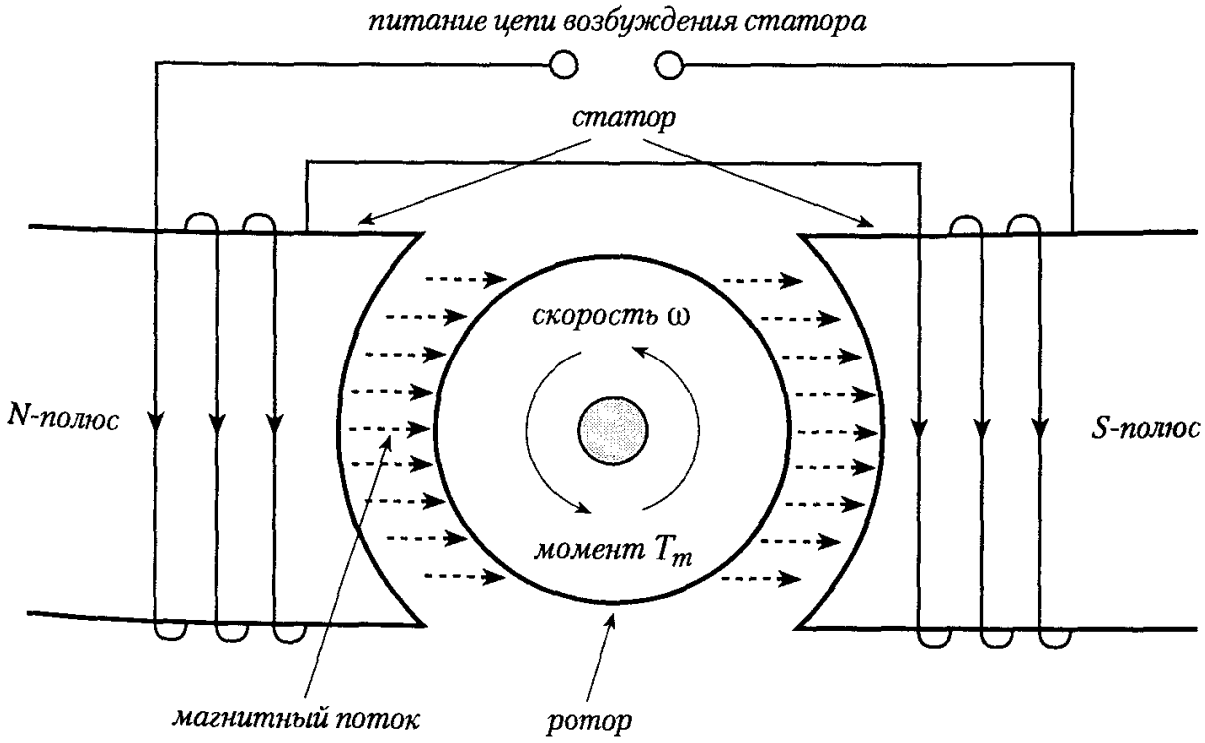


Рисунок 9.7 – Схема двигателя постоянного тока

Обмотки размещаются таким образом, что поле ротора всегда перпендикулярно полю статора. Известно, что если два магнитных поля расположены под углом друг относительно друга, то возникает момент, который стремится сделать их параллельными. Это принцип работы стрелки компаса — если стрелка не параллельна линиям магнитного поля Земли, то она поворачивается, пока не установится параллельно. Ротор под воздействием возникшего момента поворачивается, и его обмотки механически переключаются коммутатором, что приводит к изменению направления поля ротора. Таким образом, в результате ориентация поля ротора в пространстве всегда одинакова и перпендикулярна по отношению к полю статора. Момент же сохраняется постоянным для всех углов поворота ротора.

Момент, генерируемый двигателем, пропорционален магнитной индукции поля статора и току ротора ***i***. Поскольку в этом примере мы предполагаем, что магнитная индукция постоянна, то момент двигателя

$$T_m = k_m \cdot i$$

где k_m — константа, зависящая от двигателя. Учитывая момент сопротивления нагрузки T_L, механическую часть можно записать следующим образом

$$\frac{d(J \cdot \omega)}{dt} = k_m \cdot i - T_L$$

где ***J*** — полный момент инерции двигателя и нагрузки. В результате вращения в магнитном поле статора в обмотках ротора наводится э.д.с. индукции ***e***. При постоянном поле статора э.д.с. индукции пропорциональна скорости вращения w

$$e = k_g \cdot \omega$$

где k_g — константа. Если единицы согласованы и потери пренебрежимо малы, то

$$k_g = k_m = k$$

В соответствии с законом Ленца магнитный поток, вызванный э.д.с. индукции ***e***, будет ориентирован против потока, вызванного исходным током проводника. Электрическая цепь ротора характеризуется ее активным сопротивлением ***R*** и индуктивностью ***L***. Предполагая, что ***L*** — константа, закон индукции определяет

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(L \cdot i)}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} = v - R \cdot i - k \cdot \omega$$

где i - ток ротора, а v — приложенное напряжение. Динамика двигателя иллюстрируется рис. 9.8.

Приложенное напряжение вызывает ток ротора, создавая момент двигателя. Момент воздействует на ротор, который начинает вращаться с определенной угловой скоростью. Наведенная э.д.с. индукции действует как обратная связь между механикой ротора и его электрической цепью.

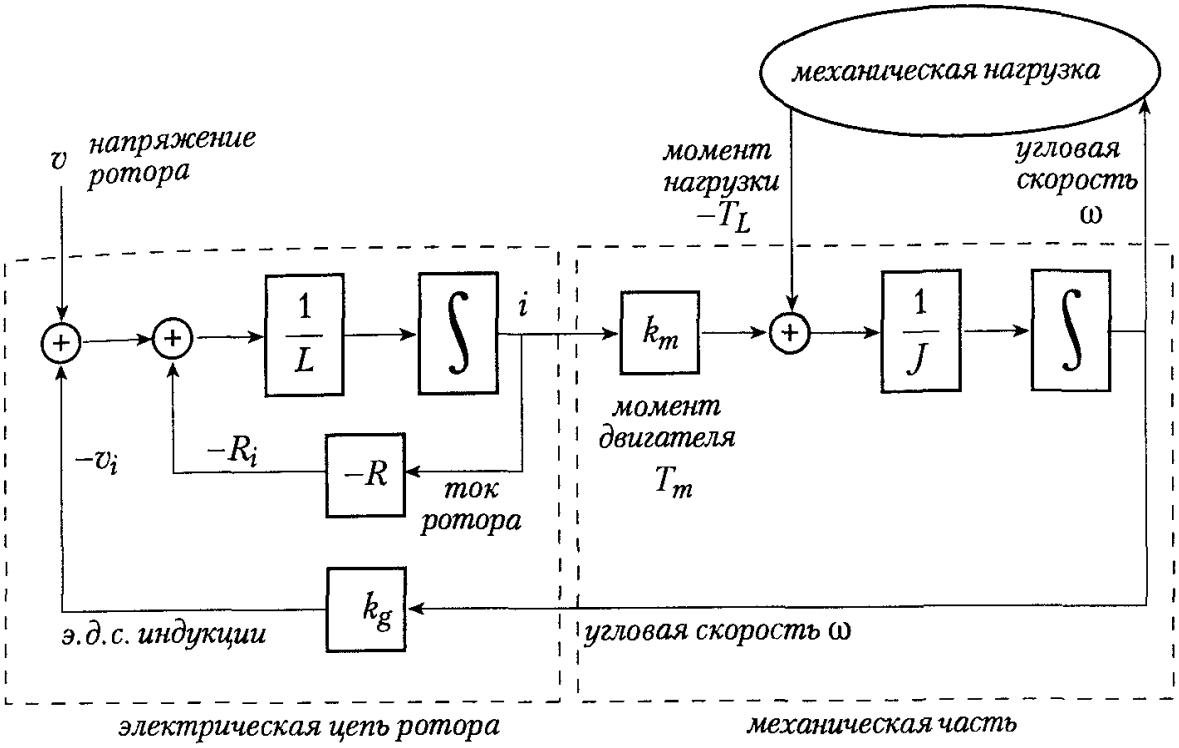


Рисунок 9.8 – Блок-схема двигателя постоянного тока

9.3. Баланс массы

Для многих промышленных процессов существенным является моделирование баланса массы различных компонентов. В открытой системе, где происходит обмен с внешним миром, все уравнения баланса массы имеют одинаковую структуру

приращение массы = приход массы - расход массы

Такое уравнение можно сформулировать как для каждого отдельного компонента, так и для всей массы в целом. Приход (расход) массы может быть следствием как входного (выходного) потока, так и химических реакций или биологического роста. Несколько примеров иллюстрируют принципы уравнения баланса.

Пример9.5 Баланс общей массы

Бак заполняется однородной несжимаемой жидкостью (рис. 9.9). Приход и расход массы обозначаются как q_{in} и q_{out} соответственно, уравнение баланса имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = q_{in} - q_{out}$$

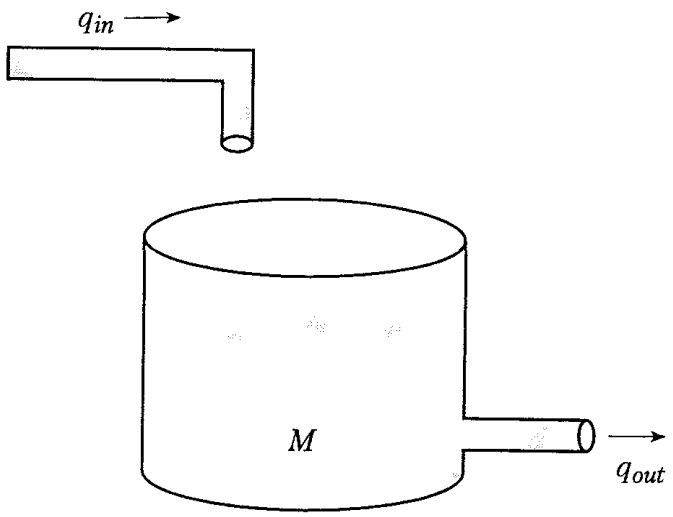


Рисунок 9.9 – Емкость с однородной жидкостью

Пример 9.6.Баланс массы компонента

Бак наполнен раствором с однородной концентрацией одного из компонентов ***c*** (рис. 9.10).

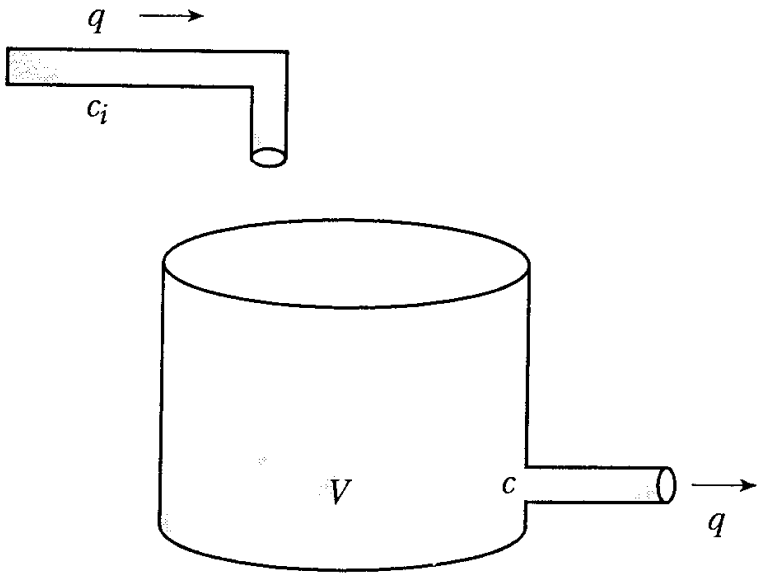


Рисунок 9.10 – Динамика концентрации в простом смесителе

Сформулируем баланс массы компонента. Концентрация раствора во входном потоке c_i может меняться заданным образом. Расходы входного и выходного потоков считаются постоянными и равны ***q***. Полная масса компонента в баке определяется объемом ***V*** и равна $V \cdot c$. Будем считать концентрацию в выходном потоке такой же, как в баке. Тогда баланс массы компонента записывается в виде

$$\frac{d(V \cdot c)}{dt} = q \cdot c_i - q \cdot c$$

Поскольку объем ***V*** постоянный

$$\frac{V}{q} \cdot \frac{dc}{dt} = -c + c_i$$

Вид этого дифференциального уравнения такой же, как и для электрической цепи в примере 9.4. Постоянная времени определяется здесь как $T = V/q$. Изменение концентрации в баке при скачке c_i аналогично зависимости, представленной на рис. 9.5. Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$c(t) = c_i \cdot (1 - \mathrm{e}^{-t/T})$$

Интуитивно ясно, что концентрация будет меняться медленнее, если расход жидкости во входном потоке мал по сравнению с объемом ***V*** (это соответствует большому значению ***T***). То есть баланс массы компоненты имеет такие же динамические свойства, что и низкочастотный фильтр.

В принципе, анализ рассмотренной системы можно выполнить и в частотной области, аналогично электрическому низкочастотному фильтру. В этом случае концентрация входного потока изменяется (модулируется) по синусоидальному закону и изучается частотный отклик концентрации в выходном потоке. Этот подход, однако, не очень практичен для химических процессов, так как постоянная времени может быть порядка часов и такой эксперимент продлится много дней.

Пример 9.7 Аэрация бака очистки сточных вод

Уравнение, описывающее концентрацию растворенного кислорода в аэраторе станции очистки сточных вод или в ферментаторе, является нелинейным. При этом полагают, что аэратор работает как дозатор, т. е. жидкость поступает в бак и вытекает из него не постоянно, а только в определенные моменты времени. Воздух подается от компрессора с расходом ***u***.

Скорость перехода кислорода из газообразного состояния в растворенное определяется коэффициентом растворимости $k_L \cdot a$. Для простоты будем полагать, что этот коэффициент пропорционален расходу воздуха:

$$k_L \cdot a = \alpha \cdot u$$

где a — коэффициент пропорциональности. В свою очередь, коэффициент растворимости равен нулю при насыщенной концентрации растворенного кислорода $(c = c^S)$ и максимален при нулевой концентрации; эта зависимость моделируется выражением $a \cdot u \cdot (c^S - c)$. Микроорганизмы потребляют растворенный кислород в процессе своего роста со скоростью ***R***. Упрощенное уравнение баланса массы растворенного кислорода при концентрации ***c*** можно записать в виде

$$\frac{dc}{dt} = \alpha \cdot u \cdot (c^S - c) - R$$

Из-за наличия произведения $u \cdot c$ система нелинейная.

Пример 9.8 Станция очистки сточных вод с замкнутым циклом — простая модель взаимодействия микроорганизмов с загрязнениями

Входной поток сточных вод характеризуется концентрацией загрязнений s_i и не содержит живых организмов. В аэраторе - в предположении, что компоненты равномерно перемешаны, — смесь загрязнений с концентрацией ***s*** и микроорганизмов с концентрацией c_x находится во взвешенном состоянии. Расходы показаны на рис. 9.11.

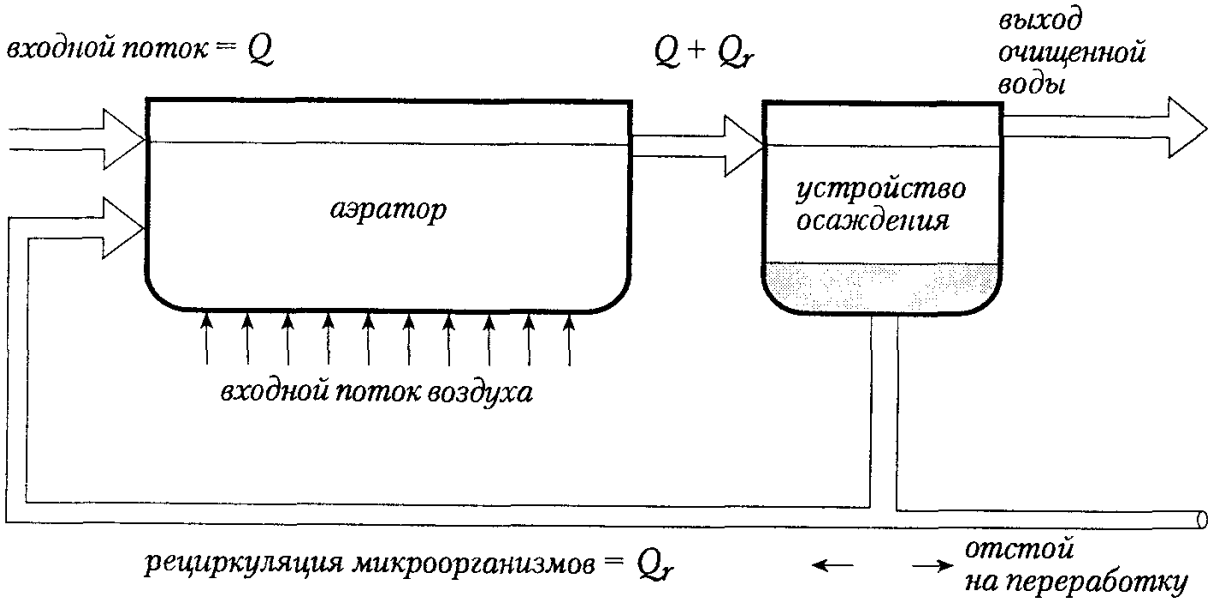


Рисунок 9.11 – Простая модель аэратора станции очистки сточных вод

Баланс массы загрязнений и микроорганизмов в аэраторе записывается в виде

приращение массы = втекающая масса - истекающая масса + рост – распад.

Микроорганизмы возвращаются из отстойника с концентрацией c_{xr}. Показатель роста микроорганизмов моделируется величиной $m \cdot c_x$, при этом удельный показатель роста m зависит от концентрации загрязнений

$$\mu = \hat{\mu} \cdot \frac{s}{K + s}$$

где $\boldsymbol{K}$ — постоянный параметр.

Рост практически отсутствует при малых значениях $\boldsymbol{s}$ и приближается к максимальному значению $\hat{m}$ при высокой концентрации загрязнений. Концентрация микроорганизмов уменьшается из-за их гибели со скоростью, пропорциональной концентрации $b \cdot c_x$. Уравнение баланса массы микроорганизмов имеет вид

$$V \cdot \frac{dc_x}{dt} = Q_r \cdot c_{xr} - (Q + Q_r) \cdot c_x + V \cdot (\mu \cdot c_x - b \cdot c_x)$$

Загрязнения попадают в аэратор из входного потока и при рециркуляции из отстойника. Поскольку предполагается, что загрязнения растворены, их концентрация одинакова и в аэраторе, и отстойнике. Загрязнения перерабатываются в аэраторе из-за метаболизма микроорганизмов. Соответствующая производительность переработки загрязнений определяется величиной $m \cdot cx/Y$, где переменная $\boldsymbol{Y}$ называется коэффициентом воспроизводства. Тогда уравнение баланса масс загрязнений можно записать в виде

$$V \cdot \frac{ds}{dt} = Q \cdot s_i + Q_r \cdot s - (Q + Q_r) \cdot s - V \cdot \frac{\mu}{Y} \cdot c_x$$

Очевидно, что динамика системы является нелинейной — удельный показатель роста m зависит от концентрации загрязнений, а расход умножается на концентрацию.

9.4. Уравнения сохранения энергии

В некоторых процессах необходимо регулировать температуру. Динамическая модель системы управления температурой должна учитывать тепловые потоки и накопление тепловой энергии. Во многих случаях поток тепла через объект пропорционален разности температур на его границах

$$q = \frac{1}{R} \cdot (T_1 - T_2)$$

где ***q*** — поток тепла, ***R*** — тепловое сопротивление и ***T***— температура.

Перенос тепла часто моделируется как величина, пропорциональная площади поверхности ***A*** и обратно пропорциональная длине пути ***I*** теплового потока

$$\frac{1}{R} = k \cdot \frac{A}{I}$$

где ***k*** - теплопроводность.

Сохранение тепловой энергии можно описать как

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = q$$

где C — теплоемкость, q — алгебраическая сумма входящих и исходящих тепловых потоков.

Пример 9.9 Тепловой баланс жидкости в баке

Тепловой баланс жидкости в баке служит иллюстрацией закона сохранения энергии (рис. 9.12). Температура жидкости ***T*** однородна внутри бака, температура окружающей среды - T_a, теплоемкость бака - C_i. Суммарное тепловое сопротивление верхней и нижней частей — R_1, а боковых стенок — R_2. Нагревательный элемент подводит к жидкости тепловую энергию u_q.

Тепловой баланс

$$C_i \cdot \frac{dT}{dt} = u_q - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot (T - T_a)$$

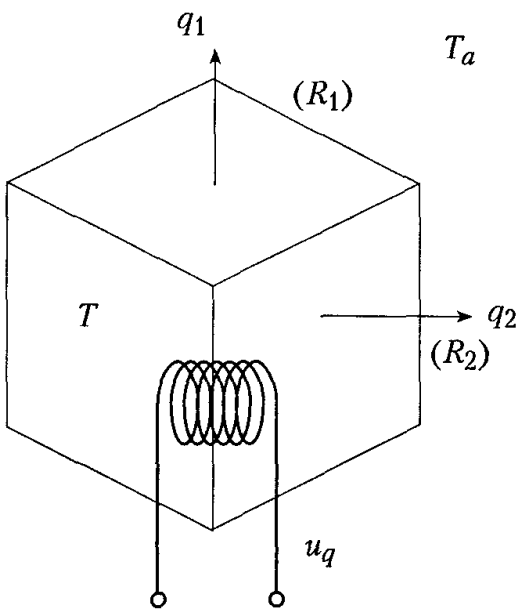


Рисунок 9.12 – Система в состоянии теплового равновесия

Большая разница температур на внутренних и внешних поверхностях стенок будет вызывать быстрые температурные изменения в баке. Чем больше R_1 и R_2 тем медленнее будут изменения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Фатуев В.А., Маркова Т.Н. Математические модели объектов управления: Учебное пособие. Тул. гос. ун-т. - Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. - 119с.

2 Дворецкий С.И., Муромцев Ю.Л., Погонин В.А., Схиртладзе А.Г. Моделирование систем: учебник для вузов. М. : ИЦ "Академия", 2009. - 320с.

3 Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью.- М.: Лаборатория Базовых знаний.- 2001 - 616 с.

4 Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления.- М.: Лаборатория Базовых знаний.- 2002 - 832 с.

5 Густав Олсон, Джангуидо Пиани Цифровые системы автоматизации и управления. Санкт-Петербург, 2001.