МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

"ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ"

Частина 1

Аналіз та синтез лінійних САУ

Для студентів, що навчаються за напрямами
6.050201“Системна інженерія” (СУА)
6.050202“Автоматизація та
комп’ютерно-інтегровані технології” (АУП)
(для денної та заочної форм навчання)

Розглянуто
на засіданні кафедри
автоматики й телекомунікацій
Протокол № 4 від 12.04.2012.

Затверджено на засіданні
навчально-видавничої ради ДонНТУ
Протокол № 2 від 19.04.2012.

Донецьк, ДонНТУ 2012 р.

УДК 62-52 (071)

Конспект лекцій з курсу "Теорія автоматичного управління", частина 1 – Аналіз та синтез лінійних САУ (для студентів, що навчаються по напрямках 6.050201“Системна інженерія” (СУА) і 6.050202“Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології” (АУП) денної й заочної форм) / Укладачі: Р.В. Федюн, В.О.Попов. - Донецьк: ДонНТУ, 2012.- 168 с.

Укладачі: Р.В. Федюн, доц.
В.О. Попов, доц.

Рецензент О.І. Секірін, доц.

Відповідальний за випуск В.Я. Воропаєва, зав. каф.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Теорія автоматичного управління (ТАУ) з'явилася в другій половині 19 століття спочатку як теорія регулювання. Широке застосування парових машин викликало потребу в регуляторах, тобто в спеціальних пристроях, що підтримують стійкий режим роботи парової машини. Це дало початок науковим дослідженням в області керування технічними об'єктами. Виявилось, що результати і висновки даної теорії можуть бути застосовані до управління об'єктами різної природи з різними принципами дії. В даний час сфера її впливу розширилася на аналіз динаміки таких систем, як економічні, соціальні і т. п. Тому колишня назва “Теорія автоматичного регулювання” замінена на ширше - “Теорія автоматичного управління”.

Управління яким-небудь об'єктом (об'єкт керування позначатимемо ОК) є дія на нього в цілях досягнення необхідних станів або процесів. В якості ОК може служити літак, верстат, електродвигун і т. п. Керування об'єктом за допомогою технічних засобів без участі людини називається *автоматичним керуванням*. Сукупність ОК і засобів автоматичного управління називається *системою автоматичного керування (САК)*.

Основним завданням автоматичного керування є підтримка певного закону зміни однієї або декількох фізичних величин, що характеризують процеси, що протікають в ОК, без безпосередньої участі людини. Ці величини називаються *керованими величинами*.

Розглянемо схему взаємодії об'єкту керування (ОК), пристрою керування (ПК) і зовнішнього середовища (рис.1.1).

Фізична величина *y(t)*, яка характеризує стан об'єкту і яку навмисно змінюють або підтримують постійною в процесі керування, називається керованою величиною. Для позначення цього поняття використовують також терміни «керована координата» і «керована змінна». Керованою величиною може служити фізична величина, яка або змінюється (безпосередньо на виході об'єкту), або обчислюється по декількох вимірюваних величинах.

Керована величина є вихідною величиною об'єкту і залежить від двох вхідних дій: збурюючого *f(t)* і керуючого *u(t)*.

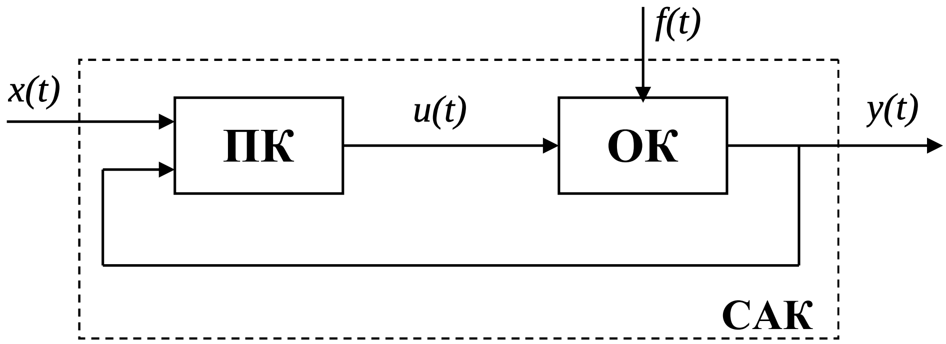


Рисунок 1.1. Структура системи автоматичного керування

Алгоритм управління в загальному випадку виражає залежність керуючого впливу *u(t)* від задаючого впливу *x(t)*, керованої величини *y(t)* і збурюючих факторів *f(t)* і може бути представлений у вигляді:

$$u(t)= Ay[x(t), y(t), f(t)].$$

Вплив *f(t)* і *x(t)* є зовнішніми для даної системи, а дія *u(t)* – внутрішнім.

2. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Прийнято розрізняти три фундаментальні принципи управління: *принцип розімкненого керування*, *принцип компенсації*, *принцип зворотнього зв'язку*.

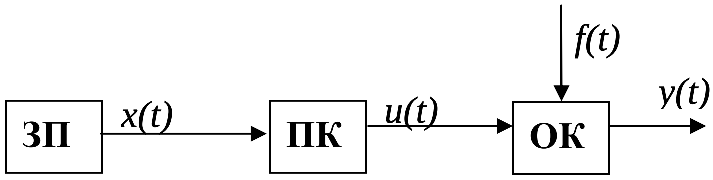


Рисунок 2.1. Принцип розімкненого керування

Розглянуту САК хлібопекарської печі можна відобразити функціональною схемою (рис.2.1). У даній схемі закладений *принцип розімкненого керування*, який полягає в тому, що програма управління чітко задана ЗП; управління не враховує вплив збурень на параметри процесу.

У системах такого типу відсутній контроль керованої величини і збурюючого фактору. Керована величина є функцією тільки від задаючого впливу.

Системи такого типу достатньо ефективні лише за умови, що вплив збурень на керовану величину невеликий і всі елементи розімкненого ланцюга володіють стабільними характеристиками.

Принцип компенсації збурюючого впливу

Якщо збурюючий чинник спотворює вихідну величину до неприпустимих меж, то застосовують *принцип компенсації* (рис.2.2, КП-*коректуючий пристрій*).

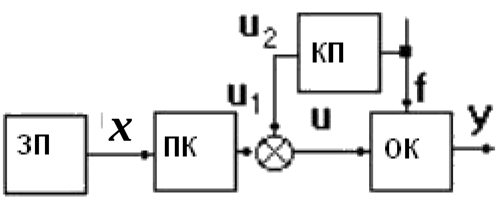


Рисунок 2.2. Принцип компенсації

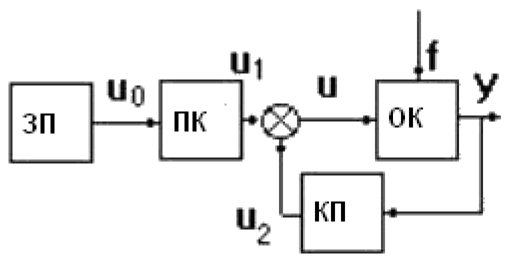
Переваги принципу компенсації:

- швидкість реакції на збурення - вплив збурення компенсується ще до того, як воно виявиться на виході об'єкту;
- він точніший, ніж принцип розімкненого управління;
- не виникає проблема стійкості (розімкнені системи).

Недоліки:

- неможливість обліку так само всіх можливих збурень;
- у цих системах, як і в розімкнених, з'являються відхилення вихідної величини при зміні характеристик ОК;
- такі системи можна створювати тільки тоді, коли збурюючі впливи можна виміряти.

Принцип зворотного зв'язку



Найбільшого поширення в техніці набув *принцип зворотного зв'язку* (рис.2.3).

Рисунок 2.3. Принцип зворотного зв'язку

Керуючий вплив коректується залежно від вихідної величини **y(t)**. І вже не важливо, які обурення діють на ОК. Якщо значення **y(t)** відхиляється від потрібного, то відбувається коректування сигналу **u(t)** з метою зменшення даного відхилення. Зв'язок виходу ОК з його входом називається *головним зворотним зв'язком (ЗЗ)*.

Переваги принципу зворотного зв'язку:

- зменшує відхилення керованої величини незалежно від того, якими чинниками воно було обумовлене (враховують всі обурення, що діють на керовану величину);

- менш чутливий до зміни параметрів елементів системи, порівняно з розімкненими системами.

Недоліки принципу зворотного зв'язку:

- наявність зворотного зв'язку приводить до виникнення коливань в системі, що іноді робить систему непрацездатною;

- виникає проблема стійкості;

- інерційність системи – робота керуючого пристрою починається тільки після того, як збурюючий вплив викличе відхилення керованої величини.

Часто застосовують *комбінацію даного принципу з принципом компенсації*, що дозволяє об'єднати переваги обох принципів: швидкість реакції на збурення принципу компенсації і точність регулювання незалежно від природи збурень принципу зворотного зв'язку.

3. РЕЖИМИ РОБОТИ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ

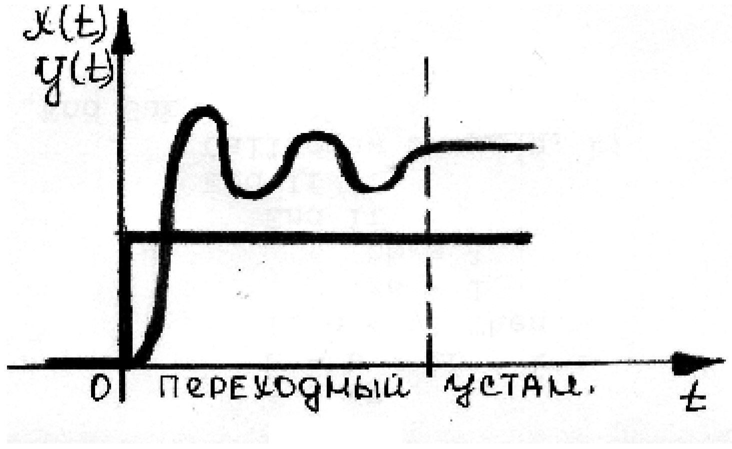
Стан системи характеризується зміною керованої величини в часі. Стан системи і режими переходу залежать як від форми, так і від власних властивостей системи.

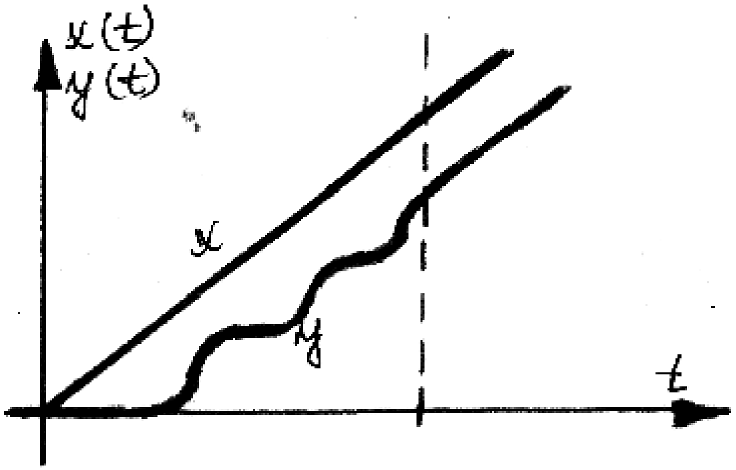
Розрізняють два режими роботи автоматичних систем і їх елементів: статичний і динамічний.

Статичним режимом називають стан системи, при якому керована (вихідна) величина не змінюється в часі, $y(t)=const$. Зрозуміло, що статистичний режим може мати місце лише тоді, коли вхідні впливи постійні в часі. Зв'язок між вхідними і вихідними величинами в статичному режимі описується рівняннями алгебри.

У динамічному режимі роботи системи керована (вихідна) величина безперервно змінюється в часі - $y(t)= var$. Динамічні режими мають місце, коли в системі після нанесення зовнішніх впливів відбуваються процеси встановлення заданого стану або заданої зміни вихідної величини. Ці процеси називаються процесами керування і описуються в загальному випадку диференціальними рівняннями. Динамічні режими розділяються на неусталені і усталені. Неусталені, або перехідні режими мають місце відразу після зміни зовнішніх дій. Вид функції $y(t)$ в перехідному режимі залежить від типу впливу і власних динамічних властивостей системи. Усталений режим роботи наступає після закінчення перехідного процесу, коли вихідна величина системи змінюється в часі по такому ж закону, що і вхідний вплив. Статичний режим є окремим випадком усталеного режиму при $x(t)=const$.

Ці графіки ілюструють різницю між перехідними і усталеними режимами роботи при типових впливах.


x(t)
y(t)
0
переходный
устан.
t


x(t)
y(t)
x
y
t

4. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ЕЛЕМЕНТІВ І СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

4.1.Диференціальні рівняння

Найбільш поширеною формою опису передавальних властивостей автоматичних систем і їх елементів є звичайні диференціальні рівняння. Для елементу, що має один вхідний сигнал *x(t)* і один вихідний сигнал *y(t),* звичайне диференціальне рівняння записується в загальному випадку таким чином:

$$\Phi\left[y(t), y'(t),...., y^{(n)}(t); x(t),...., x^{(m)}(t), t \right] = 0 \qquad (1)$$

Це рівняння зв'язує незалежну функцію *y(t)* і її похіднупохідну $y'(t)...y^{(n)}(t)$ з незалежною змінною *t* відомої (заданої) функції часу *x(t).* Таке рівняння називають рівнянням динаміки або рівнянням руху елементу.

Диференціальне рівняння може бути лінійним і нелінійним. Лінійним воно є в тому випадку, якщо функція **Ф** лінійна по відношенню до всіх її аргументів. Якщо ж змінні y(t), x(t) і їх похідні входять у вираз функції Ф у вигляді перемноження, часних або степенів, то рівняння є нелінійним.

У вираз функції **Ф**, окрім основних змінних, входять постійні величини, які називають параметрами. Числові значення параметрів залежать від конструктивних даних елементу, який описуємо, - мас, індуктивностей, ємкостей і т. д.

Для більшості реальних елементів початкове рівняння (1), складене строго у відповідність із законом фізики, виявляється нелінійним, що значно ускладнює все подальші процедури аналізу. Тому завжди прагнуть перейти до лінійного диференціального рівняння вигляду:

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + ... + a_n y(t) = \\ & = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_m x(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

де $x(t)$ та $y(t)$ вхідна і вихідна величини елементу або системи;

a_i, b_i – коефіцієнти рівняння.

Дане рівняння встановлює зв'язок між вхідною і вихідною величинами як в перехідних, так і в усталених режимах.

Коефіцієнти диференціального рівняння a_i, b_i називаються параметрами. Іноді параметри деяких елементів систем змінюються в часі, причому швидкість їх зміни можна порівняти із швидкістю процесів керування в системі. Таку систему називають нестаціонарною або системою із змінними параметрами.

Якщо при складанні лінійного диференціального рівняння використані статичні характеристики або прийняті допущення про лінійність тих або інших взаємозв'язків, то рівняння справедливе лише для малих відхилень вхідної і вихідної величин від їх значень в статичному режимі:

$$\Delta x = x(t) - x_0, \;\; \Delta y = y(t) - y_0$$

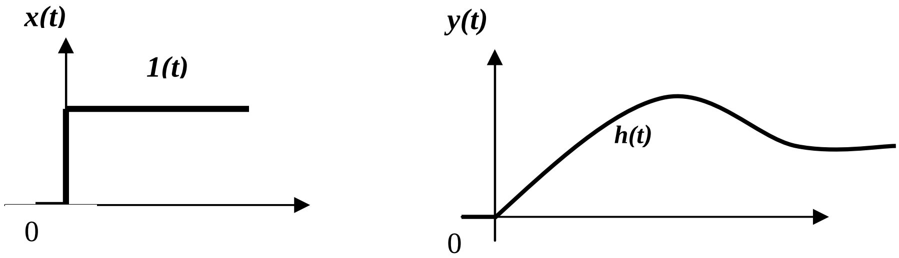
Для САК, що описуються лінійним рівнянням (2) справедливий принцип накладення або принцип суперпозиції, згідно якому зміна вихідної величини $y(t)$, що виникає при дії на систему декількох вхідних сигналів $x_i(t)$, дорівнює сумі змін $y_i(t)$ величини $y(t)$, що викликаються кожним сигналом окремо.

4.2. Часові характеристики

Диференціальне рівняння є найзагальнішою формою опису елементу і не дає наочного уявлення про передавальні властивості елементу. Наочне уявлення про ці властивості дає функція $y(t)$, що є вирішенням диференціального рівняння. Але одне і теж диференціальне рівняння може мати безліч рішень, конкретний вид яких залежить від початкових умов і від характеру функції $x(t)$, тобто від початкового стану елементу і виду зовнішнього впливу. Тому в ТАУ прийнято динамічні властивості елементів і систем характеризувати вирішенням диференціального рівняння, яке відповідає нульовим початковим умовам і одному з типових впливів.

Найбільш наочне уявлення про динамічні властивості елементу дає його перехідна функція (характеристика).

<u>Перехідною функцією</u> ***h(t)*** називають зміну вихідної величини *y(t)* в часі, що виникає після подачі на вхід одиничного стрибкоподібного сигналу при нульових початкових умовах.



Перехідна функція може бути задана графічно або аналітично. Формальний вираз функції *h(t)* для конкретного елементу можна знайти, вирішуючи його диференціальне рівняння при

$x(t) = 1(t)$ та $y(-0) = y'(-0) = y''(-0)\ldots = y^{(n-1)}(-0) = 0$

Ця умова означає, що вихідна величина *y(t)* і її похідні до *(n-1)*-го порядку безпосередньо перед подачею стрибкоподібного сигналу дорівнює нулю.

Перехідна функція *h(t)* має дві складові: вимушену $h_в(t)$ і вільну складову $h_c(t)$.

<u>Вимушена складова</u> $h_в(t)$ перехідного процесу є приватним вирішенням початкового рівняння. При стрибкоподібному впливі вимушена складова дорівнює усталеному значенню вихідної величини, яке може бути визначене з диференціального рівняння:

$$h_в(t) = y(\infty) = \frac{b_m}{a_n}$$

<u>Вільна складова</u> $h_c(t)$ може бути знайдена як вирішення відповідного однорідного диференціального рівняння у вигляді:

$$h_c(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}$$

де p_k - коріння характеристичного рівняння

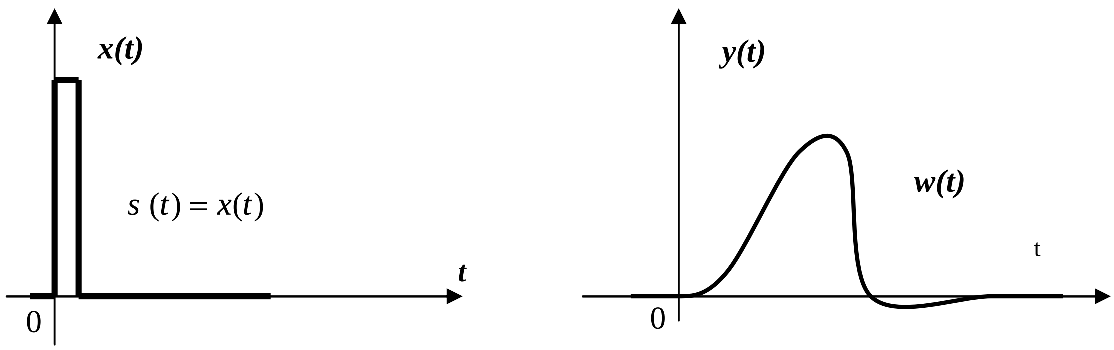
C_k – постійні інтеграції, залежні від початкових умов.

Характеристичним рівнянням даного диференціального рівняння є рівняння алгебри, ступінь і коефіцієнти якого співпадають з порядком і коефіцієнтами лівої частини цього диференціального рівняння. Для диференціального рівняння (2) характеристичне рівняння має вигляд:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Для лінійних систем діє наступне загальне правило: реакція *y(t)* на неодиничний стрибкоподібний сигнал *a*1(t)* дорівнює перемноженню перехідної функції *h(t)* на величину множника *a*, тобто *y(t)= ah(t)*.

Імпульсною перехідною функцією ***w(t)*** називають зміну вихідної величини *y(t)*, що виникає після передачі на вхід дельта-функції, за нульових початкових умов.



Якщо вхідним впливом є неодиничний імпульс *a*, тоді ординати функції вихідної величини *y(t)*, будуть в *a* раз більше ординат функції *w(t)*, тобто *y(t)= aw(t)*.

Між перехідною і імпульсною перехідною функціями *h(t)* і *w(t)* існує наступний взаємозв'язок:

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}, \qquad h(t)=\int_0^t w(t)\,dt\,.$$

За допомогою імпульсної перехідної функції елемента можна визначити її реакцію на вхідний вплив довільного вигляду. Зв'язок між змінами вхідної і вихідної величин в часі встановлюється інтегралом згортки:

$$y(t) = \int_0^\infty x(t)w(t-t)w(t)dt = \int_0^\infty x(t-t)w(t)dt .$$

Друга поширена назва функції *w(t)* - вагова. Дійсно, ця функція визначає вагу (частку), з якою кожен вхідний імпульс, отриманий при розкладанні сигналу *x(t),* бере участь у формуванні результуючого вихідного сигналу *y(t)*.

4.3. Операторний метод. Передавальна функція.

Найбільш поширеним методом опису автоматичних систем є операторний метод (метод операційного числення). У основі методу лежить перетворення Лапласа:

$$x(p) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}\,dt ,$$

яке встановлює відповідність між функціями дійсної змінної t і функціями комплексного змінного p. Функцію часу *x(t),* що входить в інтеграл Лапласа називають оригіналом, а результат інтеграції - функцію *x(p)* - зображенням функції *x(t)* по Лапласу.

Перетворення Лапласа здійснюється лише для таких функцій часу, які дорівнюють нулю при $t < 0$. Ця умова забезпечується зазвичай множенням функції *x(t)* на одиничну стрибкоподібну функцію *1(t)*. З математичної і фізичної точок зору такий штучний прийом коректний, оскільки функції *x(t)* описують процеси в автоматичних системах, що починаються з деякого моменту часу, а цей момент часу завжди можна вважати початком відліку.

Для знаходження зображень по Лапласу різних функцій існую довідкові таблиці.

Основні властивості перетворення Лапласа приведені в таблиці.

Властивість	Оригінал	Зображення
Лінійність	$ax(t)$ $x_1(t) \pm x_2(t)$	$aX(p)$ $X_1(p) \pm X_2(p)$
Правило диференціювання (за нульових початкових умов)	$\dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$	$X(p)*p^k$
Правило інтеграції (за нульових початкових умов)	$\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{k-раз} x(t)dt^k$	$\dfrac{X(p)}{p^k}$
Зміна масштабу часу (теорема подібності)	$x(\dfrac{t}{T_m})$	$X(pT_m)*T_m$
Зсув аргументу оригіналу (теорема запізнювання)	$x(t-t)$	$X(p)e^{-pt}$
Теорема про початкове значення оригіналу	$\lim\limits_{t \to 0} x(t)$	$\lim\limits_{p \to \infty} pX(p)$
Теорема про кінцеве значення оригіналу	$\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$	$\lim\limits_{p \to 0} pX(p)$

Найбільш важливими властивостями перетворення Лапласа є наступні правила:

при нульових початкових умовах диференціюванню оригіналу $x(t)$ по змінною t відповідає перемноження зображення $X(p)$ на комплексну змінну p, а інтеграції оригіналу відповідає ділення $X(p)$ на p.

Широке розповсюдження операційного методу в ТАУ обумовлене тим, що з його допомогою визначають передавальну функцію, яка є найкомпактнішою формою опису динамічних властивостей елементів і систем.

Застосуємо перетворення Лапласа до лінійного диференціального рівняння (2), вважаючи, що до застосування зовнішнього впливу система знаходилася у спокої і всі початкові умови дорівнюють нулю. Використовуючи властивість лінійності і правило диференціювання, можна отримати рівняння алгебри в зображеннях:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots a_n)Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m)X(p).$$

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p) \qquad (3)$$

де $D(p) = a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ – власний оператор

$K(p) = b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m$ – вхідний оператор

Рівняння (3) отримане із рівняння (1) з використанням наступної заміни оригіналів зображеннями:

$$\frac{d^k}{dt^k} \to p^k, \quad y(t)=Y(p), \quad x(t)=X(p)$$

Передавальною функцією W(p) називають відношення зображення по Лапласу вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах

$$W(p) = \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Для системи, що описується рівнянням (2), передавальна функція є деяким динамічним оператором, що характеризує проходження сигналів через лінійний елемент і незалежний від виду вхідного впливу $x(t)$, і характеризує лише власні динамічні властивості описуваного елементу або системи.

Передавальну функцію формально можна отримати з диференціального рівняння шляхом заміни в ньому символу кратного диференціювання на відповідний степінь p і ділення утвореного таким чином багаточлена правої частини рівняння на багаточлен лівої частини.

Основні властивості і особливості передавальної функції САУ.

1. Передавальна функція встановлює зв'язок між вхідною і вихідною величиною, як в динамічному, так і в статичному режимах.
2. Передавальна функція реальних елементів - правильний раціональний дріб, у якого ступінь багаточлена чисельника менше або дорівнює ступеню багаточлена знаменника.

3. Всі коефіцієнти передавальної функції - дійсні числа, що характеризують параметри елементу або системи.

4. Передавальна функція є функцією комплексної змінної яка при деяких значеннях змінної p може звертатися в нуль або нескінченність. Значення змінної p, при якому функція $\boldsymbol{W(p)}$ звертається в нуль, називають нулем, а при якому звертається в нескінченність - полюсом передавальної функції. Нулі передавальної функції - корені полінома $K(p)$, полюси - корені полінома $D(p)$. Корені поліномів чисельника і знаменника можуть бути комплексним, уявними і дійсними. Якщо ці корені відомі, то передавальна функція може бути представлена у вигляді:

$$W(p)=\frac{b_0(p-g_1)(p-g_2)...(p-g_m)}{a_0(p-l_1)(p-l_2)...(p-l_n)},$$

де g_i - корені багаточлена $K(p)$ (нулі $\boldsymbol{W(p)}$);

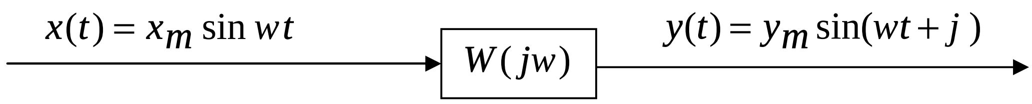
l_i - корені багаточлена $D(p)$ (полюса $\boldsymbol{W(p)}$).

5. Передавальна функція елементу пов'язана з його імпульсною перехідною функцією перетворенням Лапласа:

$$W(p)=\int_0^{\infty} w(t)e^{-pt}dt.$$

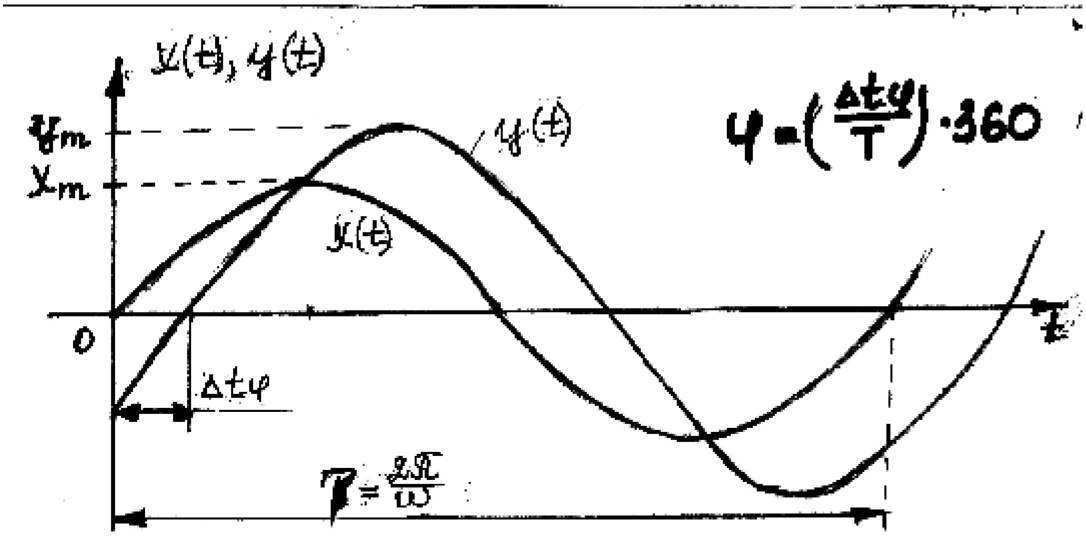
4.4.Частотні характеристики

Частотні характеристики описують передавальні властивості елементів і системи в режимі усталених гармонійних коливань, викликаних зовнішнім гармонійним впливом. Частотні характеристики широко використовуються в теорії і практиці автоматичного керування, оскільки реальні збурення, що діють на САК, можуть бути представлені як сума гармонійних сигналів.



Для исследования частотных свойств системы и получения ее частотных характеристик на вход системы подают гармоническое воздействие определенной частоты w и амплитуды X_m:

$$x(t) = x_m \sin wt$$



Після закінчення перехідного процесу елемент увійде до режиму усталених вимушених коливань, а вихідна величина *y(t)* змінюватиметься по гармонійному закону з тією ж частотою w, але з іншою амплітудою y_m, і зі зсувом Δt_j по осі часу:

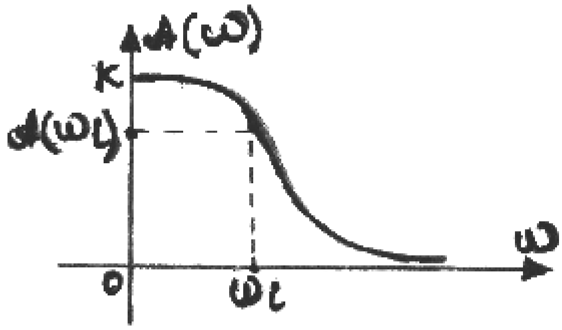
$$y(t) = y_m \sin(wt + j)$$

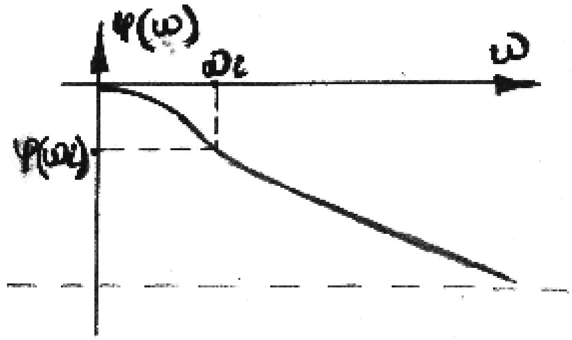
де $j = (\Delta t_j \, / T) * 360$ - фазове зсув між вхідним і вихідним сигналами.

Повторюючи такий експеримент при фіксованому X_m для різних значень частоти (від 0 до ∞), можна встановити, що амплітуда y_m і фазовий зсув j вихідного сигналу елемента залежать від частоти впливу. Подаючи гармонійний вплив на вхід різних елементів, можна переконатися, що величини y_m і j залежать також від типу і параметрів елементу. Отже, залежності амплітуди y_m і зсуву j від значень частоти w можуть служити характеристиками динамічних властивостей елементів.

Залежність відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів від частоти називають амплітудною частотною характеристикою (скорочено - АЧХ) і позначають ***A(w)***.

Залежність фазового зсуву між вхідним і вихідним сигналами від частоти називають фазовою частотною характеристикою (скорочено - ФЧХ) і позначають *j (w)*.





АЧХ показує, як елемент пропускає сигнали різної частоти. Оцінка пропускання проводиться по відношенню амплітуд y_m/x_m. ФЧХ показує, яке відставання або випередження вихідного сигналу по фазі створює елемент на різних частотах.

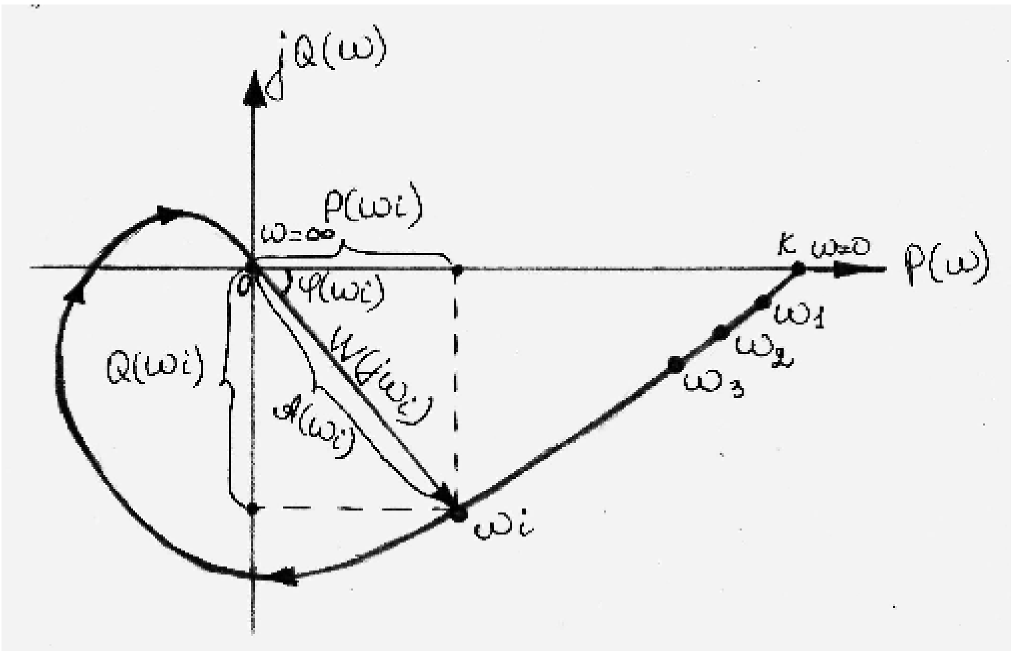
Амплітудну і фазову частотну характеристику можна об'єднати в одну загальну - амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ або АФХ). АФЧХ ***W(jw)*** є функцією комплексної змінної ***j****w*, модуль якої дорівнює ***A(w)***, а аргумент рівний *j (w)*. Кожному фіксованому значенню частоти w_i відповідає комплексне число ***W(jw$_i$)***, яке на комплексній площині можна зобразити вектором, що має довжину ***A(w$_i$)*** і кут повороту *j (w $_i$)*.

При зміні частоти від нуля до нескінченості вектор ***W(jw)*** повертається навколо початку координат, при цьому одночасно збільшується або зменшується довжина вектора. Кожній точці характеристики відповідає певне значення частоти.

Проекції вектора ***W(jw)*** на дійсну і уявну осі називають відповідно дійсною ***P(w)*** і уявною ***Q(w)*** частотними характеристиками.

$$P(w) = \mathrm{Re}W(jw) \qquad Q(w) = \mathrm{Im}W(jw)$$

Дійсна частотна характеристика ***P(w)*** - завжди парна функція частоти, уявна ***Q(w)*** - завжди непарна функція.



Аналітичний вираз для АФЧХ можна отримати з передавальної функції шляхом підстановки $p = jw$:

$$W(jw) = W(p)\big|_{p=jw}$$

АФЧХ *W(jw)* може бути представлена:

– в показовій формі $\boldsymbol{W(jw) = A(w)e^{jj(w)}}$

– в алгебраїчній $\boldsymbol{W(jw) = P(w) + jQ(w)}$

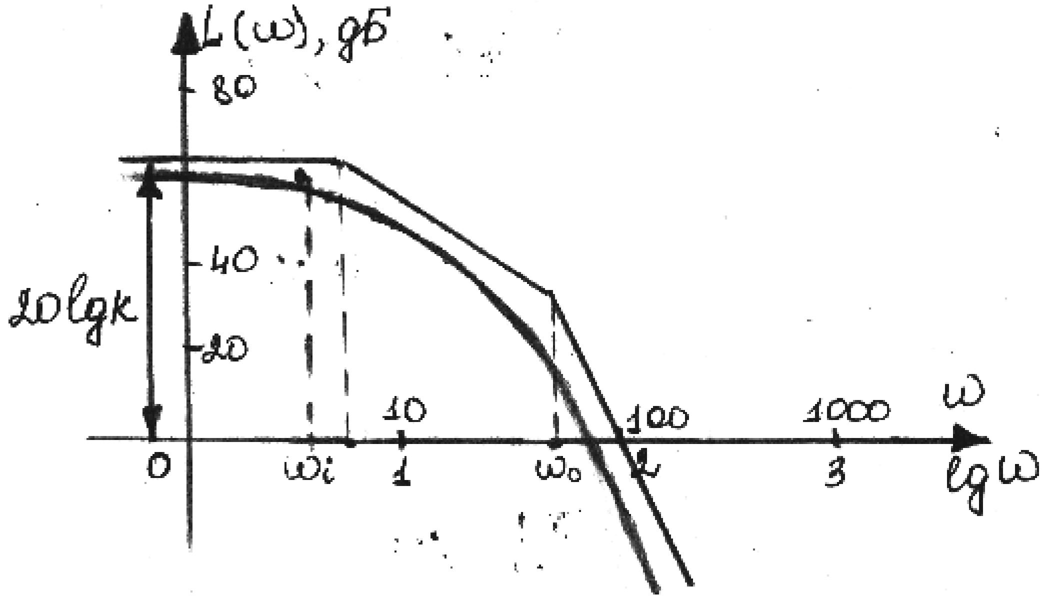
– у тригонометричній $W(jw) = A(w)\cos j(w) + jA(w)\sin j(w)$

Зв'язок між різними частотними характеристиками:

$$A(w) = |W(jw)| = \sqrt{P^2(w) + Q^2(w)}$$

$$j(w) = \arg W(jw) = arctg\left(\frac{Q(w)}{P(w)}\right).$$

При практичних розрахунках САК зручно використовувати частотні характеристики, побудовані в логарифмічній системі координат. Такі характеристики називають логарифмічними. Вони мають меншу кривизну і тому можуть бути наближено, замінені ламаними лініями, складеними з декількох прямолінійних відрізків. До того ж, ці відрізки в більшості випадків вдається побудувати без громіздких обчислень за допомогою деяких простих правил. Крім того, в логарифмічній системі координат легко знаходити характеристики різних з'єднань елементів, оскільки множенню і діленню звичайних характеристик відповідає складання і віднімання ординат логарифмічних характеристик.



За одиницю довжини по осі частоти логарифмічних характеристик принимають декаду. Декада - інтервал частот, ув'язнений між довільним значенням w_i і його десятиразовим значенням $\boldsymbol{10*w_i}$. Відрізок логарифмічної осі частот, що відповідає одній декаді, дорівнює 1.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ЛАЧХ:

$$\boldsymbol{L(w) = 20lgA(w).}$$

Ординати ЛАЧХ вимірюються в белах (Б) або децибелах (дБ).

Бел - одиниця вимірювання відношення потужностей двох сигналів.

Якщо потужність одного сигналу більше (менше) потужності іншого сигналу в 10 разів, то ці потужності відрізняються на 1 Б. Оскільки потужність гармонійного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, то при застосуванні цієї одиниці для вимірювання відношення амплітуд перед логарифмом з'являється множник 2.

5. ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ БЕЗПЕРЕРВНИХ САУ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Чим докладніше математична модель САК, тим вище порядок n її диференціального рівняння. Передавальні функції систем високого порядку (зазвичай $n > 4$) виявляються громіздкими і незручними для аналізу. Щоб вийти з цього положення, передавальну функцію представляють у вигляді перемноження простих співмножників, порядок яких не перевищує два. Такі співмножники називають *типовими ланками*.

5.1. Безінерційна ланка

Безінерційна (статична) ланка є найпростішою серед всіх типових ланок. Вона передає сигнал з входу на вихід миттєво, без спотворення його форми. У ланці може відбуватися тільки посилення або послаблення вхідного сигналу.

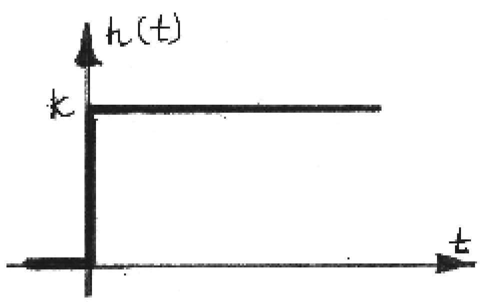
Зв'язок між миттєвими значеннями вхідної величини $x(t)$ і вихідної величини $y(t)$ описується рівнянням алгебри:

$$y(t) = kx(t).$$

Передавальні властивості ланки визначаються лише одним параметром - коефіцієнтом передачі k.

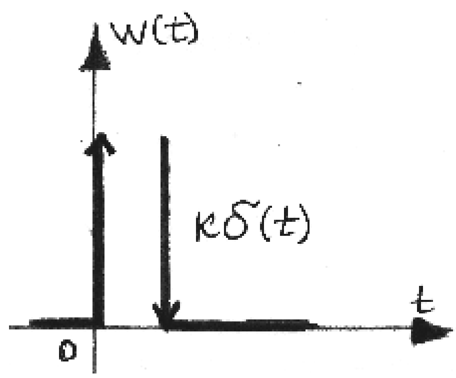
Перехідна функція

$h(t) = k1(t)$



Імпульсна перехідна функція

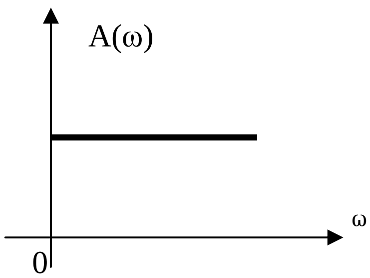
$w(t) = kd(t)$

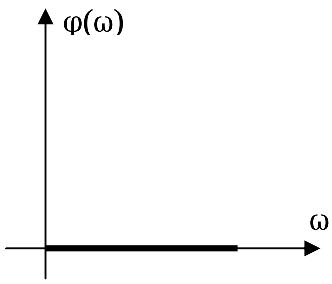


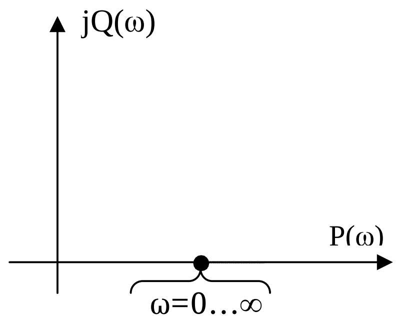
Рівняння ланки в операційній формі $Y(p) = kX(p)$

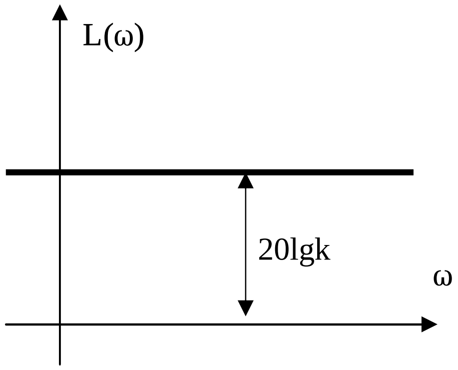
Передаточна функція $$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = k$$

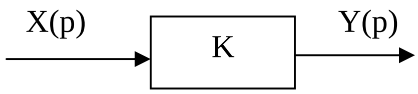
$A(w) = |W(jw)| = k$ $j\,(w) = arctg(0/R) = 0$ $W(jw) = k$











$L(w) = 20\ lg\ A(w) = 20\ lg\ k$

АЧХ і ФЧХ безінерційної ланки показують, що сигнали будь-якої частоти (0; +∞) проходять через ланку з однаковим відношенням амплітуд вихідної і вхідної величини, рівним k і не мають між собою фазового зсуву.

Прикладами безінерційних ланок є редуктор, датчик потенціометра кутового переміщення, тахогенератор, який використовують як датчик частоти обертання і т. д. Пропорційними ланками моделюються підсилювачі, редуктори, дільники напруги і т. п.

Слід зазначити, що поняття безінерційної ланки є продуктом математичної ідеалізації. Насправді всі реальні конструктивні елементи САК володіють деякою інерційністю, оскільки передача енергії з входу на вихід елементу не може здійснюватися миттєво. Проте, якщо інерційність того або іншого елементу на два-три порядки менша, ніж у решти елементів даної системи, то його вважають безінерційною ланкою.

5.2. Інерційна ланка першого порядку (аперіодична ланка)

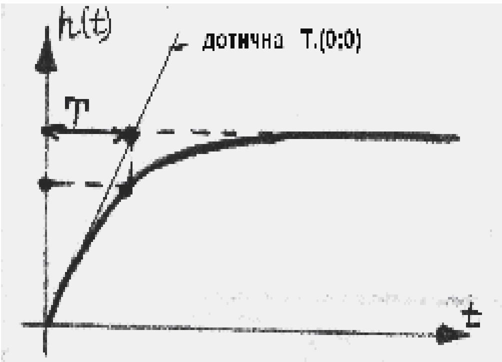
Фізично аперіодична ланка містить один елемент, що накопичує енергію, а також один або декілька елементів здатних її розсіювати.

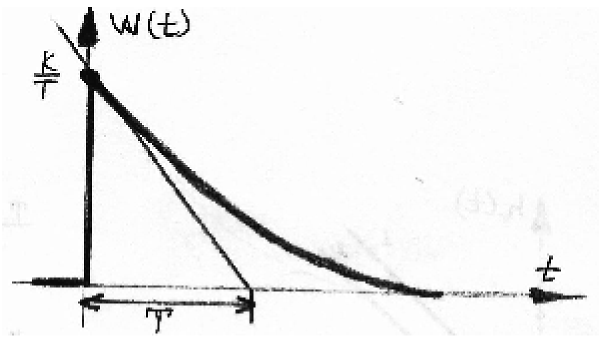
Диференціальне рівняння:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

k – коефіцієнт передачі, характеризує властивості ланки в статичному режимі.

T – постійна часу, характеризує інерційність ланки





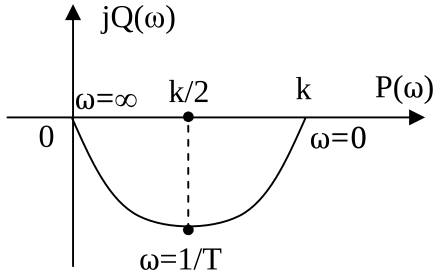
$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t) \qquad w(t) = \frac{k}{T}e^{-t/T}1(t)$$

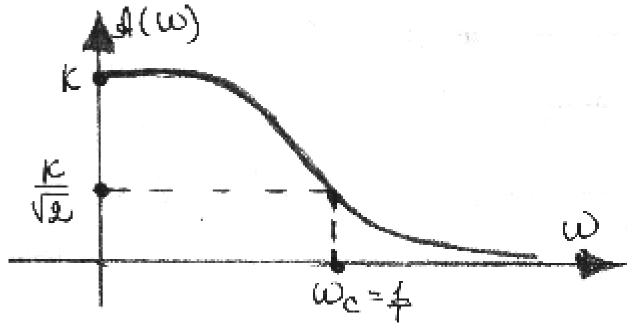
Коефіцієнт посилення ланки визначає рівень, до якого прагне перехідна характеристика з часом. Дотична, проведена на початку координат до перехідної характеристики, перетинає цей рівень у момент часу, рівний постійної часу аперіодичної ланки Т. Ці властивості аперіодичної ланки, а також те, що перехідний процес закінчується приблизно за час, що дорівнює 3Т, дозволяє визначати параметри ланки (коефіцієнт посилення і постійну часу) по його експериментальній перехідній характеристиці.

Рівняння ланки в операторній формі $(Tp+1)Y(p) = kX(p)$

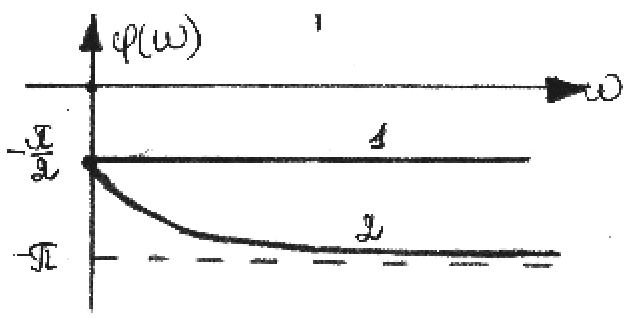
Передаточна функція $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp+1}$

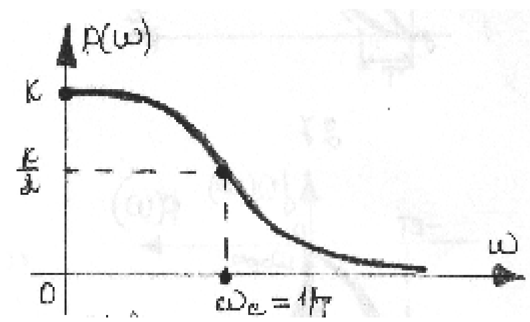
АФЧХ: $W(jw) = \frac{k}{1 + jwT}$ АЧХ: $A(w) = \frac{k}{\sqrt{1 + w^2T^2}}$





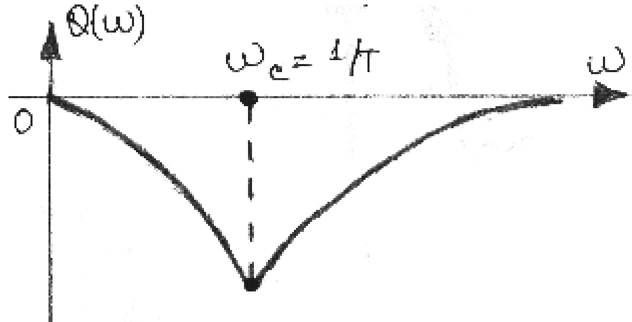
Аналізуючи графік функції $A(w)$, видно, що гармонійні сигнали малої частоти $(w < w_C)$ пропускаються ланкою добре - з відношенням амплітуд вихідної і вхідної величин, близьким до передавального коефіцієнта *k*. Сигнали великої частоти $(w > w_c)$ погано пропускаються ланкою: відношення амплітуд істотно менше коефіцієнта *k*. Чим більше постійна часу *T*, тобто чим більше інерційність ланки, тим менше АЧХ витягнута уздовж осі частот, або, як прийнято говорити в ТАУ, тим вужче смуга пропускання частот. Таким чином, інерційна ланка першого порядку по своїх частотних властивостях є *фільтром низької частоти*.

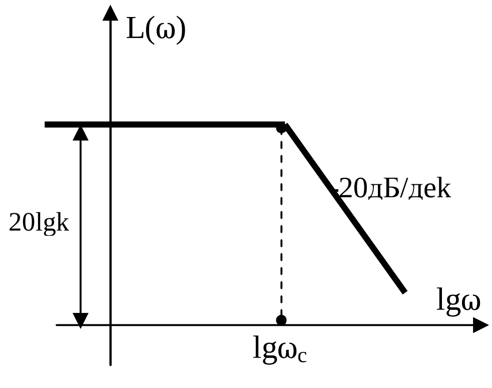




ФЧХ: $j(w) = -arctgwT$

ВЧХ: $P(w) = \dfrac{k}{1 + w^2T^2}$





МЧХ: $Q(w) = -\dfrac{kwT}{1 + w^2T^2}$

ЛАЧХ:

$L(w) = 20\lg A(w) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 + T^2w^2}$

У практичних розрахунках використовують наближену або асимптотичну характеристику $L(w)$, яка є ламана у вигляді двох асимптот.

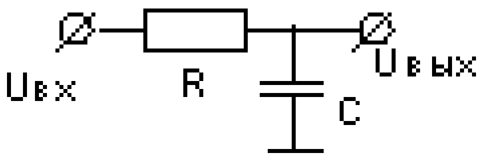
Першу асимптоту (низькочастотна) маємо при низьких частотах, коли величиною T^2w^2 у виразі $L(w)$ можна нехтувати і прийняти, що $L(w) \approx L_{НЧ}(w) = 20\lg k$. Низькочастотна асимптота від частоти не залежить і є прямою, паралельною осі частот і віддалену від неї на відстані $20\lg k$.

Друга асимптота (високочастотна) замінює точну характеристику при великих частотах, коли $T^2w^2 >> 1$, і одиницю під коренем у виразі $L(w)$ можна не враховувати. Вираз для цієї асимптоти має вигляд: $L(w) \approx L_{ВЧ}(w) = 20\lg k - 20\lg Tw$.

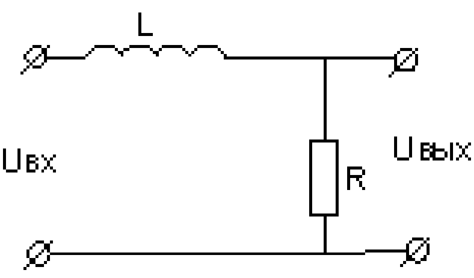
Ця асимптота залежить від частоти. У логарифмічній системі координат вона є прямою, що має негативний нахил і що проходить через точку з координатами $w = T^{-1}$, $L(w) = 20\lg k$. Приріст високочастотної асимптоти, що приходить на одну декаду, рівний -20 дб.

Значення *сполучної частоти* w_C при якій перетинаються обидві асимптоти, знайдемо з умови $L_{НЧ}(w_C) = L_{ВЧ}(w_C)$, звідки $w_C = 1/T$.

Інерційними ланками першого порядку є конструктивні елементи, які можуть накопичувати і передавати енергію або речовину. У електричних елементах накопичувачем енергії електричного поля служить конденсатор, а магнітного поля - індуктивність. У механічних елементах потенційна енергія накопичується в пружинах і інших пружних елементах, а кінетична - в рухомих масах.



$k = 1$ $T = RC$



$k = 1$ T = L/R

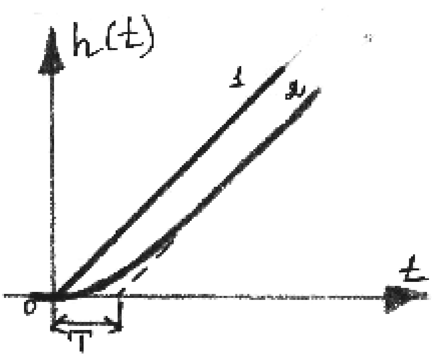
5.3. Інтегруючі ланки

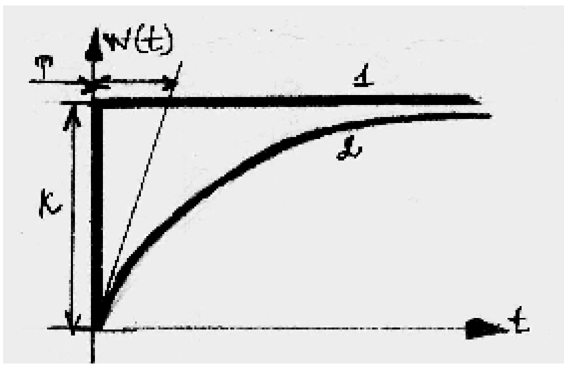
Розрізняють два види інтегруючих ланок: ідеальні і реальні. Загальною особливістю інтегруючих ланок є пропорційність похідної вихідної величини миттєвому значенню вхідної величини. Причому, у ідеальної інтегруючої ланки пропорційність існує у будь-який момент часу після подачі стрибкоподібного сигналу, а у реального - тільки після завершення перехідного процесу.

(1) Ідеальна інтегруюча ланка: $\dfrac{dy(t)}{dt} = kx(t)$, $k = \dfrac{1}{T}$, T – постійна часу ідеального інтегратора.

(2) Реальна інтегруюча ланка: $T\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} = kx(t)$

- ПФ ідеальне: $W(p) = \dfrac{k}{p}$, реальне $W(p) = \dfrac{k}{Tp^2 + p} = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$

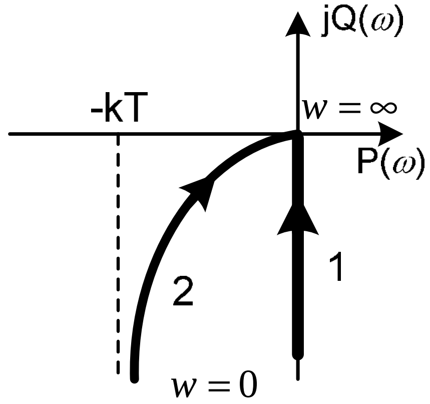




ідеальне (1) $h(t) = kt1(t)$ $w(t) = kt1(t)$

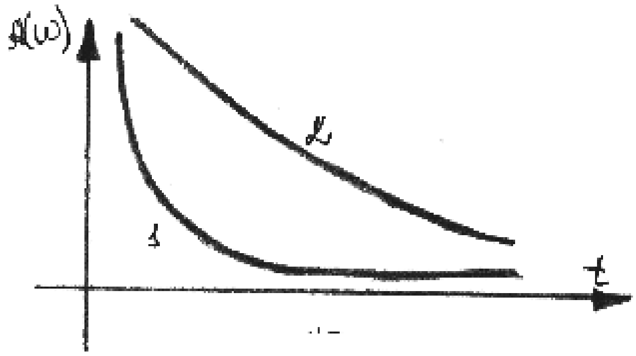
реальне (2) $h(t) = k\left[t - T(1 - e^{-t/T})\right]1(t)$ $w(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t)$

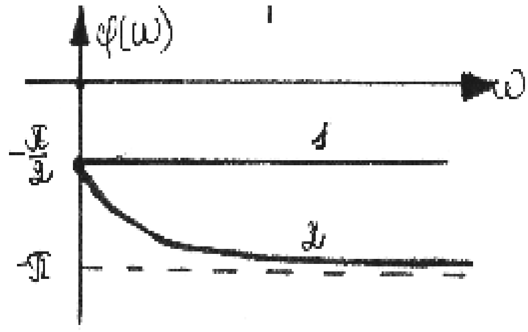
Перехідна функція ідеального інтегратора лінійно зростає з часом. Швидкість росту зворотно пропорційна постійною часу інтегратора. Вихідний сигнал інтегратора досягає рівня стрибкоподібної функції за час, що дорівнює постійній часу Т інтегратора.



(1) $W(jw) = -j\dfrac{k}{w}$

(2) $W(jw) = \dfrac{k}{jw(jTw+1)}$



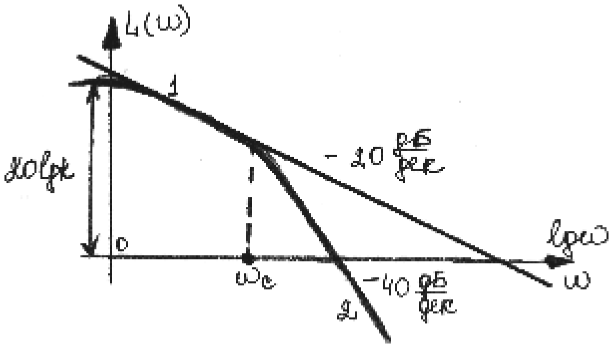


(1) $A(w) = \dfrac{k}{w}$

(2) $A(w) = \dfrac{k}{w\sqrt{T^2w^2+1}}$

(1) $j\,(w) = -\dfrac{p}{2}$

(2) $j\,(w) = -\dfrac{p}{2} - arctgwT$



(1) $L(w) = 20\lg k - 20\lg w$

(2) $L(w) = 20\lg k - 20\lg w - 20\lg\sqrt{1+T^2w^2}$

Інтегруючі властивості властиві всім об'єктам керування, в яких відбувається накопичення речовини або енергії без її одночасної віддачі в навколишнє середовище. Класичним прикладом об'єкту з інтегруючими властивостями є резервуар з рідиною (рис. 3.13, *а),* якщо в якості вхідної змінної розглядати подачу рідини Q (м3/с), а вихідної - рівень рідини *h (м).*

Інтегруючими ланками є також різні виконавчі двигуни і механізми - пристрої, які переміщають регулюючі органи (шибери, заслінки, вентилі і т. д.).

Загальні властивості і особливості інтегруючих ланок:

1. Після подачі стрибкоподібного вхідного впливу $x(t) = x_0 1(t)$ вихідна змінна *y(t)* необмежено зростає і після закінчення перехідного процесу змінюється по лінійному закону $y(t) = kx_0 t$.

При знятті вхідного впливу вихідна змінна зберігає досягнуте значення, тому інтегруючі ланки можна використовувати як елементи, що запам'ятовують (елементів з пам'яттю).

2. У передавальну функцію обов'язково входить співмножник 1/р, тому $W(p)|_{p=0} \neq k$, а $W(0) = \infty$.

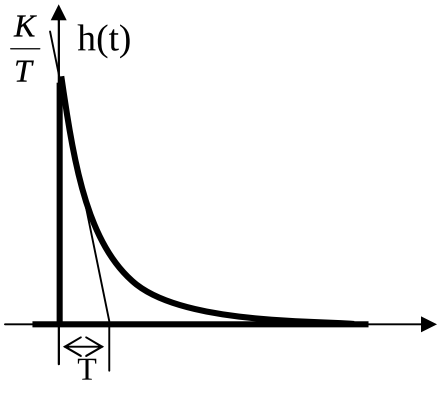
3. Інтегруючі ланки, є фільтрами низької частоти; у режимі гармонійного коливання вони вносять від’ємні фазові зсуви.

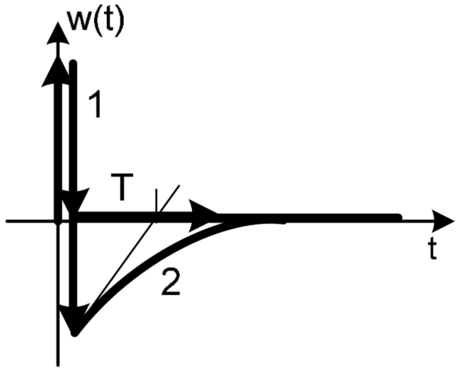
5.4. Диференцюючі ланки

Бувають ідеальними (безінерційними) і реальними (інерційними). Миттєве значення вихідної величини ідеальної диференціальної ланки пропорційне в кожен момент часу першої похідної від вхідної величини:

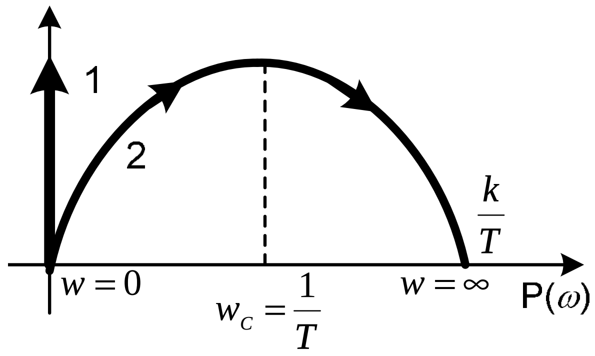
$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt} \qquad T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\frac{dX(t)}{dt}$$

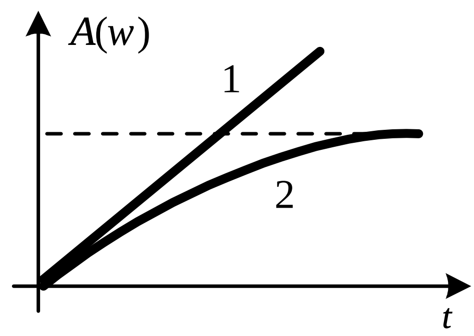
$$W(p) = kp; \qquad W(p) = \frac{kp}{Tp+1}$$





1) $h(t) = kd(t)$ $\qquad$ $w(t) = k\frac{dd(t)}{dt}$



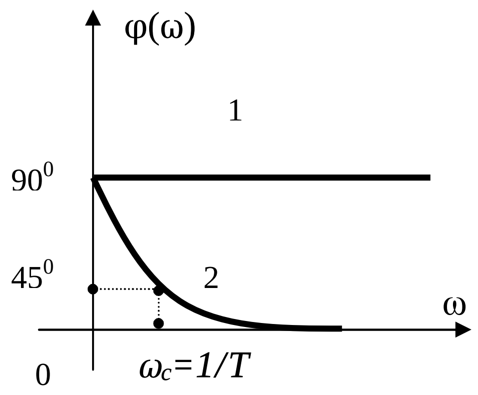


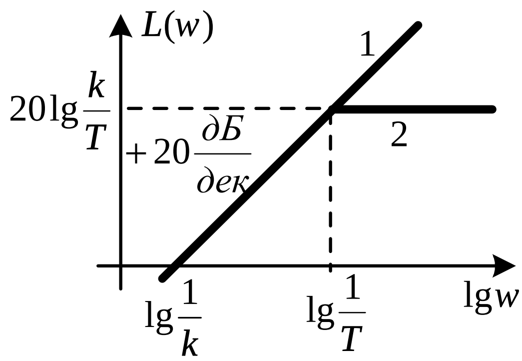
1) $W(jw) = kjw$

2) $W(jw) = \dfrac{kjw}{1+T^2w^2}$

1) $A(w) = kw$

2) $A(w) = \dfrac{kw}{\sqrt{1+T^2w^2}}$





1) $j(w) = +p$

2) $j(w) = +p - arctgwT$

$L(w) = 20\lg kw$

$L(w) = 20\lg kw - 20\lg\sqrt{1+T^2w^2}$

<u>Загальні властивості і особливості диференцюючих ланок:</u>

1. При подачі на вхід ланки стрибкоподібного впливу на його виході виникає великий короткочасний імпульс, а потім після закінчення перехідного процесу вихідна змінна стає рівною нулю. Якщо вхідний сигнал не змінюється в часі, то вихідний дорівнює нулю.
2. У передавальну функцію завжди входить співмножник *p*, тому $W(p)|_{p=0}=0$, і диференцюючі ланки в статиці не передають вхідні сигнали.
3. Диференцюючі ланки є фільтрами високої частоти, тобто добре пропускають високочастотні сигнали і погано - низькочастотні.

5.5. Інерційні ланки другого порядку.

Бувають коливальними або аперіодичними другого порядку. Тип інерційної ланки другого порядку визначається видом коренів характеристичного рівняння.

Коливальна ланка

Фізично коливальна ланка містить два елементи, здатних накопичувати енергію різного вигляду (кінетичну і потенційну, електричну і магнітну), а також один або декілька елементів здатних розсіювати енергію.

Диференціальне рівняння ланки: $T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2xT \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$

Для коливної ланки: $T_1 < 2T_2$.

Передавальна функція: $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2xTp + 1}$

$T = T_2$ – постійна часу, що характеризує інерційність ланки.

$x = {T_1}/{2T_2}$ - декремент згасання, що характеризує коливальність ланки:

0 £ x £ 1.

Відмітною особливістю коливаної ланки є те, що вона міняє не тільки свої властивості, але і назву залежно від величини коефіцієнта згасання:

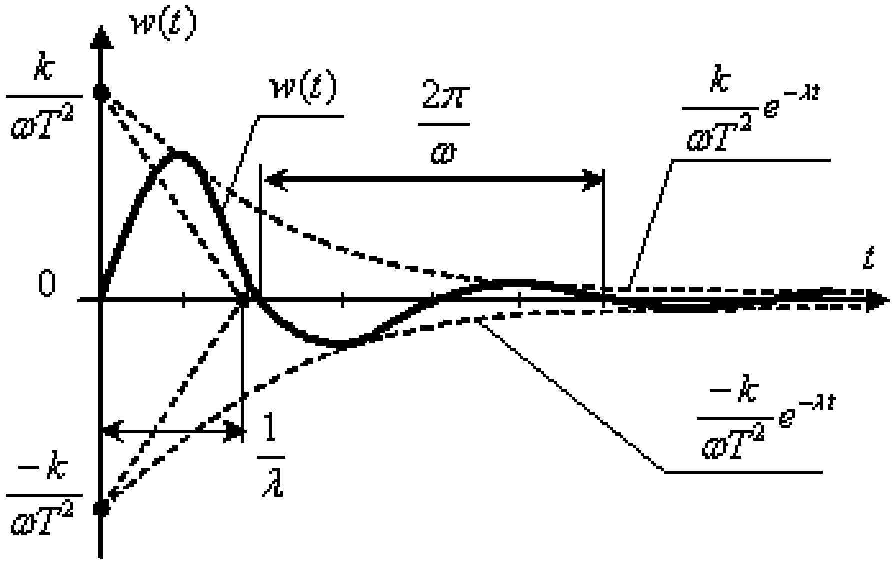
· якщо $0 < \xi < 1$ - ланку називають коливальною, оскільки її часові характеристики носять коливальний характер;

· якщо $\xi \geq 1$ - ланку називають інерційною (аперіодичною) ланкою другого порядку, оскільки її часові характеристики носять монотонний характер, тобто коливання відсутні;

· якщо $\xi = 0$ - ланку називають консервативною, оскільки її часові характеристики мають вид незгасаючих коливань, говорять, ланка консервує коливання.

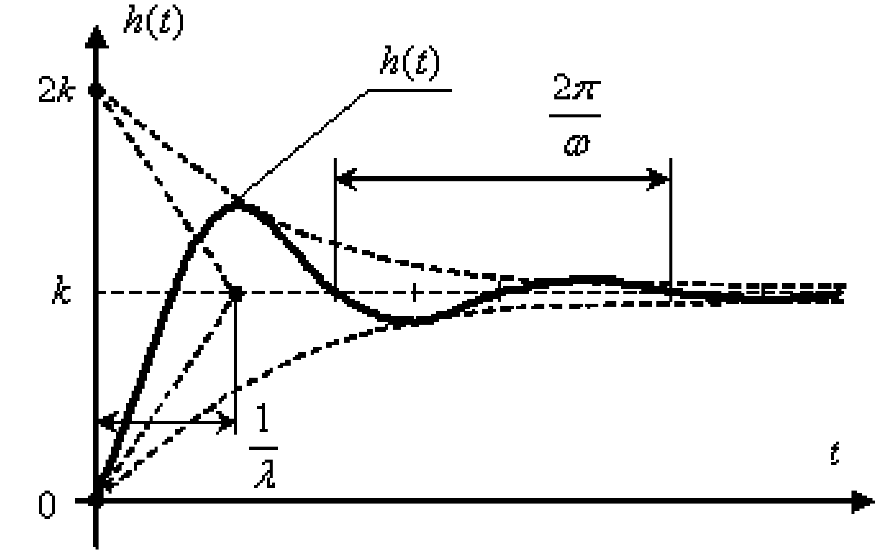
Імпульсна характеристика

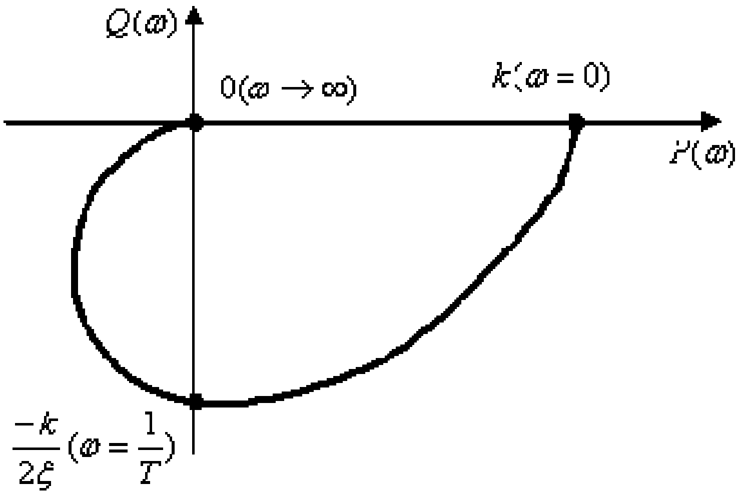
$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\} = \frac{k}{\omega T^2} L^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\right\} = \frac{k}{\omega T^2} e^{-\lambda t}\sin\ \omega t.$$



Перехідна характеристика коливальної ланки

$$h(t) = k(1-e^{-\lambda t}(\cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega}\sin \omega t)).$$

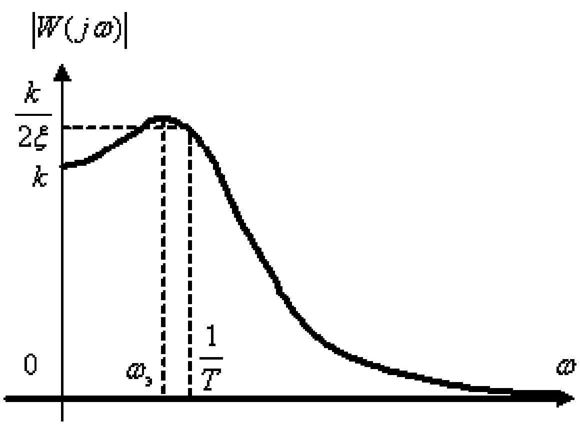


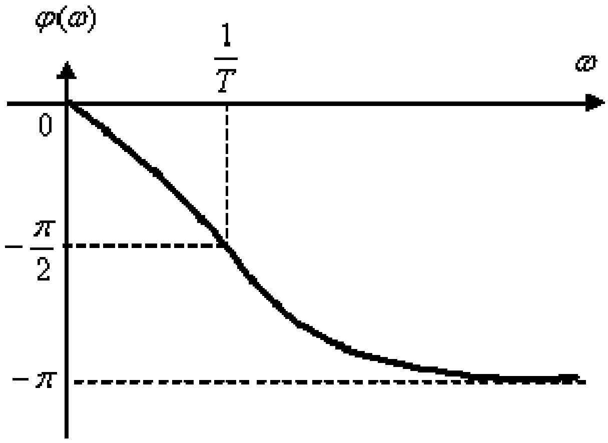


$$W(j\omega) = \left[W(s)\right]_{s=j\omega} = \frac{k}{(1-T^2\omega^2)+2T\xi\omega j} = \frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2} + j\frac{-2T\xi\omega k}{(1-T^2\omega^2)^2-(2T\xi\omega)^2}$$

АЧХ – $|W(j\omega)| = \dfrac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2}}$

ФЧХ – $\varphi(\omega) = \begin{cases} -arctg\dfrac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2} \leftarrow \omega \le \dfrac{1}{T}, \\ -\pi - arctg\dfrac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2} \leftarrow \omega > \dfrac{1}{T}. \end{cases}$





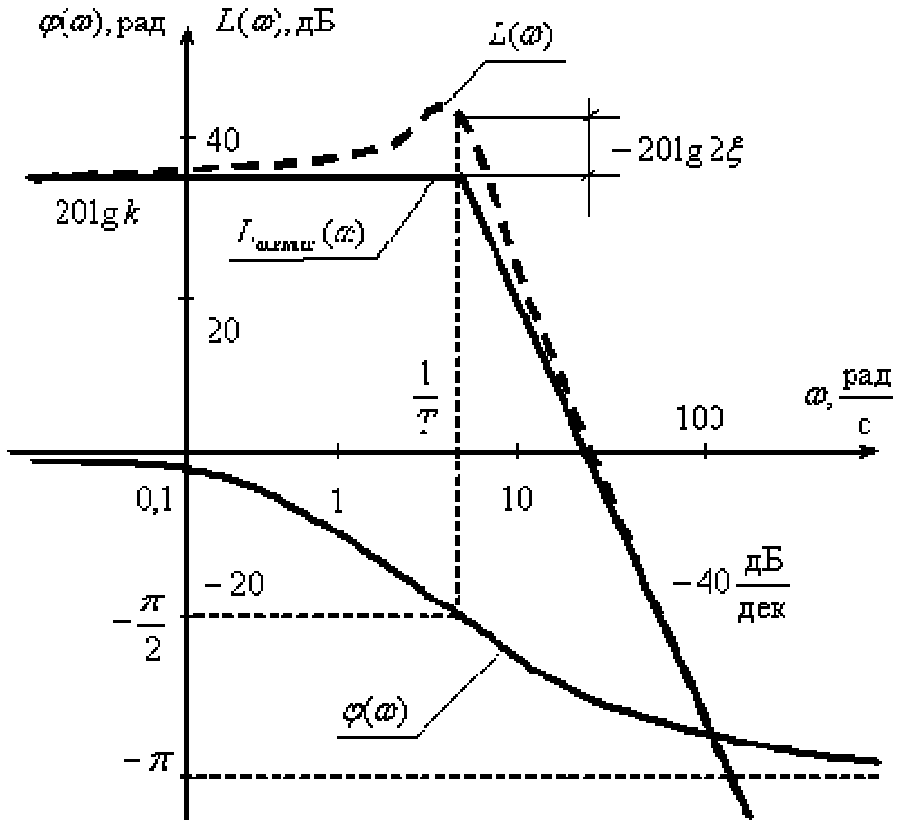
Логарифмічна характеристика коливальної ланки.

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg k - 10\lg((1-\omega^2T^2)+4\xi^2\omega^2T^2)$$

Асимптотична ЛАЧХ коливальної ланки

$$L_{асимпт}(\omega) = \begin{cases} \omega^2T^2 << 1 \ (\omega << 1/T) \to 20\lg k, \\ \omega^2T^2 << 1 \ (\omega << 1/T) \to 20\lg k - 40\lg \omega T. \end{cases}$$

Нахил асимптоти $\frac{\partial L(\omega)}{\partial(\lg\omega)} = -40\frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$.



Аперіодична ланка другого порядку

Диференціальне рівняння: $T_2^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$

Рівняння динаміки в операторній формі: $(T_2p^2 + T_1p+1)Y(p) = kX(p)$

Передавальна функція: $W(p) = \frac{k}{T_2^2p^2 + T_1p + 1}$

Передавальну функцію цієї ланки, розклавши знаменник на множники можна записати у вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3p+1)(T_4p+1)},$$

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Характеристичне рівняння ланки: $T_2^2p^2+T_1p+1=0$

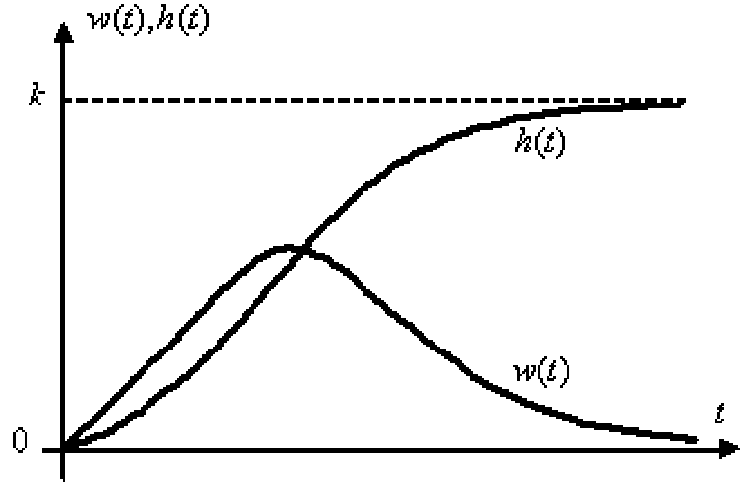
Корені характеристичного рівняння: $p_{1,2}=-\dfrac{T_1\pm\sqrt{T_1^2-4T_2^2}}{2T_2^2}$

Імпульсна характеристика інерційної ланки другого порядку

$$w(t)=L^{-1}\{W(s)\}=\frac{k}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right).$$

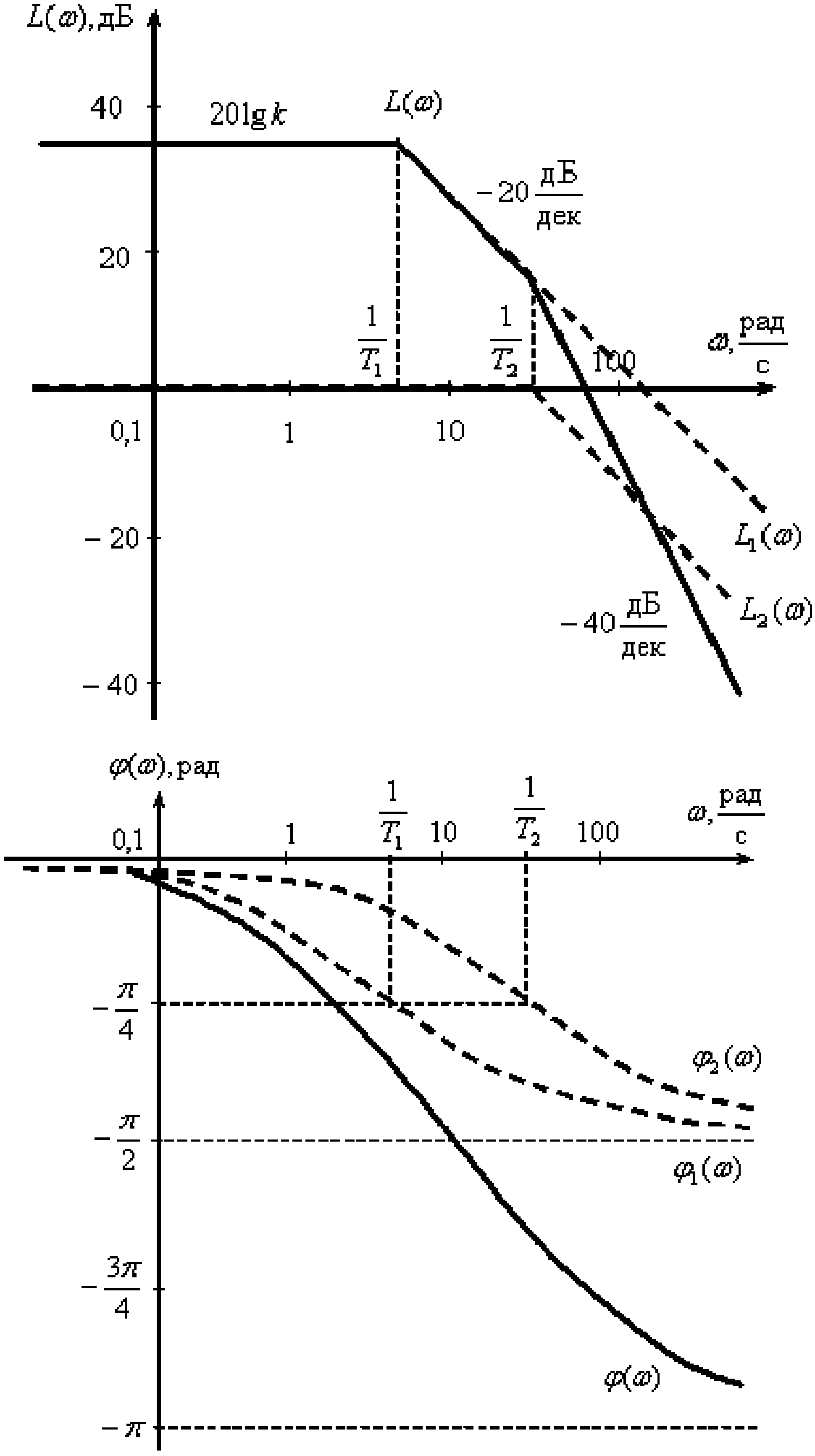
Перехідна характеристика

$$h(t)=\int_0^t w(t)d\tau=\left(k-\frac{kT_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{kT_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right).$$



Отримаємо асимптотичну ЛАЧХ для інерційної ланки другого порядку, представляючи його у вигляді двох послідовно включених аперіодичних ланок:

$$L(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega),$$
$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega).$$

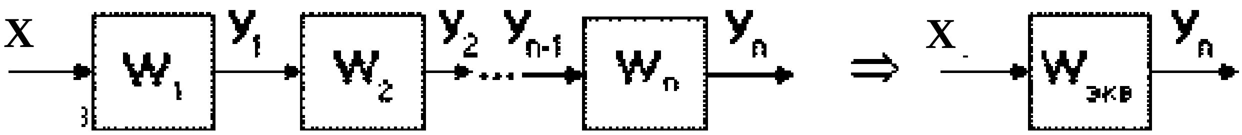


L(ω), дБ
40
20lg k
L(ω)
−20 дБ/дек
20
1/T1
1/T2
100
ω, рад/с
0,1
1
10
L1(ω)
−20
L2(ω)
−40 дБ/дек
−40
φ(ω), рад
1/T1
1/T2
0,1
1
10
100
ω, рад/с
−π/4
φ2(ω)
−π/2
φ1(ω)
−3π/4
φ(ω)
−π

6. ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ТИПОВИХ З'ЄДНАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ САУ.

Структурна схема САУ в простому випадку будується з елементарних динамічних ланок. Але декілька елементарних ланок можуть бути замінені однією ланкою з складною передавальною функцією. Для цього існують правила еквівалентного перетворення структурних схем. Розглянемо можливі способи перетворень.

1. Послідовне з'єднання - вихідна величина попередньої ланки подається на вхід подальшої.



$$Y_1(p) = X_1(p)\cdot W_1(p) = X(p)\cdot W_1(p) \qquad Y(p) = X(p)\cdot\prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

$$Y_2(p) = X_2(p)\cdot W_2(p) = Y_1(p)\cdot W_2(p) \qquad W_{ЭКВ}(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

……………………………………….

$$Y_i(p) = X_i(p)\cdot W_i(p) = Y_{i-1}(p)\cdot W_i(p)$$

……………………………………….

$$Y(p) = X_n(p)\cdot W_n(p) = Y_{n-1}(p)\cdot W_n(p)$$

- еквівалентна АФЧХ послідовного з'єднання елементів дорівнює перемноженню АФЧХ ланок:

$$W_{ЭКВ}(jw) = \prod_{i=1}^{n} W_i(jw) = \prod_{i=1}^{n} A_i(w) e^{jj_i(w)}$$

- еквівалентна АЧХ послідовного з'єднання елементів дорівнює перемноженню АЧХ ланок:

$$A_{ЭКВ}(w) = \left|W_{ЭКВ}(jw)\right| = \prod_{i=1}^{n} A_i(w)$$

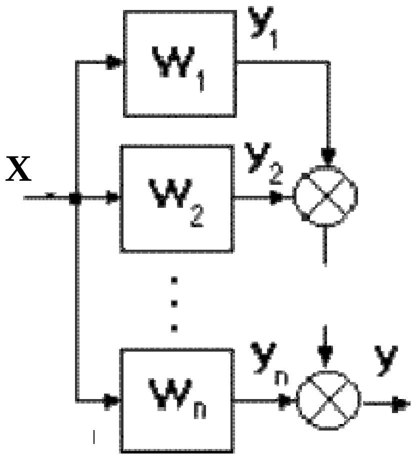
- еквівалентна ФЧХ послідовного з'єднання елементів дорівнює сумі ФЧХ ланок:

$$A_{ЭКВ}(w) = \arg W_{ЭКВ}(jw) = \sum_{i=1}^{n} j_{\,i}(w)$$

- еквівалентна ЛАЧХ послідовного з'єднання елементів дорівнює сумі ЛАЧХ окремих елементів:

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \ldots + L_n(\omega)$$

<u>2. Паралельне з'єднання</u> - на вхід кожної ланки подається один і той же сигнал, а вихідні сигнали підсумовуються з відповідним знаком.



$$Y_1(p) = X_1(p)\cdot W_1(p) = X(p)\cdot W_1(p)$$

$$Y_2(p) = X_2(p)\cdot W_2(p) = X(p)\cdot W_2(p)$$

…………………………………………...

$$Y_i(p) = X_i(p)\cdot W_i(p) = X(p)\cdot W_i(p)$$

………………………………………..

$$Y_n(p) = X_n(p)\cdot W_n(p) = X(p)\cdot W_n(p)$$

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + \ldots + Y_n(p)$$

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) + \ldots + W_n(p)]\cdot X(p)$$

Передавальна функція паралельного з'єднання ланок дорівнює сумі передавальних функцій окремих ланок:

$$W_{ЭКВ}(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p)$$

- еквівалентна АФЧХ паралельного з'єднання елементів дорівнює сумі АФЧХ ланок:

$$W_{ЭКВ}(jw) = \sum_{i=1}^{n} W_i(jw)$$

- еквівалентна ВЧХ паралельного з'єднання елементів дорівнює сумі ВЧХ ланок:

$$P_{ЭКВ}(w) = \sum_{i=1}^{n} P_i(w)$$

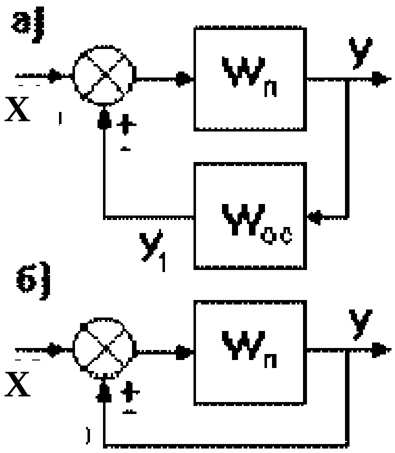
- еквівалентна МЧХ паралельного з'єднання елементів дорівнює сумі МЧХ ланок:

$$Q_{ЭКВ}(w) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(w)$$

- перехідна функція паралельного з'єднання ланок дорівнює сумі перехідних функцій окремих ланок:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \ldots + h_n(t)$$

3. Зустрічно-паралельне з'єднання (з'єднання із зворотним зв'язком) - це з'єднання, при якому вихідний сигнал 1-го елементу поступає на вхід 2-го елементу, а вихідний сигнал 2-го елементу підсумовується з відповідним знаком з вхідним сигналом.



Для прямого ланцюга: $Y(p) = E(p) \cdot W_П(p)$

Для ланцюга зворотного зв'язку:

$Y_1(p) = Y(p) \cdot W_{OC}(p)$

Для суматора: $E(p) = X(p) \pm Y_1(p)$

$$Y(p) = X(p) \cdot W_П(p) \pm Y(p) \cdot W_П(p) \cdot W_{OC}(p)$$

$$W_{ЭКВ}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_П(p)}{1 - W_П(p) \cdot W_{OC}(p)}$$ - при ПЗЗ

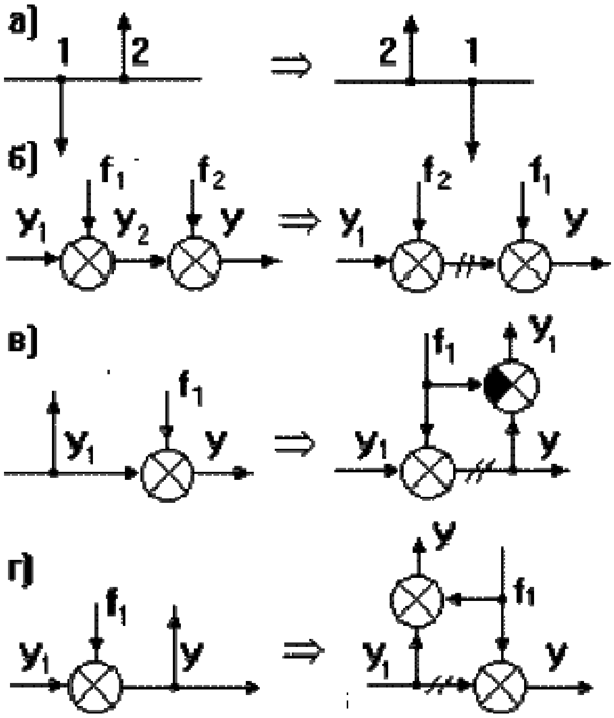
$$W_{ЭКВ}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_П(p)}{1 + W_П(p) \cdot W_{OC}(p)}$$ - при НЗЗ

Окремий випадок - з'єднання з одиничним зворотнім зв'язком:

$$W_{ЭКВ}(p)=\frac{W_П(p)}{1-W_П(p)}$$ - при ПЗЗ $$W_{ЭКВ}(p)=\frac{W_П(p)}{1+W_П(p)}$$ - при НЗЗ

<u>Правила перетворення структурних схем.</u>

Бувають випадки, коли з'єднання ланок складне: і не паралельне, і не послідовне. Таке може бути в багатоконтурних схемах із зв'язками, що перехрещуються. В цьому випадку, для спрощення схем, переносять через ланки вузли розгалуження або суматори.

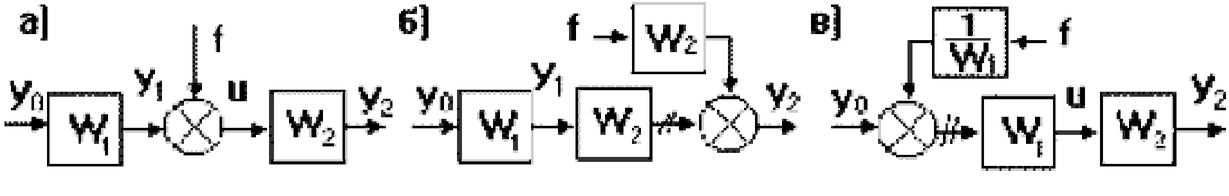


- можливі взаємні перестановки вузлів і суматорів: вузли можна міняти місцями;
- суматори теж можна міняти місцями;
- при перенесенні вузла через суматор необхідно додати зрівнюючий елемент:

  $y = y_1 + f_1 => y_1 = y - f_1$

  або суматор: **$y = y_1 + f_1$**

- при перенесенні суматора через ланку по ходу сигналу необхідно додати ланку з передавальною функцією тієї ланки, через яку переноситься суматор. Якщо суматор переноситься проти ходу сигналу, то додається ланка з передавальною функцією, зворотною до передавальної функції ланки, через яку переносимо суматор.



Так з виходу системи на рис.а знімається сигнал

$$y_2 = (f + y_oW_1)W_2.$$

Такий же сигнал повинен зніматися з виходів систем на рис.б:

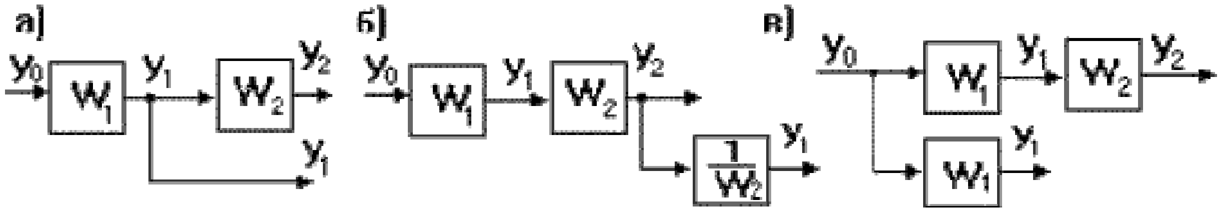
$$y_2 = fW_2 + y_oW_1W_2 = (f + y_oW_1)W_2,$$

та на рис.в:

$$y_2 = (f(1/W_1) + y_o)W_1W_2 = (f + y_oW_1)W_2.$$

При подібних перетвореннях можуть виникати нееквівалентні ділянки лінії зв'язку (на рисунках вони заштриховані).

- при перенесенні вузла через ланку по ходу сигналу додається ланка з передавальною функцією, що є зворотною до передавальної функції ланки, через яку переносимо вузол (рис.в). Якщо вузол переноситься проти ходу сигналу, то додається ланка з передавальною функцією ланки, через яку переноситься вузол (рис.в).



Так з виходу системи на рис.а знімається сигнал

$$y_1 = y_oW_1.$$

Такий же сигнал знімається з виходів рис.б:

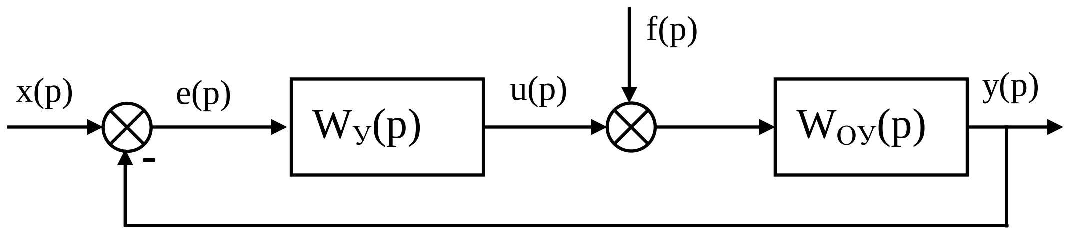
$$y_1 = y_oW_1W_2/W_2 = y_oW_1$$

та рис.в:

$$y_1 = y_oW_1.$$

Передавальні функції і рівняння динаміки типової одноконтурної системи

Для спрощення і уніфікації аналізу, складні схеми САР приводять до типового вигляду. Всі елементи контура початкової САР, окрім суматора і об'єкту управління згортають в одну ланку, яку умовно називають регулятором. Зворотний зв'язок - одиничний негативний. Збурення діє на вхід об'єкту керування. Схема набуває вигляду:



Об'єкт управління характеризується однією керованою змінною *Y(p),* яку потрібно стабілізувати на заданому рівні *X(p)* На стабілізуючу змінну *Y(p)* впливає збурення *F(p).* Відхилення вихідної змінної *Y(p),* яке викликається цим збуренням компенсується в системі цілеспрямованими змінами керуючого впливу *U(p),* який створюється регулятором (керуючим пристроєм). На вході регулятора з передавальною функцією *Wу (p)* діє сигнал розузгодження (помилки) *e(p).* Цей сигнал формується в результаті порівняння (алгебраїчного підсумовування) задаючого впливу *X(p)* і керованої величини *Y(p).*

Складемо передавальні функції і рівняння динаміки типової одноконтурною САК.

1. Передавальна функція розімкненої системи - виходить розмиканням зворотного зв'язку і *f(p)=0*.

$$W_P(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=W_У(p)W_{OУ}(p).$$

2. Передавальна функція замкнутої САК по задаючому впливу - приймаємо f(p) = 0:

$$W_З(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{W_У(p)W_{OУ}(p)}{1+W_У(p)W_{OУ}(p)}=\frac{W_P(p)}{1+W_P(p)}$$

3. Передавальна функція САК по збурюючому впливу - приймаємо *X(p) = 0*:

$$W_B(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_{OУ}(p)}{1+W_У(p)W_{OУ}(p)}.$$

Згідно принципу суперпозиції (накладення) загальна зміна вихідної величини *Y(p)*, що виникає при сумісній дії вхідних впливів *X(p)* і *F(p)*, дорівнює сумі змін, що створюються кожним впливом окремо. Звідси ***рівняння динаміки САУ*** в короткій формі:

$$Y(p) = X(p)W_З(p) + F(p)W_В(p)$$

або в розгорненому вигляді:

$$Y(p) = X(p)\,\frac{W_У(p)W_{ОУ}(p)}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)} + F(p)\frac{W_{ОУ}(p)}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

Для типової одноконтурної системи прийнято записувати передавальні функції щодо сигналу помилки (розузгодження).

4. Передавальна функція САК щодо сигналу помилки по задаючому впливу (при *f(p)=0*):

$$W_{ЕЗ}(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

5. Передавальна функція САК щодо сигналу помилки по збурюючому впливу (при *x(p)=0*):

$$W_{ЕВ}(p) = \frac{E(p)}{F(p)} = \frac{-W_{ОУ}(p)}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

Згідно принципу суперпозиції (накладення) загальна зміна сигналу помилки *E(p)*, що виникає при сумісній дії вхідних впливів *X(p)* і *F(p)*, дорівнює сумі змін, що створюються кожним впливом окремо. Звідси ***рівняння динаміки САК для сигналу помилки*** в короткій формі:

$$E(p) = X(p)W_{ЕЗ}(p) + F(p)W_{ЕВ}(p)$$

або в розгорненому вигляді:

$$E(p) = X(p)\,\frac{1}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)} + F(p)\frac{-W_{ОУ}(p)}{1+W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

7. ПОБУДОВА ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.

Розглянемо побудову логарифмічних частотних характеристик на прикладах, з яких стає зрозумілим загальний метод побудови.

Приклад 1.

Необхідно побудувати логарифмічні частотні характеристики системи, передавальна функція розімкненого контуру якої має вигляд:

$$W(p)=\frac{k(T_2p+1)}{p(T_1p+1)(T_3p+1)},\qquad T_1>T_2>T_3.$$

$$W(p)=\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{(T_1p+1)}\cdot(T_2p+1)\cdot\frac{1}{(T_3p+1)}$$

Запишемо вираз для логарифмічної частотної характеристики:

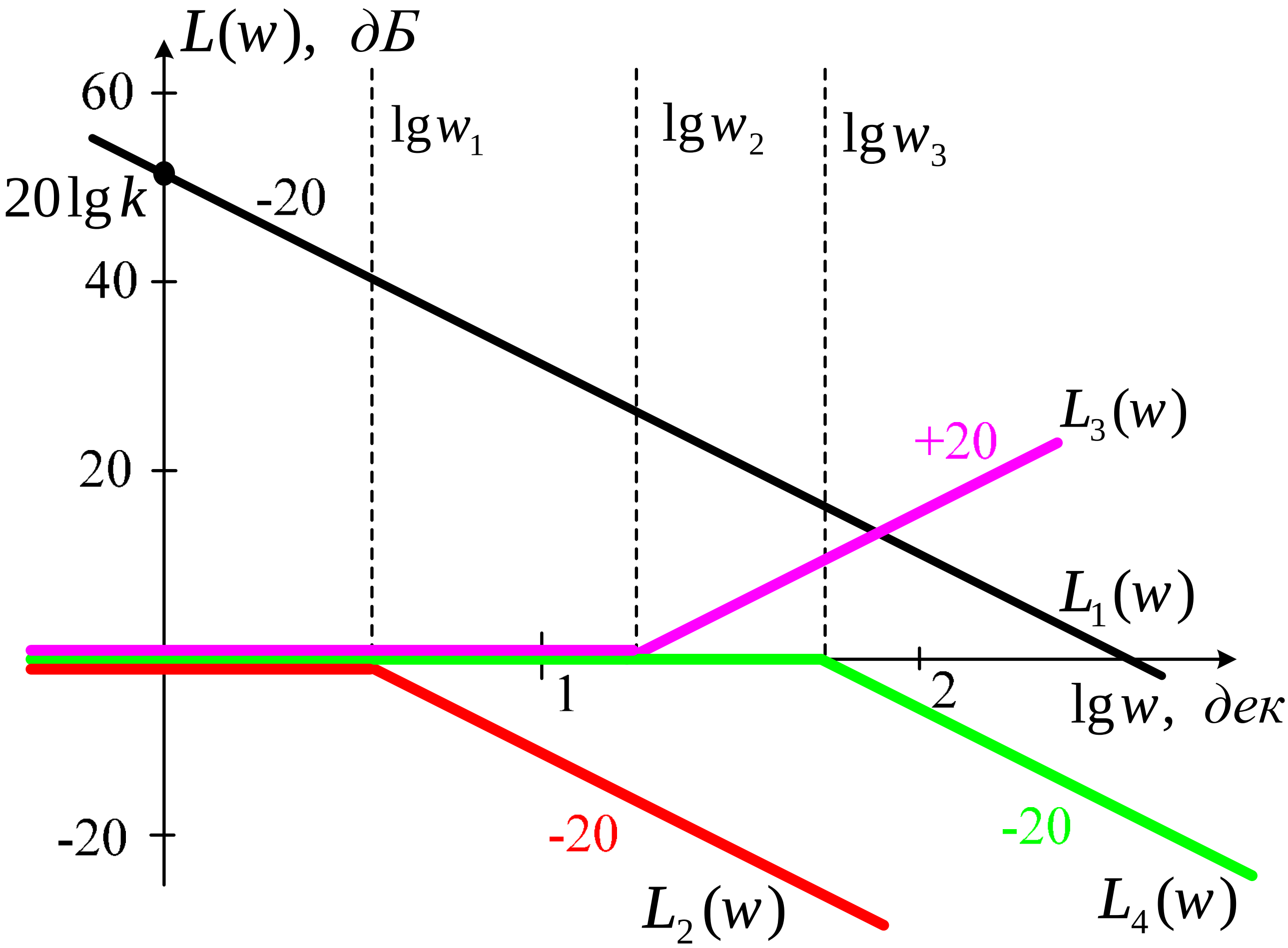
$$L(w)=20\lg k-20\lg w-20\lg\sqrt{1+T_1^2w^2}+20\lg\sqrt{1+T_2^2w^2}-20\lg\sqrt{1+T_3^2w^2}$$

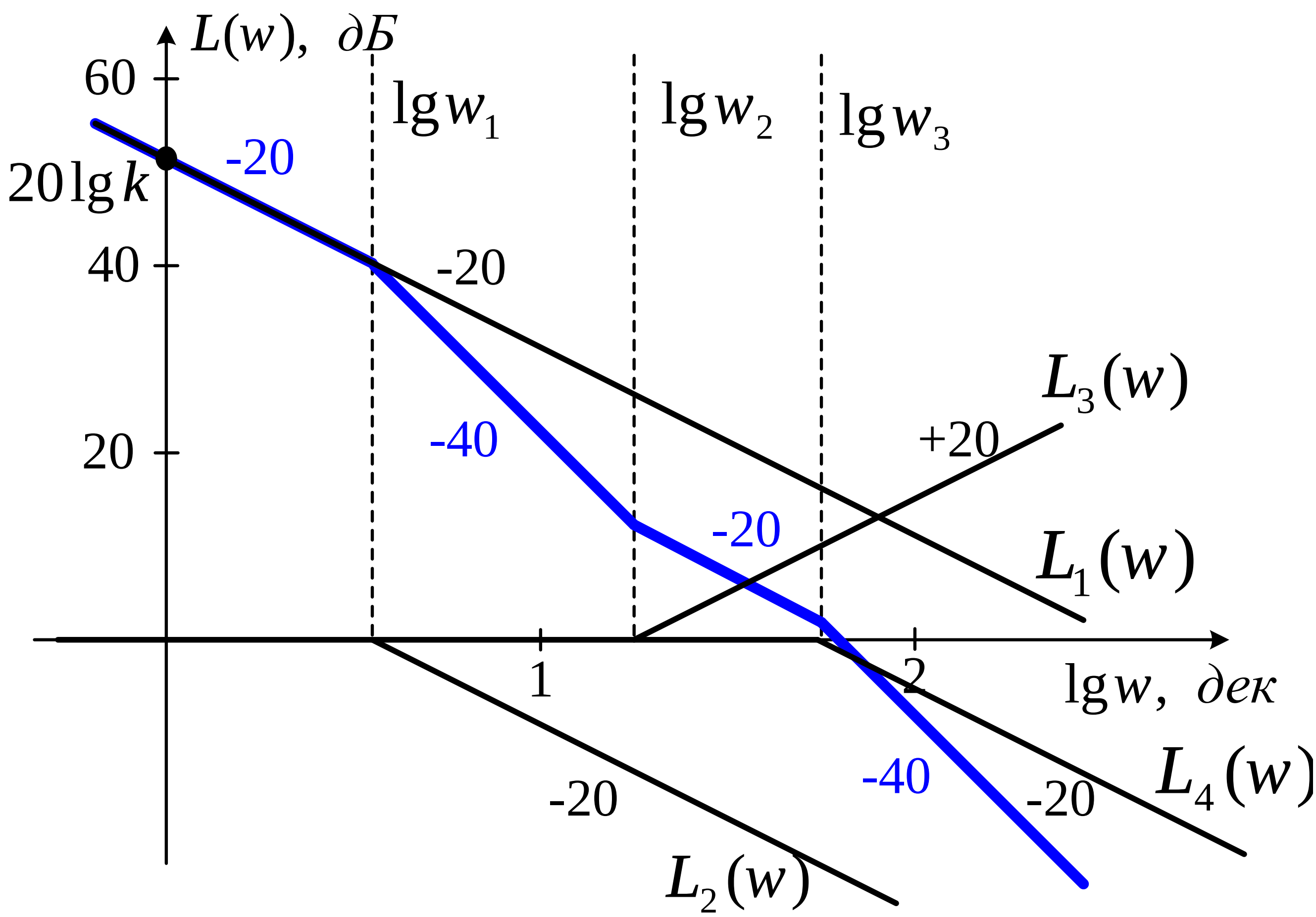
ЛАЧХ даної системи складається з ЛАЧХ типових ланок, що входять до складу системи:

$$L(w)=\overbrace{20\lg k-20\lg w}^{L_1(w)}\overbrace{-20\lg\sqrt{1+T_1^2w^2}}^{L_2(w)}+$$
$$\underbrace{+20\lg\sqrt{1+T_2^2w^2}}_{L_3(w)}\underbrace{-20\lg\sqrt{1+T_3^2w^2}}_{L_4(w)}$$

Знайдемо частоти сполучення в ЛАЧХ кожної типової ланки:

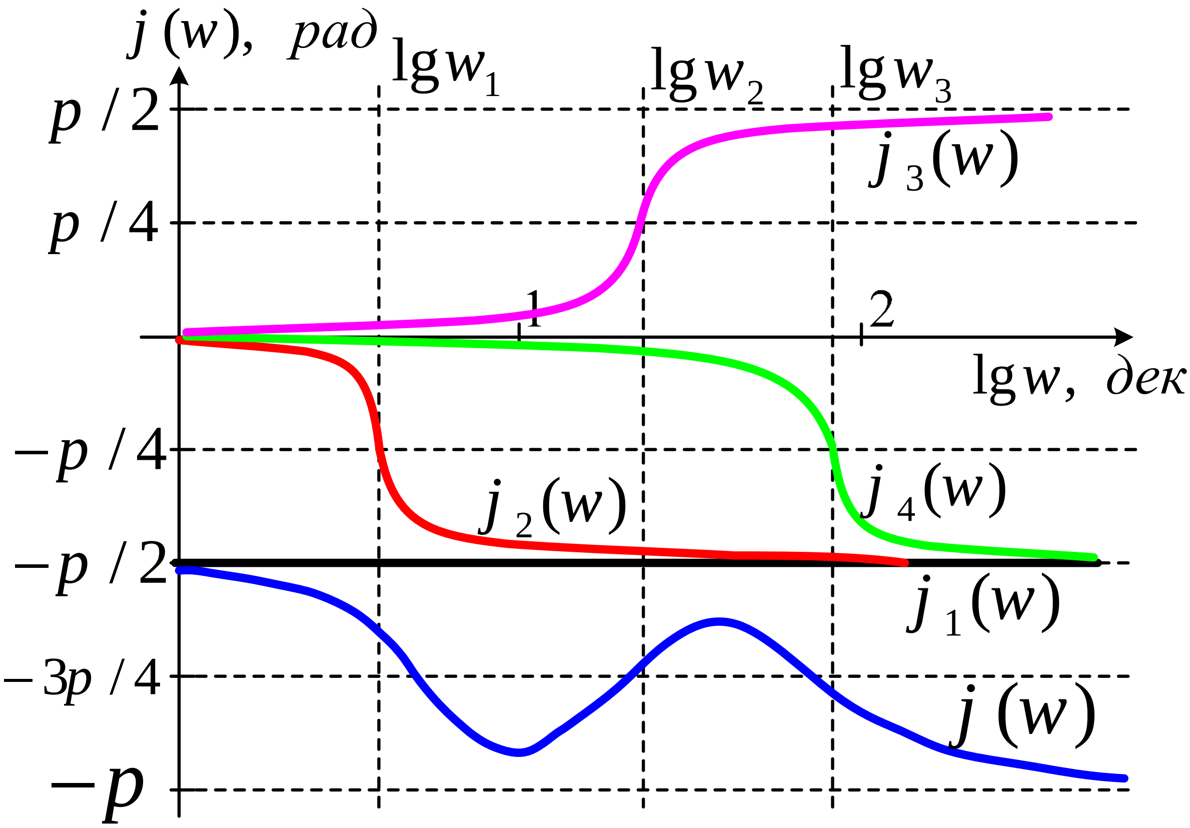
$$w_1=\frac{1}{T_1};\qquad w_2=\frac{1}{T_2};\qquad w_3=\frac{1}{T_3}.$$


L(w), дБ
60
40
20
-20
20lg k
-20
lg w1
lg w2
lg w3
+20
L3(w)
L1(w)
1
2
lg w, дек
-20
-20
L2(w)
L4(w)


L(w), дБ
60
40
20
20lg k
-20
lg w1
lg w2
lg w3
-20
-40
-20
+20
L3(w)
L1(w)
1
2
lg w, дек
-20
-40
-20
L4(w)
L2(w)

Запишемо вираз для ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\varphi_1(\omega)} \underbrace{-\,\mathrm{arctg}\ \omega T_1}_{\varphi_2(\omega)} \underbrace{+\,\mathrm{arctg}\ \omega T_2}_{\varphi_3(\omega)} \underbrace{-\,\mathrm{arctg}\ \omega T_3}_{\varphi_4(\omega)}$$



Приклад 2.

Необхідно побудувати логарифмічні частотні характеристики системи, передавальна функція розімкненого контуру якої має вигляд:

$$W(p) = \frac{k(T_2 p+1)^2}{(T_1 p+1)(T_3 p+1)^3}, \qquad T_1 > T_2 > T_3.$$

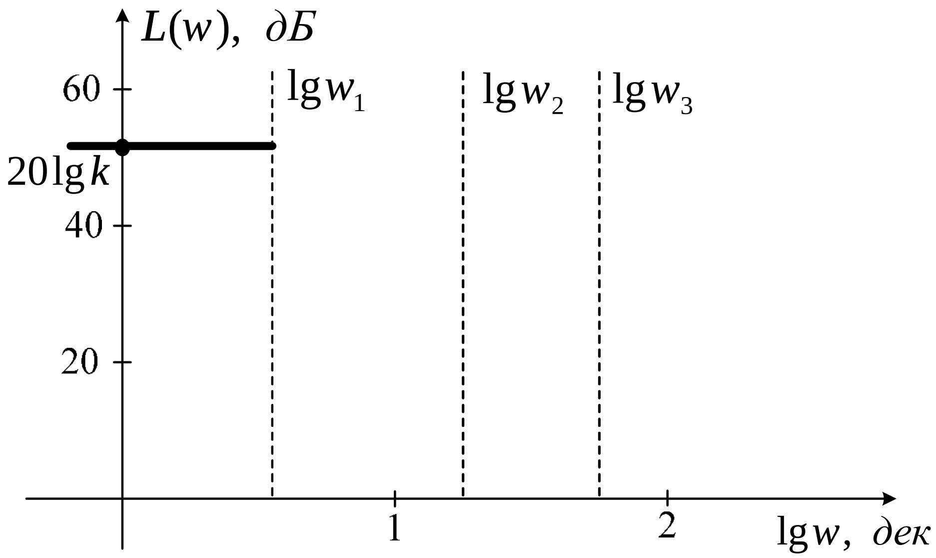
$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p+1)} \cdot (T_2 p+1)^2 \cdot \frac{1}{(T_3 p+1)^3}$$

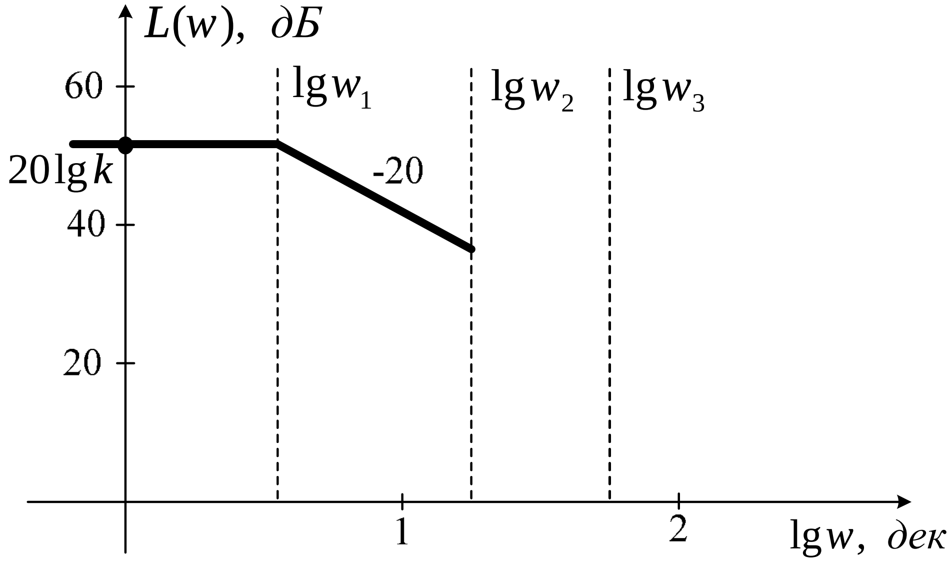
Запишемо вираз для логарифмічної частотної характеристики:

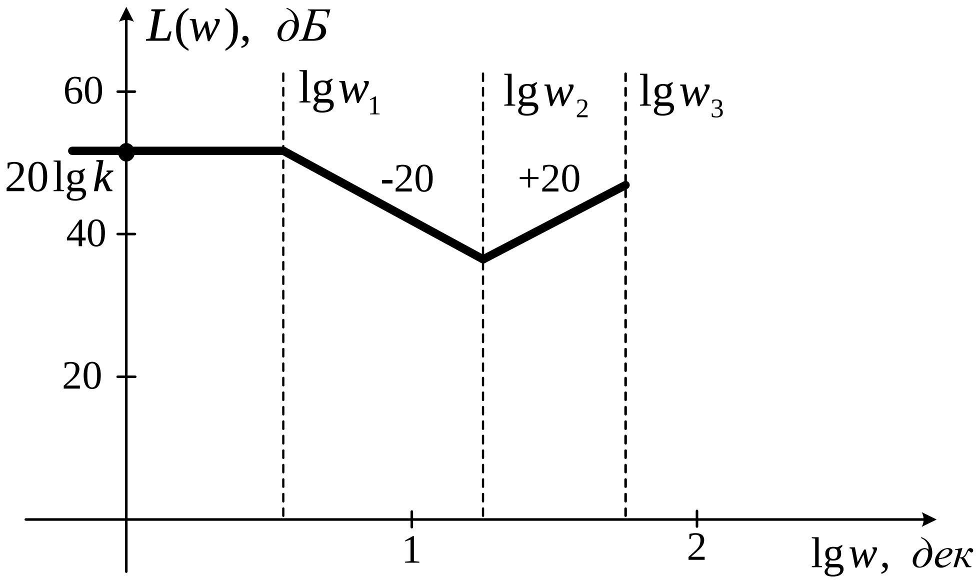
$$L(w) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T_1^2 w^2} + 40\lg\sqrt{1+T_2^2 w^2} - 60\lg\sqrt{1+T_3^2 w^2}$$

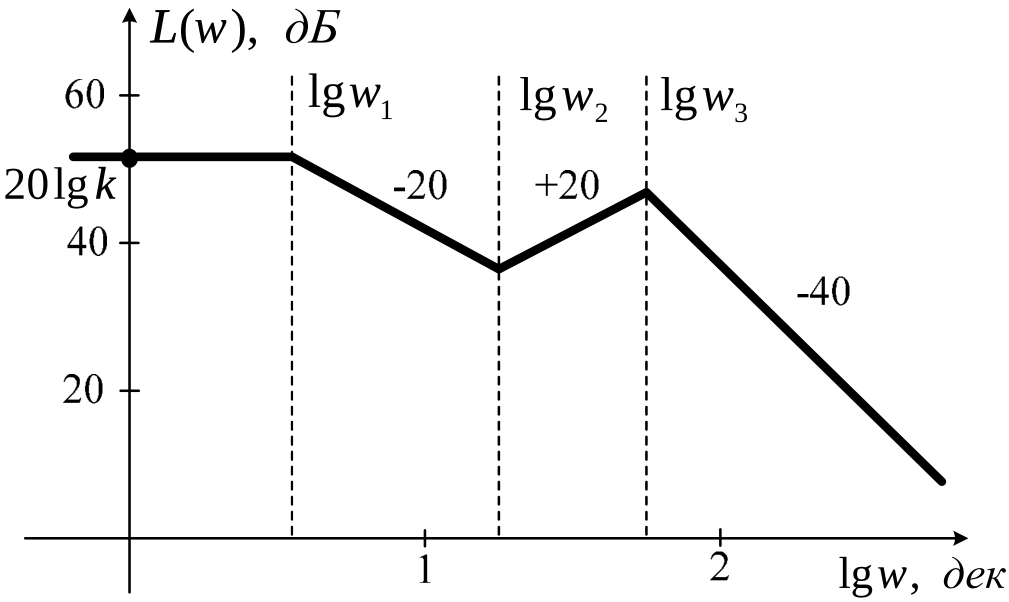
Знайдемо частоти сполучення в ЛАЧХ кожної типової ланки:

$$w_1 = \frac{1}{T_1}; \qquad w_2 = \frac{1}{T_2}; \qquad w_3 = \frac{1}{T_3}.$$



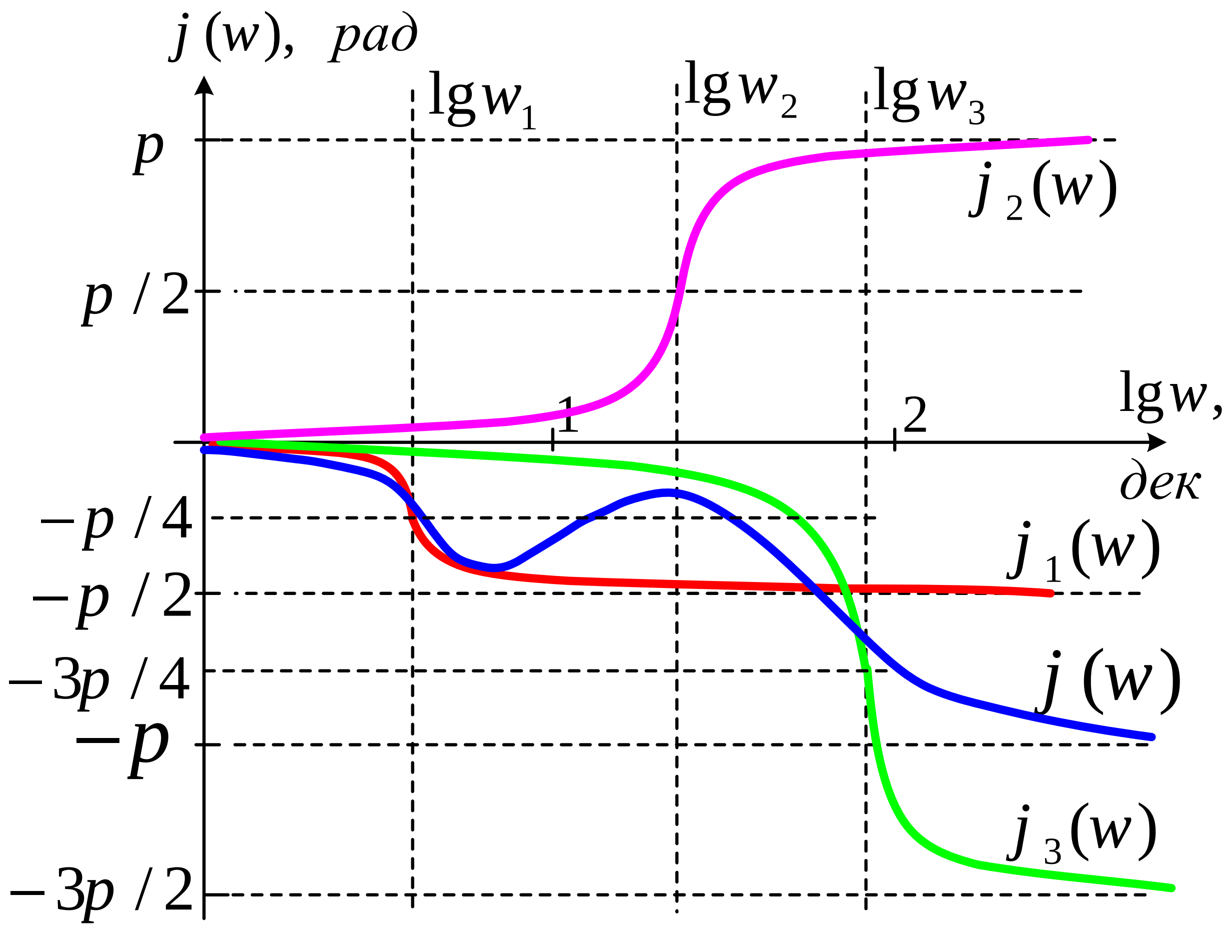






Запишемо вираз для ЛФЧХ:

$$j(w) = -arctg\ wT_1 + 2arctg\ wT_2 - 3arctg\ wT_3$$



ЛАЧХ можна будувати безпосередньо по заданій передавальній функції. Для цього необхідно пам'ятати, що згідно характеристикам типових ланок, кожному співмножнику типу (*Tp+1*) в знаменнику відповідає точка злому характеристики при $w = \frac{1}{T}$ з подальшою зміною нахилу на -20дБ/дек, а кожному співмножнику такого ж типу в чисельнику відповідає точка зламу характеристики при $w = \frac{1}{T}$ з подальшою зміною нахилу на +20дБ/дек. Співмножнику типу $(T^2 p^2 + 2xTp + 1)$ відповідає злам із зміною нахилу на ± 40дб/дек. Вид початкової ділянки ЛАЧХ визначається наявністю або відсутністю ідеальних інтегруючих або диференцюючих ланок.

Якщо передавальна функція розімкненої системи представлена у вигляді відношення поліномів, то застосовують наступну методику.

$$W(p)=\frac{k(b_0p^m+b_1p^{m-1}+b_2p^{m-2}+...+b_{m-1}p+b_m)}{p^n\,(a_0p^k+a_1p^{k-1}+a_2p^{k-2}+...+b_{k-1}p+a_k)},\quad m\le n;\qquad n=k+n$$

Визначаємо частоти сполучення:

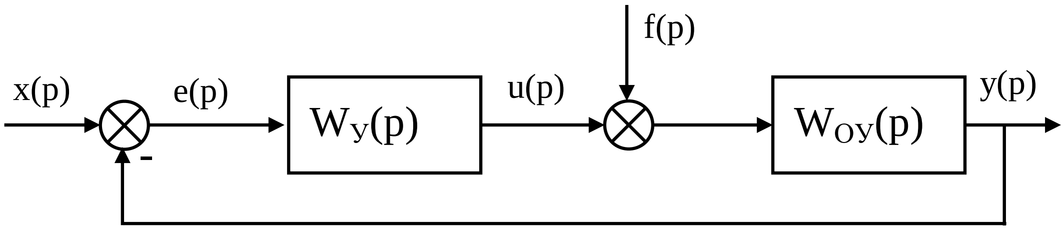
- чисельника $\frac{b_m}{b_{m-1}}=w_1^1;\ \frac{b_{m-1}}{b_{m-2}}=w_2^1;\ \frac{b_{m-2}}{b_{m-3}}=w_3^1;\ \ldots;\ \frac{b_1}{b_0}=w_m^1.$

- знаменника $\frac{a_k}{a_{k-1}}=w_1;\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}=w_2;\ \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}}=w_3;\ \ldots\frac{a_1}{a_0}=w_k.$

Значення частот сполучення відкладають по осі частот за збільшенням. Нахил ЛАЧХ на частотах сполучення, які належать знаменнику змінюються на -20дБ/дек, а на частотах сполучення, які належать чисельнику змінюються на +20дБ/дек. Низькочастотна асимптота проходить з нахилом -20n дб/дек через крапку з координатами ($w=1$; $L(w)=20\lg k$).

8. ТОЧНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

8.1. Загальні поняття про точність управління



Призначення будь-якої САУ полягає в підтримці рівності

$$y(t) = x(t)$$

при будь-яких змінах впливів що задають й обурюють. Тобто САУ повинна відтворювати вплив, що задає $x_з(t)$ і подавляти (компенсувати) дії впливів, що обурюють. Однак через інерційність об'єкта управління й регулятора обидві ці функції виконуються САУ з *погрішністю* (*помилкою*): у кожний момент часу після зовнішнього впливу існує різниця:

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

яка й характеризує ***точність САУ***. Чим *менше* миттєві значення помилки ***e(t),*** тим *вище (краще) точність САУ.*

Сигнал помилки ***e(t)*** містить складову $e_з(t)$, що характеризує точність виконання системою функції відтворення впливу, що задає, і складову $e_в(t)$, що характеризує точність виконання функції компенсації збурювань:

$$e(t) = e_з(t) + e_в(t)\,.$$

$$W_{EЗ}(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)}.,\quad W_{EВ}(p) = \frac{E(p)}{F(p)} = \frac{-W_{ОУ}(p)}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

$$E(p) = X(p)\,\frac{1}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)} + F(p)\frac{-W_{ОУ}(p)}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

З наведених вище співвідношень випливає одне з найважливіших правил ТАУ:

У типовій одноконтурній системі, що складається з об'єкта $W_{0B}(p)$ і регулятора (керуючого пристрою) $W_У(p)$, повна помилка регулювання $e(t)$ і її складова у статиці й у динаміці обернено пропорційні виразу $(1+W_{yy}(p)W_0(p))$, тобто точність регулювання тим краще, чим більше підсилювальні властивості регулятора (керуючого пристрою).

8.2. Статична точність

У статичному режимі помилки виникають тільки в статичній системі, а в астатичній системі вони дорівнюють нулю. Тому оцінка статичної точності здійснюється при аналізі тільки статичних систем.

Статична система керування – це система, об'єкт і керуючий пристрій якої є статичними елементами, тобто

$$W_0(0) = k_{ОУ},\ W_y(0) = k_У.$$

З рівнянь динаміки для сигналу помилки й вихідної величини одержуємо рівняння статики статичної системи підстановкою $p=0$ і з огляду на те, що $W_0(0) = k_{ОУ}$, $W_y(0) = k_y$:

– для керованої величини: $y = \dfrac{k_y * k_{OY}}{1 + k_y * k_{OY}} x + \dfrac{k_{OY}}{1 + k_y k_{OY}} f$

– для сигналу помилки: $e = \dfrac{1}{1 + k_У * k_{OУ}} x - \dfrac{k_{OУ}}{1 + k_У * k_{OУ}} f$ (*)

Перший доданок у рівнянні (*) характеризує статичну помилку за впливом, що задає, другий - статичну помилку за збуренням. Обидві ці помилки тим більше, чим більше зовнішні впливи, і тем менше, чим більше знаменник $(1 + k_У * k_{OУ})$. Отже:

Точність статичної системи тим краще, чим більше передатний коефіцієнт розімкнутого контуру $k_У * k_{OУ}$.

Точність статичної системи прийнято оцінювати коефіцієнтом статизму:

$$S = \frac{DY_З}{DY_p}.$$

де DY_p – відхилення керованої величини y від заданого значення, створюване збурюванням f_0 при розімкнутому контурі регулювання;

$DY_з$ – відхилення керованої величини y від заданого значення, створюване тим же збурюванням f_0 у замкнутій системі.

Коефіцієнт статизму показує у скільки разів відхилення вихідної величини керованого об'єкта менше відхилення цієї величини некерованого об'єкта (при тому самому значенні збурювання).

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y_p &= \Delta f_0 * k_{ОУ} \\ \Delta Y_з &= \Delta f_0 * \frac{k_{ОУ}}{1 + k_У k_{ОУ}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{1 + k_У k_{ОУ}} = \frac{1}{1 + k}, \quad k = k_У k_{ОУ}$$

Точність статичної системи задовільна при $S = 0{,}1 \div 0{,}01$.

8.3. Динамічна точність

Динамічну точність оцінюють за величиною сигналу помилки в сталому динамічному режимі. У цьому режимі роботи керована величина й сигнал помилки мають тільки змушену складову.

Залежно від властивостей системи й від точки прикладення зовнішнього впливу змушена складова сигналу помилки або дорівнює постійній величині, або необмежено зростає. Постійну змушену складової можна визначити за допомогою теореми про кінцеве значення оригіналу. Зростаючу змушену складову знаходять за допомогою методу коефіцієнтів помилок.

Розглянемо методику визначення постійних складових сигналу помилки.

Визначимо стале значення сигналу помилки типової одноконтурної системи керування при зміні зовнішніх впливів $x(t)$ і $f(t)$ за законом східчастої функції: $x(t) = f(t) = a1(t)$ і за законом статечної функції: $x(t) = f(t) = at^q 1(t)$, $q = 1; 2; 3; \ldots\ldots$

Нехай ПФ регулятора й об'єкта має вигляд:

$$W_У(p) = \frac{k_У W_У^*(p)}{p^{n_у}}; \qquad W_{ОУ}(p) = \frac{k_{ОУ} W_{ОУ}{}^*(p)}{p^{n_у}};$$

де множники $W_У^*(p)$ й $W_{ОУ}{}^*(p)$ при $p \to 0$ прагнуть до одиниці.

Показники $\nu_У$ и $\nu_{ОУ}$ характеризують порядок астатизму керуючого пристрою й об'єкта.

Типова система керування називається астатичною ν-го порядку, якщо вона має астатизм ν-го порядку, тобто містить ν інтегруючих ланок.

ПФ розімкнутого контуру буде мати вигляд: $W(p) = \dfrac{kW^*(p)}{p^n}$,

Де $k = k_У * k_{ОУ}$ – передатний коефіцієнт розімкнутого контуру;

$\nu = \nu_В + \nu_{ОУ}$ – порядок астатизму системи;

$W^*(p) = W^*_В(p) * W_{ОУ}{}^*(p)$ – множник, що при $p \to 0$ прагне до одиниці.

Зображення сигналу помилки типової системи одержуємо підстановкою передатних функцій об'єкта управління й керуючого пристрою в рівняння динаміки системи для сигналу помилки:

$$e(p) = x(p)\frac{p^n}{p^n + kW^*(p)} + f(p)\frac{p^{n_у} k_{ОУ} W_{ОУ}{}^*(p)}{p^n + kW^*(p)}. \qquad (**)$$

З даного вираження виходить, що складова сигналу помилки e, обумовлена зміною впливу, що задає, x(t), залежить від загального порядку астатизму системи ν, а складова $\varepsilon_в$, обумовлена зміною впливу, що обурює, f(t), залежить тільки від порядку астатизму регулятора.

Стале значення сигналу помилки визначається на підставі теореми про кінцеве значення сигналу:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{p \to 0} pe(p).$$

Знаменники обох доданків у виразенні (**) при $p \to 0$ прагнуть до значення $1+k$ (при $\nu = 0$) або до значення k (при $\nu > 0$). Граничне значення чисельників залежить від виду функцій $x(t)$ і $f(t)$ і від показників астатизму ν і ν_{yy}.

Якщо підставити замість $x(p)$ і $f(p)$ у формулі (**) зображення східчастої функції $x(p) = f(p) = a/p$

або статечної функції $x(p) = f(p) = \frac{a * q!}{p^{q+1}}, q = 1;2;3...,$

те можна знайти стале значення сигналу помилки.

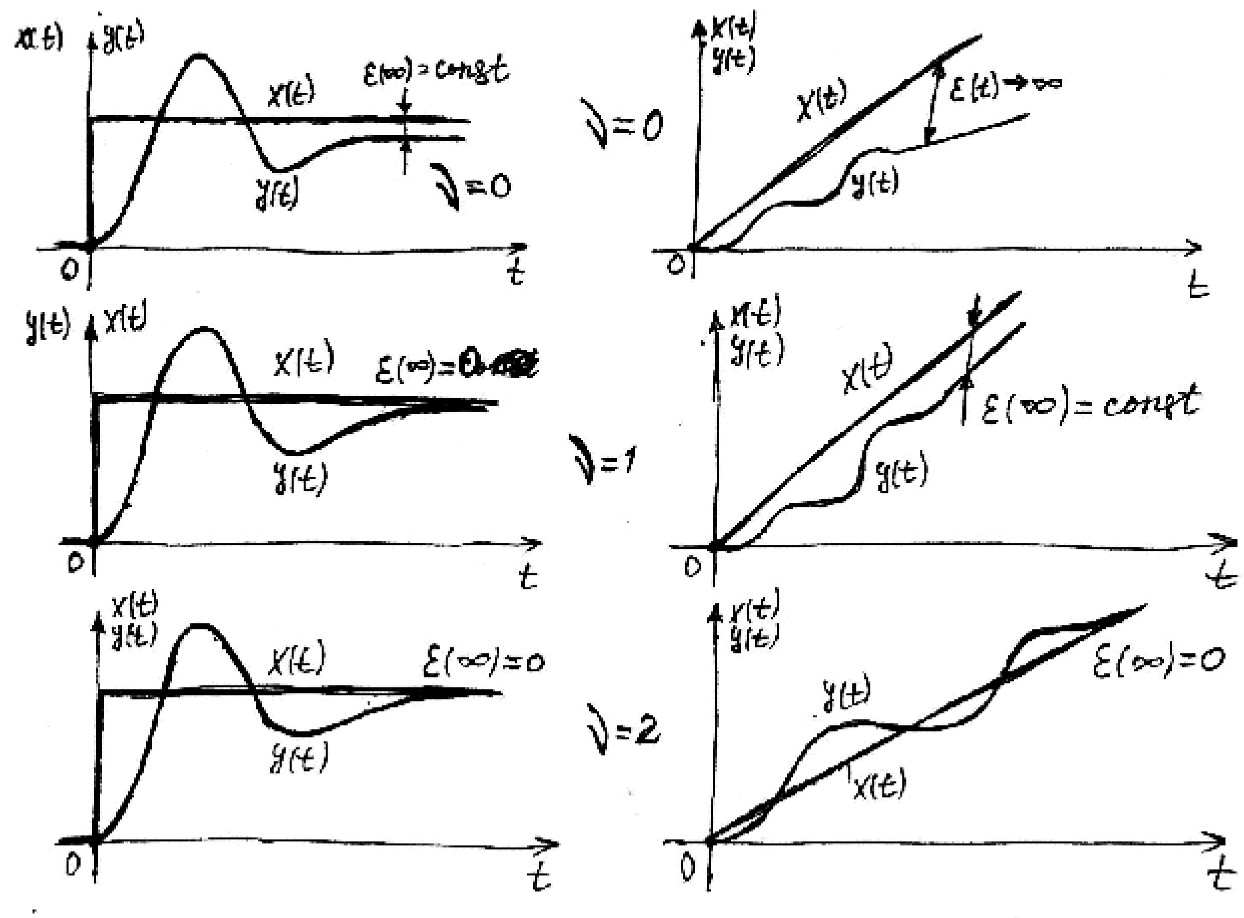
Сталі значення складових $e_з$ і $e_у$ для ряду розповсюджених випадків (q=0;1;2 і n = 0;1;2) наведені в таблиці.

Складова сигналу помилки	Порядок астатизму	Вид впливу		
		$a(t)$	$at\,1(t)$	$at^2\,1(t)$
$e_з$	$\nu = 0$	$\frac{a}{1+k}$	∞	∞
	$\nu = 1$	0	$\frac{a}{k}$	∞
	$\nu = 2$	0	0	$\frac{2a}{k}$
$e_в$	$\nu_у=0;\ \nu_{ОУ}=0$	$\frac{ak_{ОУ}}{1+k}$	∞	∞
	$\nu_у=0;\ \nu_{ОУ}=1$	$\frac{a}{k_у}$	∞	∞
	$\nu_у=1;\ \nu_{ОУ}=0$	0	$\frac{a}{k_у}$	∞
	$\nu_у=1;\ \nu_{ОУ}=1$	0	$\frac{a}{k_у}$	∞
	$\nu_у=2;\ \nu_{ОУ}=0$	0	0	$\frac{2a}{k_у}$

На підставі аналізу результатів, наведених у таблиці, можна сформулювати загальні правила:

1. Якщо сумарний порядок астатизму *n* типової системи дорівнює показнику *q* статечного впливу, що задає, то система в сталому режимі має помилку $e_з(\infty) = \frac{aq!}{k} = const$ відтворення , що тим менше, чим більше передатний коефіцієнт розімкнутого контуру системи.
2. Постійна помилка подавлення $e_в(¥)$, що виникає в сталому режимі при $q = \nu_у$, обернено пропорційна передатному коефіцієнту керуючого пристрою $e_B(\infty) = \frac{aq!}{k_y} = const \cdot$
3. Якщо порядок астатизму n_y регулятора більше показника *q* впливу, то стале значення помилки $e_з(¥) = 0$ і $e_в(¥) = 0$.
4. Якщо порядок астатизму *n* менше показника *q*, то $e_з(¥) = \infty$ і $e_в(¥) = \infty$.

Перехідні процеси в статичній і астатичній системах при східчастій і лінійній зміні впливу, що задає.



8.4. Метод коефіцієнтів помилок

Даний метод застосовується, коли вхідний сигнал *x(t)* описується довільною функцією часу.

Передатна функція замкнутої системи щодо сигналу помилки за впливом, що задає, має вигляд:

$$W_{EЗ}(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)},$$

звідки можна знайти вираз для зображення сигналу помилки *E(p)*:

$$E(p) = X(p)W_{EЗ}(p) = X(p)\frac{1}{1 + W_У(p)W_{ОУ}(p)}.$$

Розкладемо передатну функцію за помилкою $W_{EЗ}(p)$ в ряд по зростаючих ступенях p в околиці точки $p = 0$, що відповідає значенням часу $t \to \infty$, тобто сталому значенню помилки при заданому впливі, що задає. Тоді вираження для зображення сигналу помилки *E(p)* можна записати в наступному виді:

$$E(p) = \left[C_0 + C_1 p + \frac{1}{2!}C_2 p^2 + \frac{1}{3!}C_3 p^3 + ... + \frac{1}{n!}C_n p^n \right] X(p).$$

Розкривши дужки, і застосувавши зворотне перетворення Лапласа до даного вираження, одержимо оригінал сигналу помилки:

$$e(t) = C_0 x(t) + C_1 x'(t) + \frac{C_2}{2!}x''(t) + \frac{C_3}{3!}x'''(t) + ... + \frac{C_n}{n!}x^{(n)}(t),$$

де коефіцієнти C_0, C_1, C_2, … називають коефіцієнтами помилок. Визначення коефіцієнтів помилок можна виконувати двома способами:

- по формулах розкладання функції $W_{EЗ}(p)$ в ряд Тейлора:

$$C_0 = [W_{EЗ}(p)]_{p=0}, \qquad C_1 = \left[\frac{dW_{EЗ}(p)}{dp} \right]_{p=0},$$

$$C_2 = \left[\frac{d^2 W_{EЗ}(p)}{dp^2} \right]_{p=0}, \qquad C_n = \left[\frac{d^n W_{EЗ}(p)}{dp^n} \right]_{p=0}.$$

- діленням чисельника $W_{E3}(p)$ на знаменник, розташовуючи член полінома в порядку зростання ступенів.

Коефіцієнт C_0 прийнято називати коефіцієнтом статичної або позиційної помилки; коефіцієнт C_1 - коефіцієнтом швидкісної помилки; C_2 - коефіцієнтом помилки від прискорення.

У статичних системах коефіцієнт C_0 відмінний від нуля. У системах з астатизмом першого порядку $C_0=0$, $C_1\neq0$. У системах з астатизмом другого порядку $C_0 = C_1 = 0$, $C_2\neq0$.

Збільшення числа інтегруючих ланок у системі приводить до нульових значень декількох коефіцієнтів помилок, але при цьому ускладнюється забезпечення стійкості системи.

Якщо вплив, що задає, має обмежене число похідних, відмінних від нуля, то ряд має необмежене число членів.

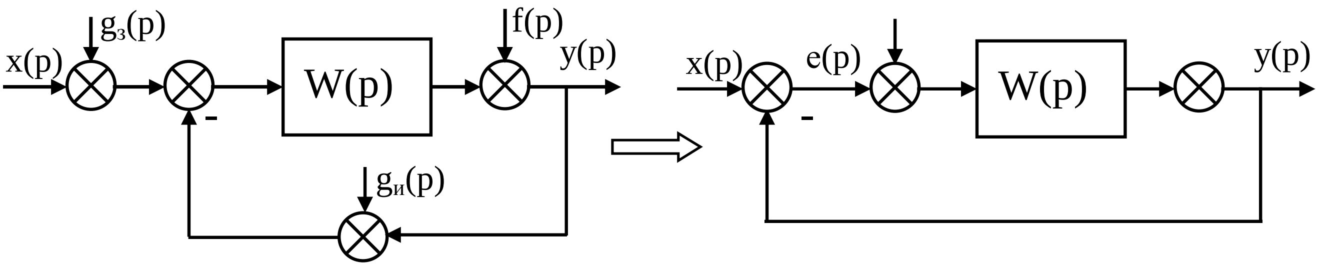
Метод коефіцієнтів помилок застосовується при порівняно повільно мінливих впливах. Цей метод розглядався вище для впливу, що задає, x(t), але він застосовний і для оцінки точності системи при наявності збурювання f(t).

8.5. Точність при гармонічних впливах

При зміні зовнішнього впливу (що задає, або що обурює) за гармонійним законом керована величина й сигнал помилки системи також змінюються за гармонійним законом. Тому *точність системи при гармонічному впливі* оцінюють відношенням амплітуди сигналу помилки до амплітуди зовнішнього впливу: чим менше це відношення, тим краще якість системи.

Розглянемо основні співвідношення й закономірності, що характеризують точність виконання автоматичною системою функцій відтворення корисних і придушення шкідливих зовнішніх впливів.

Нехай на типову систему впливають вплив, що задає, *x(t)*, основний вплив, що обурює, *f(t)*, прикладений до виходу об'єкта, а також додаткове збурювання (перешкода) $g(t)=g_и(t)+g_з(t)$, що враховує випадкові флуктуації, що виникають у що задає й вимірювальному елементах, а також у каналі зворотного зв'язку.



$$W(p)=W_У(p)W_{ОУ}(p) \qquad g(p)=g_з(p)+g_и(p)$$

Перешкода $g_з(p)$, прикладена до входу системи, сприймається системою як вплив, що задає, і тому створює додаткову помилку відтворення.

$$|W_{EЗ}(p)|=\frac{e(p)}{x(p)}=\frac{e(p)}{f(p)}=\frac{y(p)}{f(p)}=\left|\frac{1}{1+W(p)}\right|$$

$$|W_З(p)|=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{e(p)}{g(p)}=\frac{y(p)}{g(p)}=\left|\frac{W(p)}{1+W(p)}\right|$$

Переходячи від передатних функцій до відповідних частотних функцій, узятим за модулем, можна знайти відношення амплітуд вхідних і вихідних сигналів у режимі сталих гармонічних коливань:

$$|W_{EЗ}(jw)|=\frac{e_m}{x_m}=\frac{e_m}{f_m}=\frac{y_m}{f_m}=\left|\frac{1}{1+W(jw)}\right|; \qquad (1)$$

$$|W_З(jw)|=\frac{y_m}{x_m}=\frac{e_m}{g_m}=\frac{y_m}{g_m}=\left|\frac{W(jw)}{1+W(jw)}\right|. \qquad (2)$$

При відомих частоті й амплітуді зовнішнього впливу по формулах (1) і (2) можна обчислити амплітуди розглянутих вихідних сигналів: помилки e_m й керованої величини y_m.

З вираження (1) випливає, що

на кожній фіксованій частоті $\omega_в$ амплітуда сигналу помилки обернено пропорційна величині $|1+W(jw)|$.

Ця закономірність аналогічна залежності статичної помилки від передатного коефіцієнта розімкнутого контуру.

Проаналізуємо в загальному виді властивості АЧХ $|W_{E3}(jw)|$ і $|W_3(jw)|$, розглядаючи їх як відношення модулів чисельника й знаменника.

Врахуємо, як змінюється в загальному випадку АФЧХ $W(jw)$ розімкнутого контуру, що входить у вираження (1) і (2). В контур більшості реальних систем входить звичайно кілька інерційних ланок, то АФЧХ $W(jw)$ проходить через *(n-m)* квадрантів (чвертей) (рис. 1). При цьому модуль вектора $W(jw)$ із зростанням частоти зменшується від k (для статичної системи) чи від ∞ (для астатичної системи) до нуля, а кут повороту вектора зміняється відповідно від нуля чи від $-p/2$ до $(n\text{-}m)p/2$, де n - порядок знаменнику, а m - порядок чисельнику передатної функції.

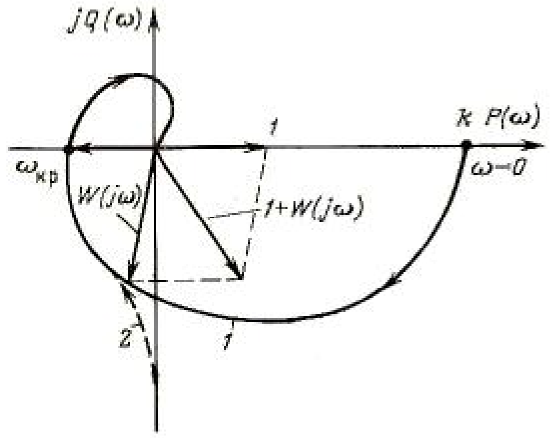


Рисунок 1. АФЧХ розімкнутого контуру системи

Аналізуючи зміни векторів (див. рис. 1), неважко встановити, що знаменник $|1+W(jw)|$, що входить у вираження (1) і (2), у міру росту частоти спочатку зменшується до деякого значення, меншого одиниці, а потім збільшується й прагне до одиниці. Отже, амплітудні характеристики $|W_{E3}(jw)|$ й $|W_3(jw)|$ мають при деякій частоті w_P максимум - резонансний пік (рис. 2). Резонансна частота ω_p приблизно дорівнює частоті w_p, при якій вектор $W(jw)$ повернуть на кут - 180°. Наявність в амплітудних характеристик $|W_{E3}(jw)|$ і $|W_3(jw)|$ резонансного піка свідчить про коливальність системи.

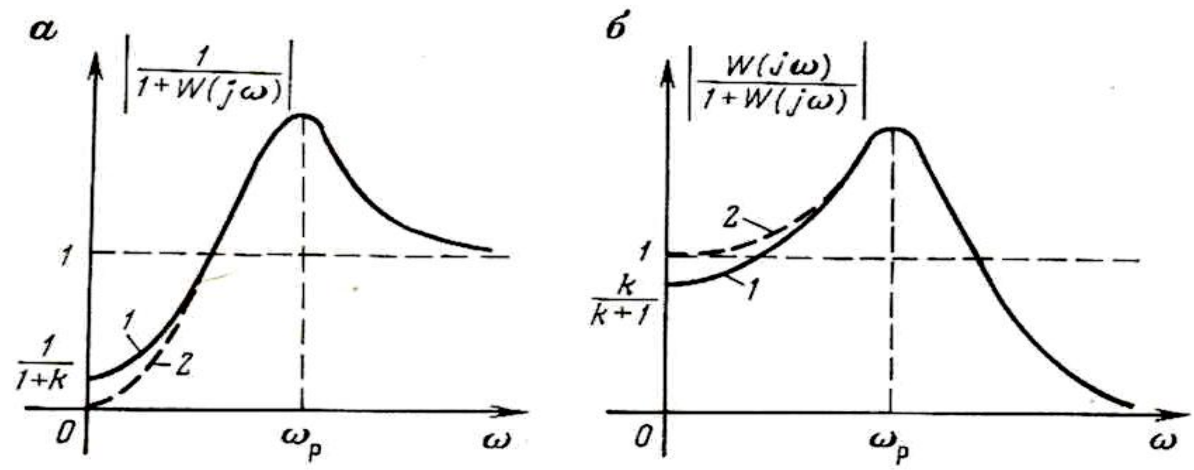


Рисунок 2. АЧХ типової системи (1-статичної, 2-астатичної)

Аналізуючи форму характеристики $|W_{E3}(jw)|$ (рис. 2, а) можна зробити наступні висновки:

1. Якщо частота ω_y зовнішнього впливу *x(t)* або *f(t)* мала $(w_B << w_P)$, то амплітуда сигналу помилки набагато менше амплітуди впливу, тобто система добре виконує функції відтворення й подавлення.

2. Якщо частота ω_y зовнішнього впливу *x(t)* або *f(t)* велика$(w_B >> w_P)$, то амплітуда сигналу помилки дорівнює амплітуді впливу, тобто система марна. Це пояснюється тим, що при швидких змінах зовнішніх впливів система через інерційність об'єкту і регулятора не встигає реагувати на ці впливи.

3. Якщо частота впливів близька або дорівнює резонансній частоті $(w_B \approx w_P)$, то амплітуда сигналу помилки більше амплітуди впливів, тобто система керування навіть шкідлива.

Аналізуючи форму характеристики $|W_3(jw)|$ (рис.2, б) можна зробити наступні висновки:

1. Низькочастотні перешкоди, що виникають у що задає або вимірювальному елементі, створюють більшу помилку відтворення, амплітуда якої приблизно дорівнює амплітуді перешкоди.

2. Якщо частота перешкоди близька до резонансної частоти, то амплітуда сигналу помилки навіть перевищує амплітуду перешкоди.

3. Якщо частота перешкоди велика, то амплітуда помилки мала, тому що перешкода гаситься при проходженні через сукупність інерційних ланок з еквівалентної АФЧХ $W(jw)$.

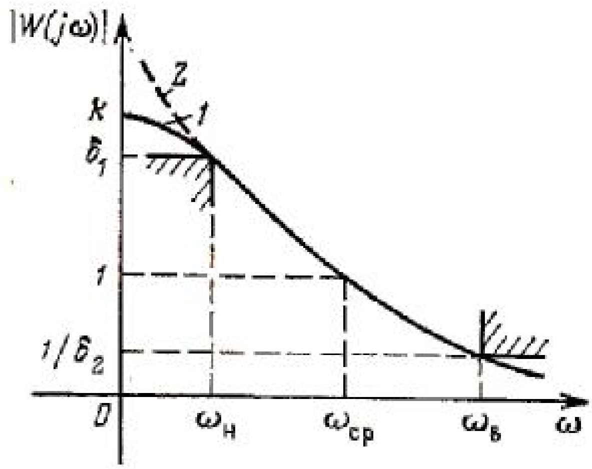
На основі виявлених закономірностей можна сформулювати вимоги до виду амплітудної характеристики розімкнутого контуру, з огляду на, що на малих частотах функція $|W(jw)|>>1$, і тому можна зневажити одиницею в знаменнику вираження (1):

$$|W_{E3}(jw)| \approx 1/|W(jw)| \quad (3)$$

На високих частотах функція $|W(jw)|<<1$ й тоді

$$|W_3(jw)| \approx |W(jw)| \quad (4)$$

Наближені співвідношення (3) і (4) можна використовувати для вибору форми й конкретного розташування характеристики $|W(jw)|$ по відомій частоті й амплітуді зовнішнього впливу й максимально припустимій амплітуді сигналу помилки. Наприклад, якщо на деякій низькій частоті $\omega_н$



максимальна амплітуда сигналу помилки e_m повинна бути у d_1- раз менше амплітуди впливу x_m, то характеристика розімкнутого контуру (рис.) повинна проходити не нижче точки з координатами ($\omega_н$, d_1). Якщо, крім цього, необхідно, щоб амплітуда складової помилки, створюваною високочастотною перешкодою $g(t)$, була в d_2- раз менше амплітуди перешкоди, то функція $|W(jw)|$ повинна проходити не вище точки з координатами ($\omega_в$, d_2).

Розглянемо вплив закону регулювання на форму АЧХ системи.

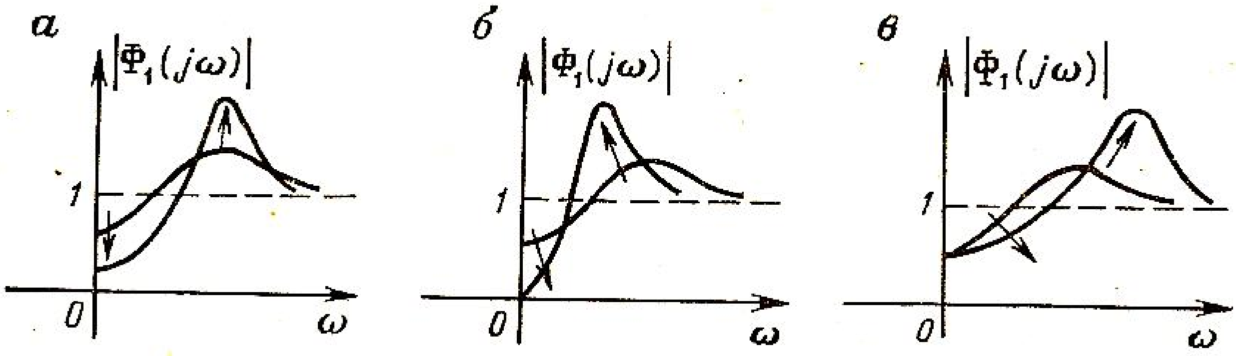


Рисунок 4. Вплив пропорційної (а), інтегральної (б) і диференціальної (в) складових на форму АЧХ системи.

На рис. 4 товстою лінією зображені графіки функції $|W_{E3}(jw)|$ при пропорційному законі регулювання. Тонкими лініями показані ці ж характеристики при різних сполученнях коефіцієнтів пропорційної, інтегральної й диференціальної складової ПІД -Закону регулювання:

$$W_p(p) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + T_Д p\right) = k_П + \frac{k_И}{p} + k_Д p$$

Збільшення коефіцієнта $k_П$ поліпшує точність системи на низьких частотах, але підвищує коливальність системи (рис.4, а).

Додавання інтегральноїої складової до пропорційного приводить до зменшення помилки на дуже низьких частотах, але зміщає резонансний пік в область низьких частот і збільшує коливальність системи (рис. 4, *б)*.

Введення в пропорційний закон регулювання диференціальної складової поліпшує точність системи на низьких частотах, однак зміщає резонансний пік в область високих частот і збільшує коливальність системи (рис. 4, в).

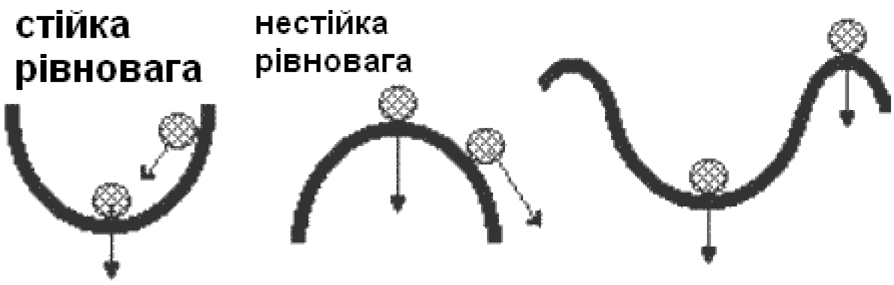
На закінчення узагальнимо викладені залежності сигналу помилки від властивостей системи у вигляді фундаментальної закономірності:

точність відтворення системою керування впливу, що задає, і точність подавлення нею зовнішніх збурювань тим краще, чим більше коефіцієнт передачі керуючого пристрою.

9. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ.

Однією з найважливіших характеристик САУ є стійкість. Причому, якщо показники точності визначають ступінь корисності і ефективності системи, то від стійкості залежить працездатність системи. Система, що не володіє стійкістю, взагалі не здатна виконувати функції керування і має нульову або навіть негативну ефективність (тобто система шкідлива). Нестійка система може привести керований об'єкт в аварійний стан. Тому проблема стійкості систем є одній з центральних в ТАУ.

Фізичний сенс поняття стійкості. Стійкість автоматичної системи - це властивість системи повертатися в початковий стан рівноваги після припинення впливу, що вивів систему з цього стану рівноваги. Нестійка система не повертається в початковий стан, а безперервно віддаляється від нього.



Математична суть стійкості і нестійкості. Згідно даному вище фізичному визначенню стійкість визначається характером руху системи, коли впливи, що вивели її із стану рівноваги, припинили діяти або змінюватися в часі. Такий рух системи називають ***вільним***. Він відбувається за рахунок внутрішньої енергії самої системи і залежить тільки від її властивостей (параметрів).

Вільний рух лінійної або лінеаризованої САУ описується однорідним диференціальним рівнянням

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + ... + a_n y(t) = 0 \qquad (1)$$

$y(t) = y_c(t)$ – вільна складова вихідної величини системи.

Вимушена складова вихідної величини, що залежить від виду зовнішнього впливу і відповідно від правої частини диференціального рівняння системи, на стійкість лінійної системи не впливає.

З математичної точки зору система є стійкою, якщо вільна складова $y_c(t)$ перехідного процесу з часом прагне до нуля: $\lim\limits_{t \to \infty} y_{св}(t) = 0$.

Якщо вільна складова необмежено зростає: $\lim\limits_{t \to \infty} y_{св}(t) = \infty$, то система не стійка.

Якщо вільна складова не прагне ні до нуля, ні до нескінченності, то система знаходиться на межі стійкості: $\lim\limits_{t \to \infty} y_{св}(t) = const$.

Вільна складова вихідної величини може бути знайдена як розв’язання відповідного однорідного диференціального рівняння (1) у вигляді суми:

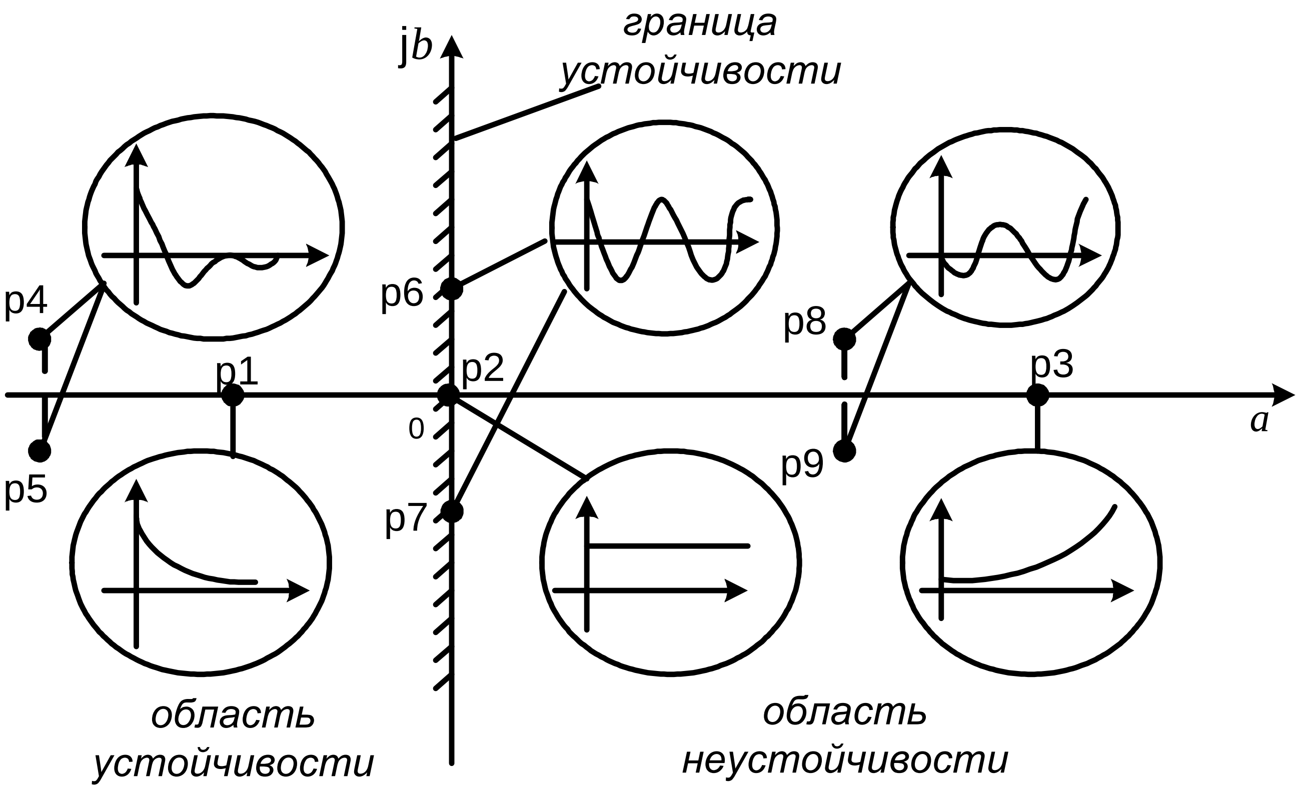
$$y_{св}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t} \qquad (2)$$

де C_k – постійні інтеграції, залежні від початкових умов;

p_k - корні характеристичного рівняння $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$

Корінь характеристичного рівняння може бути дійсним ($p_k = a_k$), уявними ($p_k = jb_k$) і комплексними $p_k = a_k \pm jb_k$, причому комплексні корені завжди попарно зв'язані між собою.

Вільна складова (2) при часі $t \to \infty$ прагне до нуля лише в тому випадку, якщо кожен доданок вигляду $C_k e^{p_k t} \to 0$. Характер цієї функції часу залежить від виду кореня p_k . Розглянемо всі можливі випадки розташування кореня p_k на комплексній площині і відповідні їм функції $y_c(t)$, які показані у середині кіл.



1. Кожному дійсному кореню p_k = a_k в рішенні (2) відповідає доданок вигляду

$$y_{св}(t) = C_k e^{a_k t}. \quad (3)$$

- якщо $a_k < 0$ (корінь p_1), то функція $y_c(t)$ при $t \to \infty$ прагне до нуля і є убуваючою експонентою;

- якщо $a_k > 0$, то функція $y_c(t)$ з часом необмежено зростає - зростаюча експонента (корінь p_3);

- якщо $a_k = 0$ (корінь p_2), то $y_c(t)$ залишається постійною - пряма паралельна осі часу t.

2. Кожній парі комплексно зв'язаних коренів $p_k = a_k + jb_k$ та $p_{k+1} = a_k - jb_k$ відповідає вирішення рівняння (1) наступного вигляду:

$$y_c(t) = 2C_k e^{a_k t} \sin(b_k t + j_k). \quad (4)$$

Функція $y_c(t)$ є синусоїдою з частотою b_k і амплітудою, що змінюється в часі як експонента.

- $a_k < 0$ (корінь p_5 та p_4) – коливальна складова затухатиме.
– $a_k > 0$ (корінь p_8 та p_9) – амплітуда коливань необмежено зростає.
– $a_k = 0$ (корінь p_6 та p_7) – обидва корені уявні: $p_k = +jb_k$ и $p_{k+1} = -jb_k$, то $y_c(t)$ є незгасаючою синусоїдою з частотою b_k.

На підставі проведеного аналізу коренів характеристичного рівняння можна сформулювати **<u>загальну умову стійкості</u>**:

- для стійкості лінійної САК необхідне і достатньо, щоб дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння системи були негативними.

- для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння знаходилися в лівій півплощині комплексної площини коренів.

Наявність хоч би одного правого кореня робить систему нестійкою.

Стійкість системи залежить тільки від виду кореня характеристичного рівняння і не залежить від характеру зовнішніх впливів на систему. Стійкість є внутрішня властивість системи, що властива їй незалежно від зовнішніх умов.

Уявна вісь jb є межею стійкості в площині коренів. Якщо характеристичне рівняння має одну пару чисто уявних коренів ($p_k = +jb_k$ и $p_{k+1} = -jb_k$), а решта усіх коренів знаходиться в лівій напівплощині, то в системі встановлюються незгасаючі гармонійні коливання з круговою частотою $w = |b_k|$. Це коливальна межа стійкості.

Точка $b = 0$ на уявній осі відповідає нульовому кореню. Якщо рівняння має один нульовий корінь, то система знаходиться на аперіодичній межі стійкості. Якщо таких кореня два, то система нестійка.

9.1. Критерій стійкості Гурвіца.

Автоматична система управління, що описується характеристичним рівнянням

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

стійка, якщо при $a_0 > 0$ позитивні всі визначники $D_1, D_2, \ldots, D_n$ виду

$$D_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2i-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & a_{i-2} & a_i \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Якщо хоч би один з визначників, які називають визначниками Гурвіца, негативний, то система нестійка.

Визначники Гурвіца складають таким чином: на головній діагоналі записують всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_i (в порядку зростання індексу), потім в кожному стовпці вище за діагональні елементи записують коефіцієнти з послідовно зростаючими індексами, а нижче - з послідовно убуваючими індексами; на місце з коефіцієнтами з індексами більшими за n або меншими нуля проставляють нулі. При цьому кожен i-й визначник виходить розміром $i \times i$.

Якщо головний визначник дорівнює нулю $\Delta_n = 0$, а решта всіх визначників позитивна, то система знаходиться на межі стійкості.

Оскільки останній стовпець головного визначника Δ_n містить завжди тільки один елемент a_n, відмінний від нуля, то згідно відомій властивості визначників: $\Delta_n = a_n * \Delta_{n-1}$.

Умова $\Delta_n = 0$ розпадається на два: $a_n = 0$ або $\Delta_{n-1} = 0$.

Умова $a_n = 0$ відповідає один нульовий корінь, тобто аперіодична межа стійкості, а умові $\Delta_{n-1} = 0$ – пара уявних коренів, тобто коливальна межа стійкості.

9.2. Критерій стійкості Рауса.

Його доцільно застосовувати для систем вище за четвертий порядок. Для цього складають таблицю з коефіцієнтів характеристичного рівняння:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_n = 0.$$

У першому рядку таблиці (i = 1) записують коефіцієнти рівняння з парними індексами, в другому рядку (i = 2) – коефіцієнти з непарними індексами, в подальших рядках ($i \geq 3$) розміщені коефіцієнти Рауса, отримані в результаті ділень різниці перехресних перемножень коефіцієнтів двох попередніх рядків на коефіцієнт першого стовпця попереднього рядка:

$$r_{ik} = \frac{r_{i-1,1} * r_{i-2,k+1} - r_{i-2,1} * r_{i-1,k+1}}{r_{i-1,1}},$$

де i – номер рядка, k – номер стовпця.

Система автоматичного керування стійка, якщо є позитивними коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса, включаючи a_0 і a_1.

Якщо не всі коефіцієнти стовпця позитивні, то система нестійка. При цьому число змін знаку серед цих коефіцієнтів відповідає числу правих коренів характеристичного рівняння.

Рядок	Стовпець					
	1	2	3	4	5	…
1	$r_{11} = a_0$	$r_{12} = a_2$	$r_{13} = a_4$	$r_{14} = a_6$	…	…
2	$r_{21} = a_1$	$r_{22} = a_3$	$r_{23} = a_5$	$r_{24} = a_7$	…	…
3	$r_{31} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$r_{32} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$r_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$r_{34} = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1}$	…	…
4	$r_{41} = \frac{r_{31} a_3 - a_1 r_{32}}{r_{31}}$	$r_{42} = \frac{r_{31} a_5 - a_1 r_{33}}{r_{31}}$	$r_{43} = \frac{r_{31} a_7 - a_1 r_{34}}{r_{31}}$	…	…	…
5	$r_{51} = \frac{r_{41} r_{32} - r_{31} r_{42}}{r_{41}}$	$r_{52} = \frac{r_{41} r_{33} - r_{31} r_{43}}{r_{41}}$	…	…	…	…
...	…	…	…	…	…	…
n+1	…	…	…	…	…	…

9.3. Критерій Михайлова.

Критерій Михайлова, як і критерій Гурвіца і Рауса, заснований на аналізі характеристичного рівняння системи, тому з його допомогою можна судити про стійкість замкнутих і розімкнених систем.

Ліва частина характеристичного рівняння називається характеристичним поліномом і має вигляд:

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_n$$

Підставивши в цей поліном замість змінної p чисто уявний корінь jw: p ® jw отримаємо функцію комплексної змінної:

$$F(jw) = a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + a_2(jw)^{n-2} +…+ a_n.$$

Функцію $F(jw)$ можна представити у вигляді суми дійсної і уявної частини: $F(jw) = P(w)+jQ(w)$.

Дійсна частина $P(w)$ містить тільки парні ступені ω:

$$P(w) = a_n – a_{n-2}w^2 + a_{n-4}w^4 - …$$

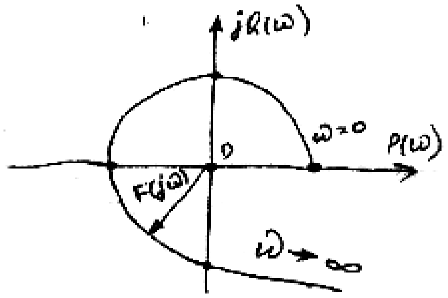
Уявна частина містить тільки непарні ступені:

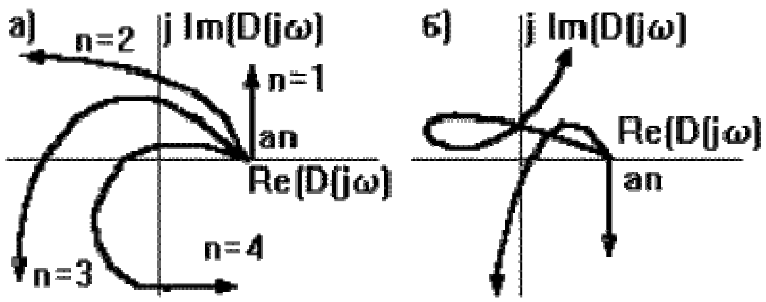
$$Q(w) = a_{n-1}w – a_{n-3}w^3 + …$$

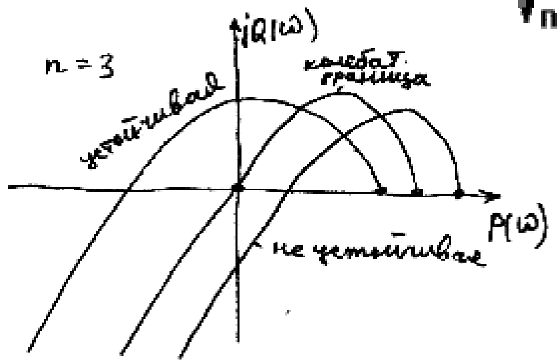
Кожному значенню w відповідає комплексне число, яке може бути зображено у вигляді вектора на комплексній площині. Якщо тепер змінювати w від 0 до ∞, то кінець вектора $F(jw)$ опише деяку криву, яка називається характеристичною кривою або годографом Міхайлова.

Критерій Міхайлова:

Автоматична система управління, що описується рівнянням n-го порядку, стійка, якщо при зміні w от 0 до ¥ характеристичний вектор системи $F(jw)$ обернеться проти годинникової стрілки на кут $n*\frac{p}{2}$, не звертаючись при цьому в нуль. Це означає, що характеристична крива стійкої системи винна при зміні w від 0 до ∞ пройти послідовно n чвертей.



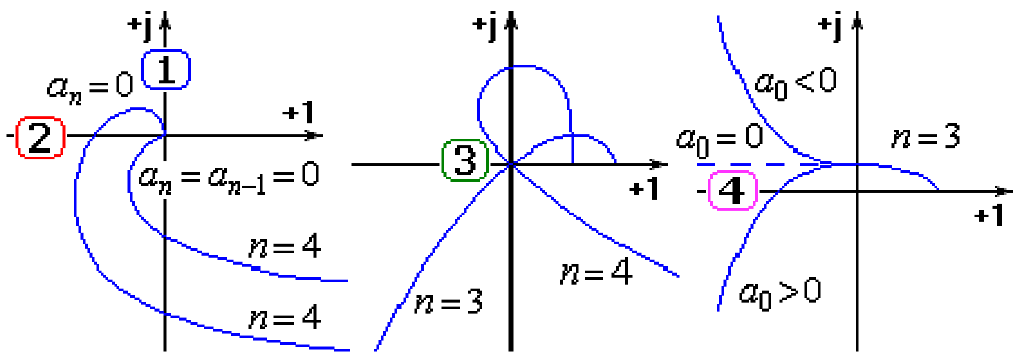




Крива *F(jw)* завжди починається в точці на дійсній осі, віддаленій в позитивному напрямі від початку координат на величину a_n. Характеристичні криві, що відповідають стійким системам, мають плавну спіралеподібну форму і йдуть в нескінченність в тій чверті, номер якої дорівнює порядку характеристичного рівняння. Якщо характеристична крива проходить *n* чвертей непослідовно, або проходить менше число чвертей, то система нестійка.

Якщо крива *F(jw)* проходить через початок координат, то система знаходиться на межі стійкості. Якщо *F(jw)*= 0 при *w* = 0 - аперіодична межа стійкості; якщо *F(jw)*=0 при $w \neq 0$ - коливальна межа.

<u>Визначення типу межі стійкості по вигляду годографа Міхайлова</u>



1. Астатизм першого порядку - "аперіодична" межа стійкості.

2. Астатизм другого порядку - "аперіодична" межа стійкості.
3. "Коливальна" межа стійкості.
4. Межа стійкості типу "нескінченний корінь".

Слідство з критерію Міхайлова:

Система стійка, якщо дійсна і уявна частини характеристичної функції $F(jw)$ *звертаються в нуль по черзі, тобто корені рівнянь* $P(w)=0$ і $Q(w)=0$ *перемежаються.*

9.4. Критерій Найквіста

Основні переваги критерію Найквіста:

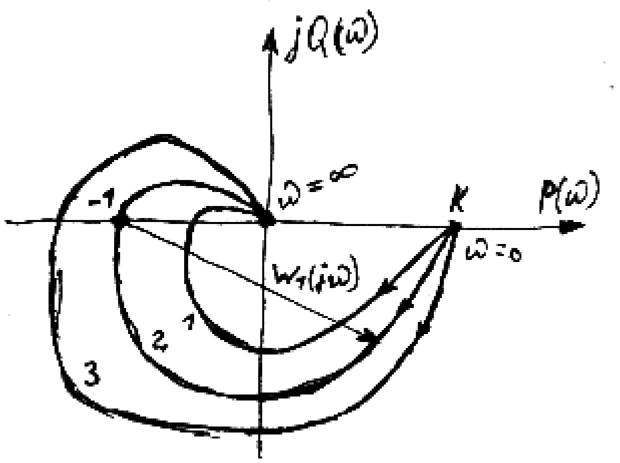
1. Основна відмінність і гідність даного критерію від критеріїв Гурвіца, Рауса і Міхайлова в тому, що критерій Найквіста дозволяє судити про стійкість замкнутої системи по амплитудно-фазовій характеристиці розімкненого контура системи.
2. Критерій застосовується в тих випадках, коли диференціальні рівняння системи або окремих її ланок невідомі, але відомі частотні характеристики, отримані, наприклад, експериментально.
3. Використання критерію не так різко ускладнюється при збільшенні порядку характеристичного рівняння, як це має місце при застосуванні алгебраічних критеріїв.
4. Критерій Найквіста ще в більшому ступені, чим критерій Гурвіца, дозволяє безпосередньо встановити вплив на стійкість системи різних її ланок.
5. Критерій дає уявлення про ступінь стійкості системи і показує можливі шляхи її поліпшення, якщо в цьому є необхідність.
6. Критерій дозволяє пов'язати дослідження стійкості з подальшим аналізом якості як в сталому, так і в перехідному режимах.

При аналізі стійкості системи по критерію Найквіста можна виділити три випадки:

- система в розімкненому стані стійка;
- система в розімкненому стані нейтральна;
- система в розімкненому стані нестійка.

1. Система в розімкненому стані стійка

Автоматична система керування стійка, якщо АФЧХ $W(jw)$ розімкненого контуру не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.



На рисунку:

1 - стійка система;

2 - система на коливальній межі стійкості;

3 - нестійка система.

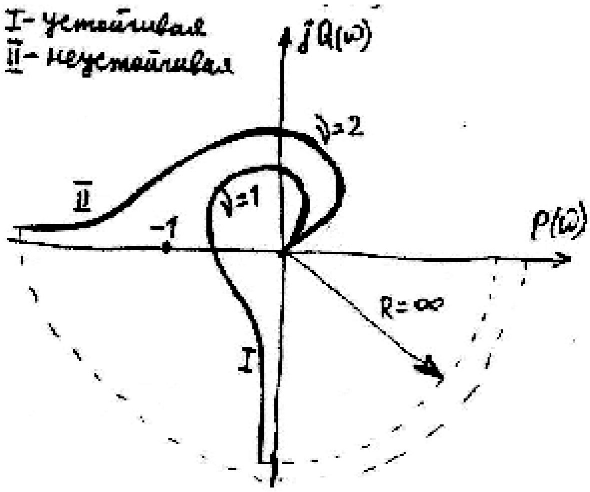
Поняття обхвату точки має деяку невизначеність, із-за чого у випадках складної форми кривої $W(jw)$ можуть виникати ускладнення в розсудках про стійкість системи. Тому застосовується наступний прийом. Треба в думках простежити за рухом вектора $W_1(jw) = 1+W(jw)$, що обертається навколо точки $(-1; j0)$ і що ковзає по кривій $W(jw)$. Кут повороту вектора $W_1(jw)$ рівний π, означає обхват крапки $(-1; j0)$, а кут менший π, - не обхват.

Для вирішення питання про стійкість систем, АФЧХ складної конфігурації, у котрих крива АФЧХ перетинає дійсну вісь лівіше за крапку $(-1; j0)$ кілька разів, можна використовувати правило переходів:

АФЧХ не охоплює крапку $(-1; j0)$, тобто система стійка, якщо при зростанні w різниця між числом позитивних (зверху вниз) і негативних (від низу до верху) переходів АФЧХ через вісь абсцис зліва від крапки $(-1; j0)$ дорівнює нулю.

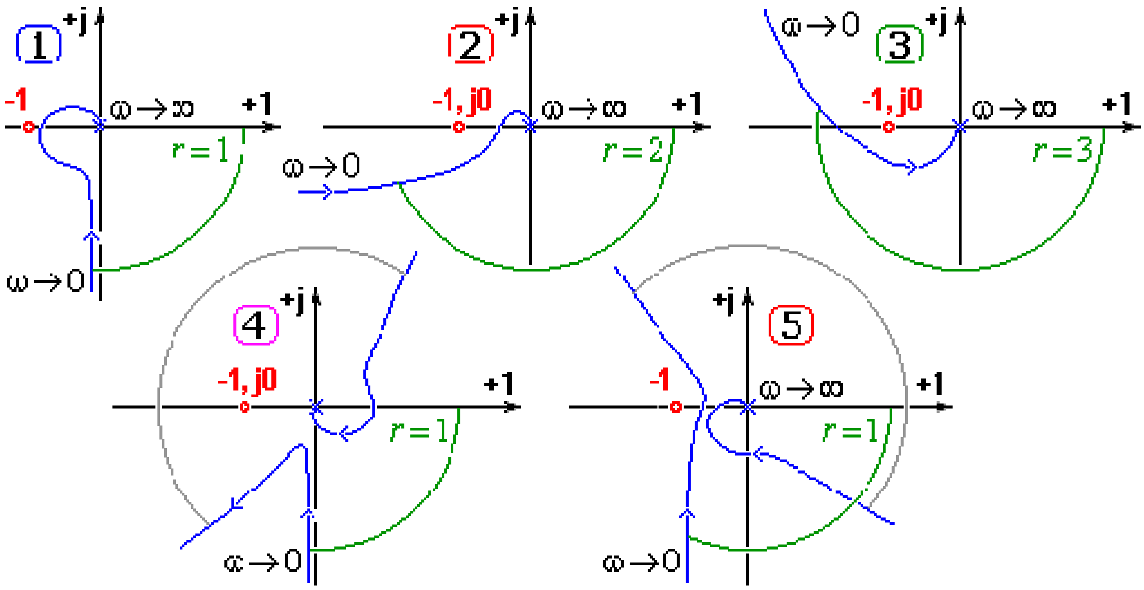
2. Система в розімкненому стані нейтральна

Це системи, що містять інтегруючі ланки в розімкненому контурі.



Якщо система в розімкненому стані нейтральна, то для стійкості системи в замкнутому стані необхідно і достатньо щоб АФЧХ розімкненої системи W(jw), *разом з доповненням її дугою нескінченно-великого радіусу, що починається на позитивному напрямі дійсної осі, не охоплювала крапку з координатами* (-1; j0).

Приклади годографів Найквіста астатичних САУ



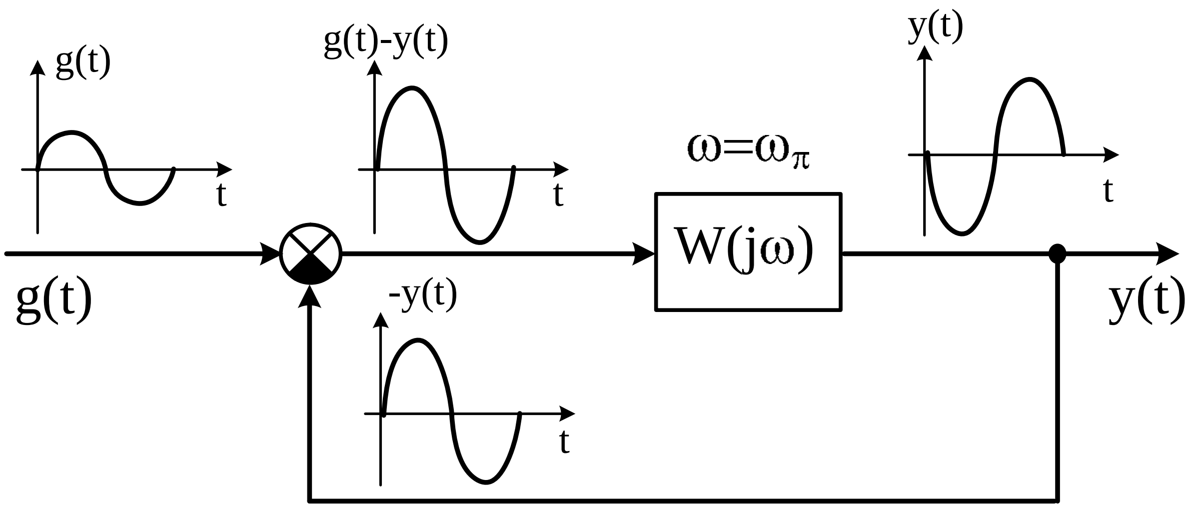
1. Стійка САР з астатизмом першого порядку.
2. Стійка САР з астатизмом другого порядку.
3. Стійка САР з астатизмом третього порядку.
4. Нестійка САР з консервативною ланкою.
5. Стійка САР з консервативною ланкою (корекція виконана фазообертаючою ланкою).

Фізичне трактування критерію Найквіста

Вводять два поняття:

- частота, при якій АЧХ $A(w) = |W(jw)| = 1$ частота зрізу w_{cp};
- частота, при якій ФЧХ $j\,(w) = -\pi$, позначають w_p.

Умова знаходження системи на межі стійкості: $w_{cp} = w_p$



На вході системи діє гармонічний сигнал $g(t)=g_m sinwt$ з малою амплітудою g_m. Хай частота w дорівнює частоті w_p при якій фазове зрушення $j\,(w)$, створюваний ланкою $W(jw)$ рівний $-p$. Тоді сигнал негативного зворотного зв'язку опиниться у фазі з сигналом $g(t)$, і миттєві значення сигналів підсумовуватимуться.

Якщо на частоті $w = w_p$ модуль $|W(j\omega_\pi)| = 1$, тобто $w_{cp} = w_p$, то в контурі системи будуть незгасаючі коливання навіть після зникнення зовнішнього впливу $g(t)$. Система знаходиться на межі стійкості, характеристика $W(jw)$ проходить через точку $(-1; j0)$.

Якщо на частоті $w = w_p$ модуль $|W(j\omega_\pi)| < 1$, то після зникнення зовнішнього впливу коливання в контурі затухнуть. Система стійка, характеристика не охоплює точку $(-1; j0)$.

Якщо на частоті $w = w_p$ модуль $|W(j\omega_\pi)| > 1$, то амплітуда сигналів в контурі необмежено зростатиме. Система нестійка, характеристика *W(jw)* охоплюватиме точку *(-1; j0)*.

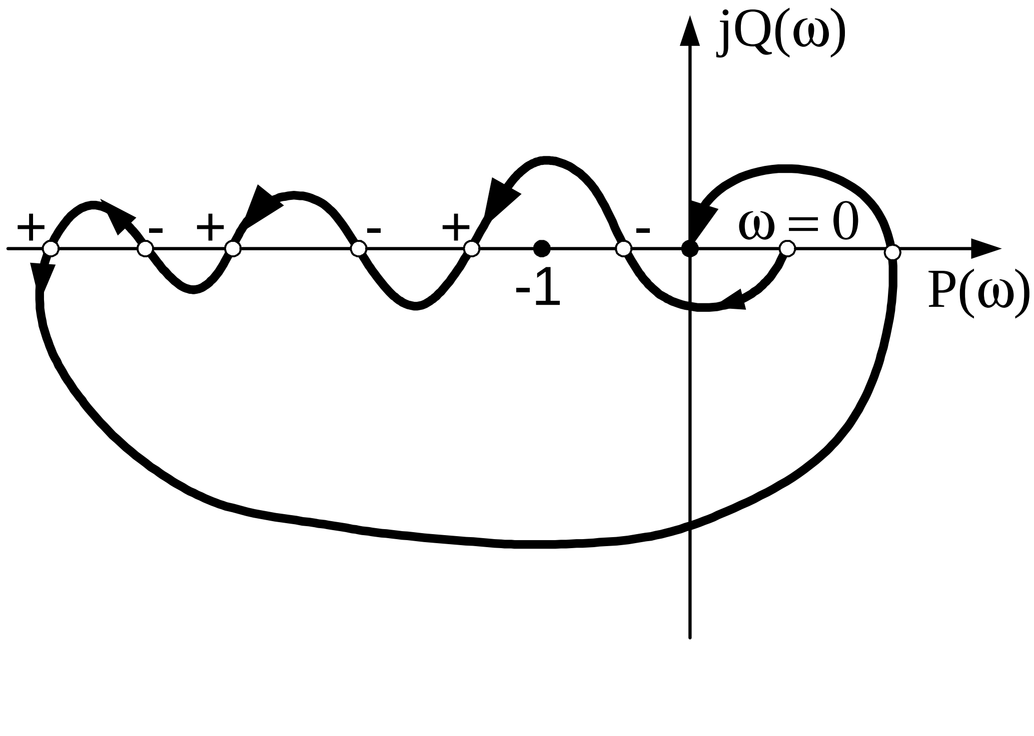
Особлива роль точки *(-1; j0)* – по-перше, в цій точці НЗЗ перетворюється на ПЗЗ; по-друге - є граничною між режимами ослаблення і посилення сигналів ланкою *W(jw)*.

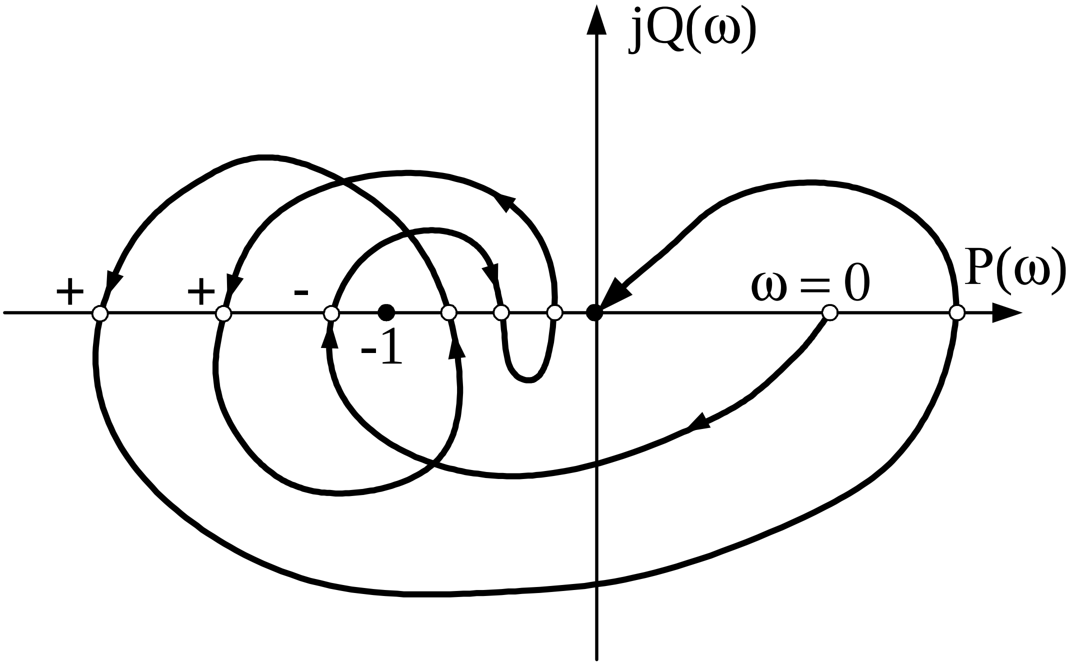
3. Система в розімкненому стані нестійка.

Автоматична система управління стійка якщо АФЧХ W(jw) розімкненого контуру охоплює l/2– раз точку з координатами (-1; j0), де l - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненого контуру.

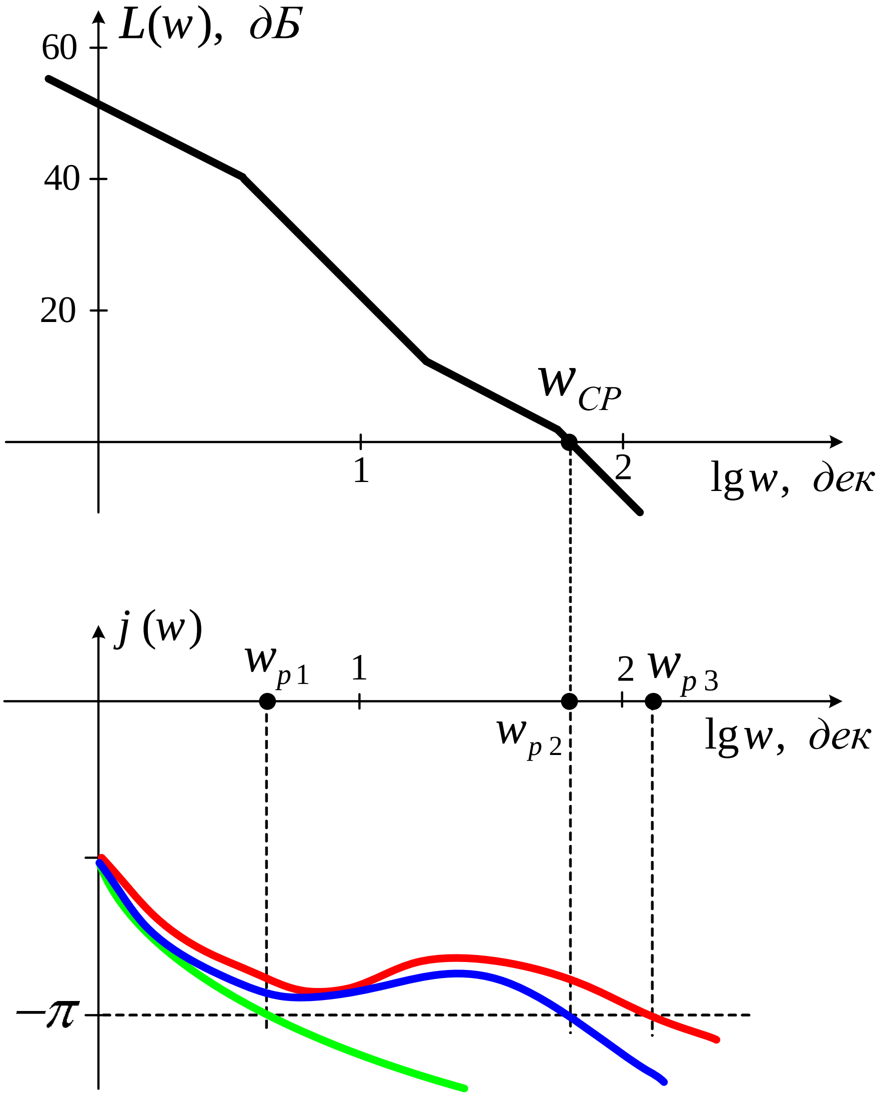
Іншими словами, лівіше за точку (-1; j0) різниця між числом позитивних і числом негативних переходів АФЧХ через вісь абсцис повинно дорівнювати l/2.

Кількість обхватів при цьому можна визначати за вище розглянутим правилом, як різниця між числом позитивних і негативних переходів.





Логарифмічний критерій стійкості Найквіста

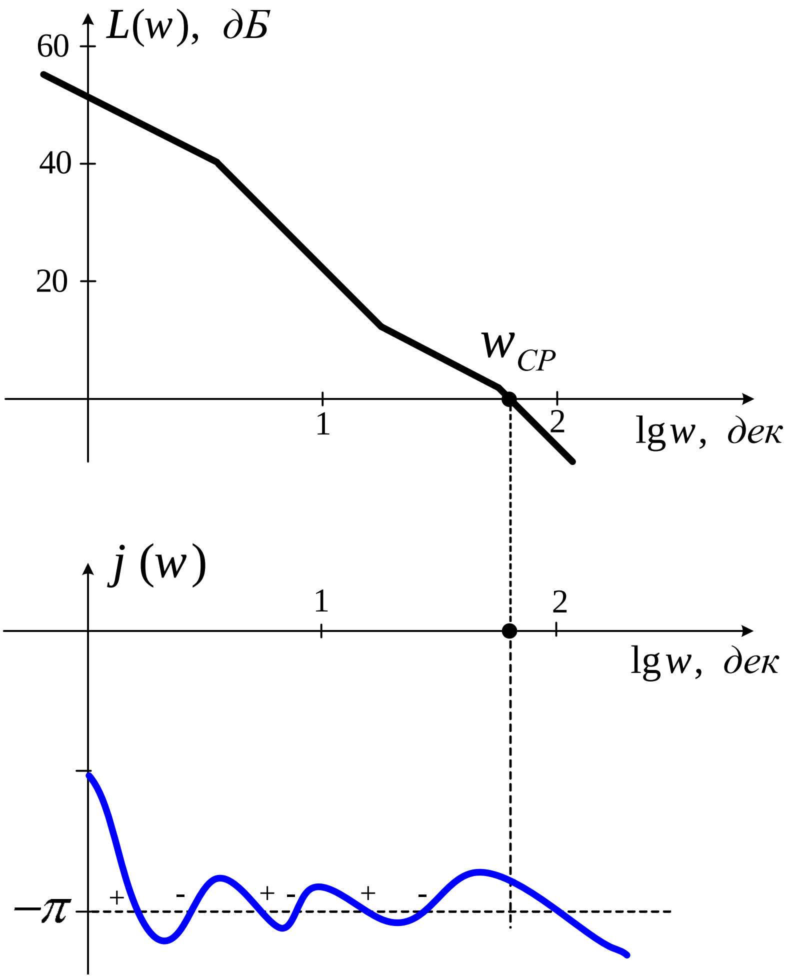


Система стійка, якщо при досягні ФЧХ значення -π ЛАЧХ буде негативною: $\omega_{ср} < \omega_{\pi}$ - система стійка;

$\omega_{ср} = \omega_{\pi}$ - система на межі стійкості;

$\omega_{ср} > \omega_{\pi}$ - система нестійка.

Якщо ФЧХ перетинає рівень *(-p)* кілька разів, то для визначення стійкості використовують правило переходів:



Система стійка, якщо різниця між позитивними і негативними переходами ФЧХ лінії (-p) у інтервалі частот від 0 до $w_{ср}$ дорівнює нулю (ФЧХ повинна перетинати рівень (-p) у інтервалі частот від 0 до $w_{ср}$ парне число разів).

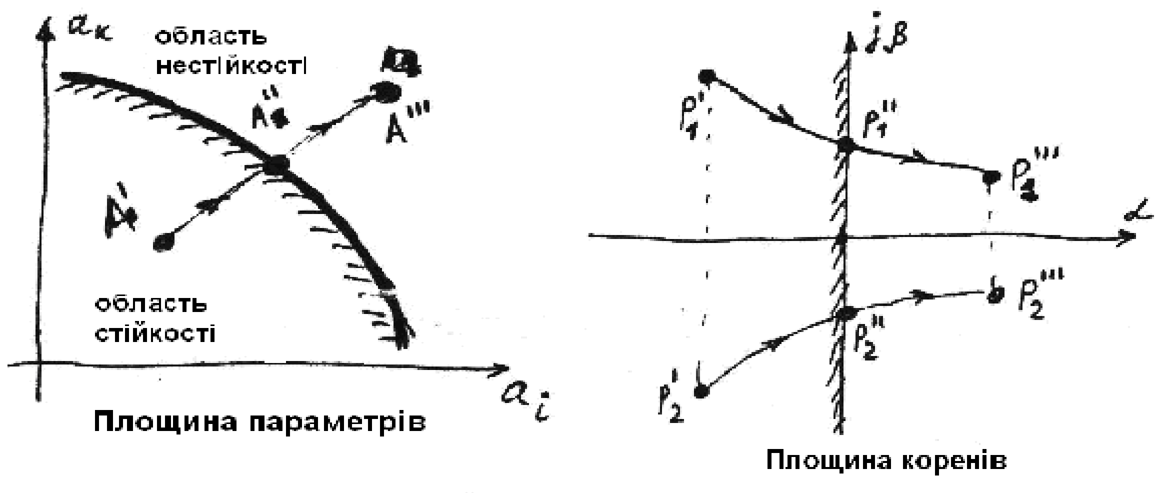
Якщо розімкнений ланцюг нестійкий і має *l* правих коренів, то використовують наступне формулювання логарифмічного критерію Найквіста:

Система стійка, якщо різниця між позитивними і негативними переходами ФЧХ лінії (-p) у інтервалі частот від 0 до $w_{ср}$ дорівнює l/2.

9.5. Загальне поняття про області стійкості

Застосування критеріїв стійкості дозволяє встановити факт стійкості або нестійкості системи, всі параметри якої задані. Проте часто при проектуванні і наладці систем виникає більш загальне завдання аналізу стійкості - визначення допустимих (по умові стійкості) меж зміни деяких параметрів системи. В якості варійованих параметрах зазвичай виступають коефіцієнти передачі і постійні часу керуючого пристрою, які можна цілеспрямовано змінювати при настройці системи. Іноді допустимі межі зміни визначають і для параметрів об'єкту (якщо останні змінюються при роботі системи в процесі експлуатації). Допустимі межі варіювання параметрів системи можна визначити шляхом побудови областей стійкості.

Областю стійкості називають область в просторі варійованих параметрів, кожній точці якої відповідає тільки ліві корені характеристичного рівняння. Область стійкості виділяє зі всіх можливих значень варійованих параметрів лише ті значення, при яких система стійка. Поверхня, що обмежує область стійкості називається межею області стійкості.



На рисунку показана область стійкості, побудована в просторі двох коефіцієнтів характеристичного рівняння a_i і a_k. Кожній точці, що знаходиться нижче заштрихованої кривої (точка А'), відповідає тільки ліві корені, наприклад p_1' и p_2'. Будь якій крапці, що знаходиться вище за криву (наприклад точка А”) обов'язково відповідає хоч би один дійсний або пара комплексних коренів, розташованого справа (корені p_1”’ и p_2”’).

Межею області стійкості в даному прикладі є заштрихована крива. Кожній точці цієї кривої (наприклад, А”) відповідає пара чисто уявного коріння (точки $p1$” і $p2$”).

Межа області стійкості в принципі може бути знайдена шляхом багатократного застосування одного з критеріїв стійкості, при різних значеннях варійованих параметрів. Проте ефективнішим способом відшукання меж областей стійкості є метод D-разбиения.

Метод D-розбиття.

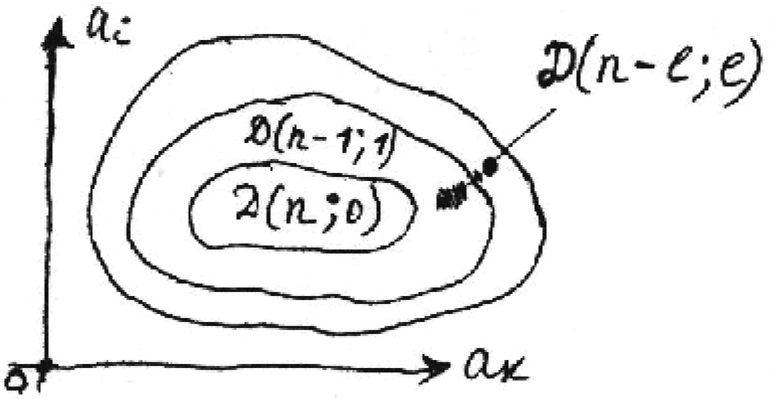
Нехай система описується характеристичним рівнянням:

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} +\ldots+ a_n = 0.$$

Розташування всіх n коренів характеристичного рівняння на комплексній площині a - jb залежить від значень коефіцієнтів a_0, a_1, a_2,…, a_n. У загальному випадку в просторі варійованих параметрів (коефіцієнтів) існують такі значення коефіцієнтів, при якому l корені розташовані справа, а $(n - l)$ кореня - зліва від уявної осі jb. Сукупність всіх таких значень утворює в просторі коефіцієнтів область, яку можна позначити D $(n–l; l)$. Існують області з іншим розподілом коренів:

$D\ (n–l – 1; l + 1)$

$D\ (n–l – 2; l + 2)$



Область *D (n; 0)* є областю стійкості. Процес побудови в просторі параметрів (або коефіцієнтів) областей з різним розподілом коренів називається *D-розбиттям*. Лінії, що розмежовують ці області називаються *кривими D-розбиття*.

Перехід з однієї області в іншу область простору коефіцієнтів відповідає переходу одного дійсного або пари комплексних коренів через уявну вісь $j\beta$. Отже, кожній точці, що знаходиться на межі між двома областями, відповідають або нульовий корінь $p = 0$, або пара чисто уявних коренів $p = \pm j\beta$. Тому криву *D-розбиття* можна розглядати як відображення уявної осі площини коріння. Вказана особливість кривих *D-розбиття* використовується при відшуканні їх рівнянь. Для цього в характеристичне рівняння підставляють $p = j\beta$ або $p = j\omega$ і розв'язують рівняння щодо варійованих параметрів. Сукупність значень варійованих параметрів, відповідних всім можливим значенням ω (від $-\infty$ до $+\infty$), дає всі точки кривої *D-розбиття*. Виділення області *D (n; 0)* серед решти областей проводять за допомогою спеціальної процедури - штрихування кривих *D-розбиття*..

Побудова області стійкості по одному параметру.

Хай варійований параметр l входить в характеристичне рівняння системи лінійно:

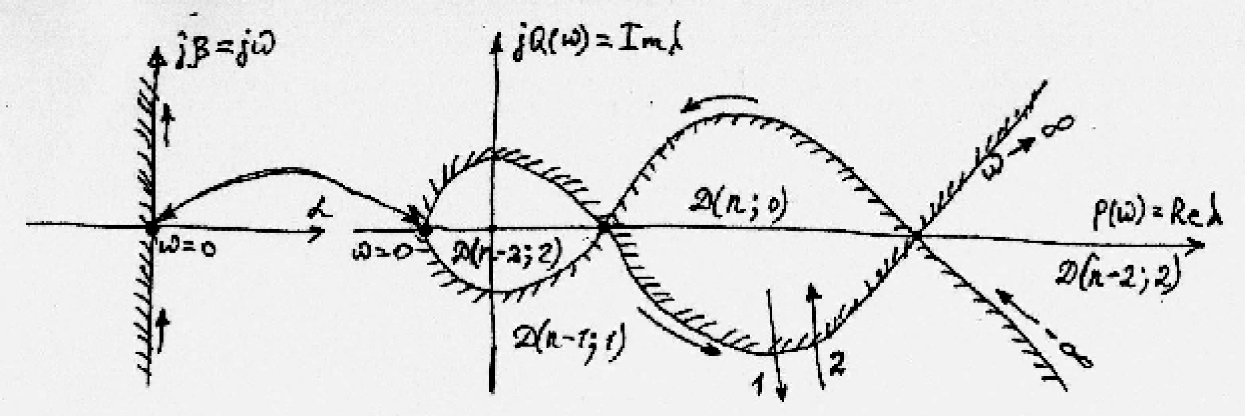
$$F(p) = lA(p) + B(p) = 0,$$

$A(p)$ та $B(p)$ – степені поліноми від p.

Підставляючи в це рівняння $p = jw$ і розв'язуючи його щодо параметра l отримаємо

$$l = -\frac{B(jw)}{A(jw)} = P(w) + jQ(w).$$

При зміні w від 0 до ∞ отримуємо в системі координат $P(w) - jQ(w)$ криву D-розбиття.



Оскільки складова $P(w)$ завжди парна, а $Q(w)$ - непарна функція змінної w, то крива *D-розбиття* завжди симетрична щодо дійсної осі $P(w)$. Тому при побудові області стійкості досить знайти лише одну гілку кривої *D-розбиття*, відповідну, наприклад, позитивним значенням w, а другу гілку можна нанести як дзеркальне відображення першої.

Крива *D-розбиття* ділить площину параметра l на декілька областей, відповідних різним варіантам розташування кореня. Виділити з цих областей область стійкості $D(n;\ 0)$ можна за допомогою штрихування. Правило штрихування засноване на тому, що крива *D-розбиття* є відображенням уявної осі площини коренів. У системі координат a-jb область стійкості знаходиться зліва від уявної осі jb, і вісь прийнято штрихувати зліва при русі уздовж осі від -∞ до +∞. У теорії функцій комплексної змінної доведено, що в площині варійованого параметра область стійкості також знаходиться зліва від кривій D-розбиття. Відповідно криву D-розбиття також штрихують зліва при русі уподовж кривої від -∞ до +∞.

Після нанесення штрихування виявляють область з найбільшим числом лівих коренів. При цьому враховують, що кожному переходу із заштрихованого боку кривої *D-розбиття* на не заштриховану сторону (див. рис. стрілка 1) відповідає перехід одного кореня з лівої напівплощини в праву, а перетину кривої D-разбиения у зворотному напрямі (див. рис. стрілка 2) відповідає перехід одного кореня з правої напівплощини в ліву. Переходячи послідовно з однієї області в іншу, можна виявити область з найбільшим числом лівих коренів [див. рис. область $D(n;\ 0)$]. Після цього за допомогою одного з критеріїв необхідно перевірити, чи є виявлена область областю стійкості, тобто перевірити, чи всі коріння ліві.

Побудова області стійкості по двох параметрах.

Розглянемо випадок впливу двох параметрів на стійкість системи. При цьому решта всіх параметрів системи повинна бути задані. В якості варійованих параметрів, як правило, приймають постійну часу T одного з конструктивних елементів системи і передавальний коефіцієнт k розімкненого контуру або одного з елементів. Варійовані параметри k і T повинні входити в характеристичне рівняння системи лінійно, тобто рівняння не містить перемножень k і T і їх ступенів вище першою. Характеристичне рівняння може бути представлене в наступному вигляді:

$$F(p) = kA(p) + TB(p) + C(p) = 0, \qquad (1)$$

де $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ - поліноми від p, коефіцієнти яких не залежать від k і T.

Якщо варійовані параметри входять в рівняння нелінійно, то слід ввести такі дві нові змінні, які були б функціонально пов'язані з k і T і входили б в рівняння лінійно.

Згідно загальній методиці *D-розбиття* підставимо в характеристичне рівняння (1) замість змінній p уявний корінь $j\omega$. Тоді отримаємо тотожність

$$kA(jw) + TB(jw) + C(jw) \equiv 0, \qquad (2)$$

яке при кожному фіксованому значенні ω можна розглядати як рівняння з невідомими k і T.

Кожен з трьох поліномів, що входять в рівняння (2), після зведення $j\omega$ в парні і непарні ступені можна представити у вигляді суми дійсної і уявної частин:

$$\left.\begin{aligned} A(jw) &= A_1(w) + jA_2(w); \\ B(jw) &= B_1(w) + jB_2(w); \\ C(jw) &= C_1(w) + jC_2(w). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Підставляючи (3) в (2) і групуючи дійсні і уявні доданки, отримаємо

$$\left[kA_1(w)+TB_1(w)+C_1(w)\right]+j\left[kA_2(w)+TB_2(w)+C_2(w)\right]\equiv 0 \qquad (4)$$

Відомо, що комплексна величина дорівнює нулю тоді, коли одночасно дорівнюють нулю її дійсна і уявна частини. Тому, умова (4) еквівалентна двом рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} kA_1(w)+TB_1(w)+C_1(w)=0; \\ kA_2(w)+TB_2(w)+C_2(w)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ця система двох рівнянь дає можливість визначити для кожного фіксованого значення ω два невідомих k і T.

Для вирішення системи (5) скористаємося методом визначників:

$$k=\Delta_1/\Delta = f_1(w), \qquad (6)$$

$$T=\Delta_2/\Delta = f_2(w) \qquad (7)$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1(w); & B_1(w) \\ A_2(w); & B_2(w) \end{vmatrix} = A_1(w)\cdot B_2(w)-A_2(w)\cdot B_1(w); \qquad (8)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -C_1(w); & B_1(w) \\ -C_2(w); & B_2(w) \end{vmatrix} = -C_1(w)\cdot B_2(w)+C_2(w)\cdot B_1(w); \qquad (9)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} A_1(w); & -C_1(w) \\ A_2(w); & -C_2(w) \end{vmatrix} = -A_1(w)\cdot C_2(w)+A_2(w)\cdot C_1(w). \qquad (10)$$

Вирази (6) і (7) є рівнянням кривої D-розбиття, заданим в параметричній формі. Підставляючи в ці вирази різні значення параметра ω (у діапазоні від $-\infty$ до $+\infty$), можна побудувати основну межу області стійкості (рис. крива *ABC*).

Оскільки поліноми $A_1(\omega)$, $B_1(\omega)$, $C_1(\omega)$ - парні функції, а поліноми $A_2(\omega)$, $B_2(\omega)$, $C_2(\omega)$ - непарні, то визначники Δ, Δ_1 і Δ_2 є непарними функціями змінної ω; відповідно $f_1(\omega)$ і $f_2(\omega)$ - парні функції ω. З цього виходить, що крива D-розбиття при зміні ω від - ∞ до + ∞ проходить двічі через одні і ті ж точки: перший раз при зміні ω від -∞ до 0 і другий раз - при зміні ω від 0 до + ∞.

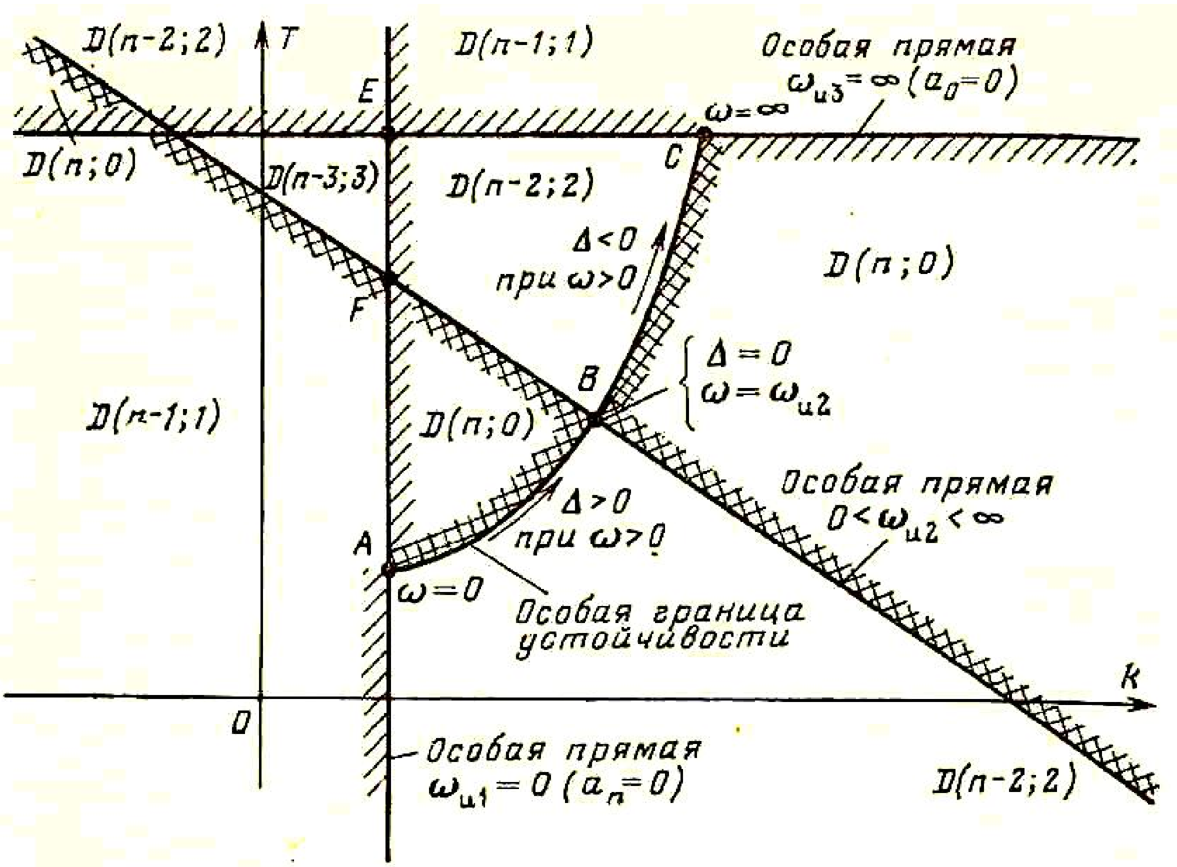


Рисунок Область стійкості в площині двох параметрів.

Крива *D-розбиття*, побудована в площині двох параметрів, штрихується за наступним правилом:

якщо головний визначник $\Delta > 0$, то штрихування наноситься зліва (при русі уподовж кривої у бік збільшення ω); якщо визначник $\Delta < 0$, то штрихування наноситься справа. Це правило сформульоване стосовно цілком певного порядку побудови кривої D-розбиття: рівняння, що виходить від прирівнювання до нуля дійсної частини, повинне бути записане в першому рядку системи (5); параметр, що стоїть на першому місці, необхідно відкладати по осі абсцис.

Оскільки при проходженні змінної ω через нуль знак головного визначника Δ міняється на протилежний, то штрихування кривої D-розбиття завжди подвійне.

Рівняння (5) визначають в площині k - T одну єдину крапку (при фіксованому значенні ω) лише у тих випадках, коли ці рівняння сумісні і лінійно незалежні, тобто коли визначники Δ, Δ_1 і Δ_2 не дорівнюють нулю. Якщо ж при деякому значенні ω всі три визначники одночасно звертаються в нуль або нескінченність, то рішення (6) і (7) стають невизначеними. Це означає, що при даному значенні ω рівняння (5) еквівалентні, тобто одне відрізняється від іншого на постійний множник. У системі координат k - T таким «винятковим» значенням $\omega_И$ відповідають так звані *особливі прямі* (див. рис., прямі *BF, AE* і *CE).* Рівнянням персоною прямої може служити будь-яке з рівнянь (5):

$$T = [-C_{1(2)}(w_И) - kA_{1(2)}(w_И)]B_{1(2)}(w_И), \qquad (11)$$

де $\omega_И$ - "виняткові" частоти, при яких всі три визначники Δ, Δ_1 і Δ_2 одночасно звертаються в нуль або в нескінченність і рішення (6) і (7) стають невизначеними.

У багатьох практичних завданнях параметри k і T входять в старший коефіцієнт a_0 або вільний коефіцієнт a_n характеристичного рівняння системи. В цьому випадку рівняння двох особливих прямих отримують прирівнюванням вказаних коефіцієнтів до нуля:

$$a_n = 0; \qquad\qquad a_0 = 0. \qquad (12)$$

Перше рівняння відповідає $\omega_И = 0$, а друге - $\omega_И = \infty$.

Штрихування особливих прямих виконують по наступних правилах. Особливі прямі, відповідні $\omega_И = 0$ і $\omega_И = \infty$, штрихують один раз (прямі *AE* і *CE*), а прямі, відповідні $0 < \omega < \infty$, штрихують двічі (прямі *BF*). В точках перетину (або сполучення) персоною прямої з кривій D-розбиття, відповідних $\omega = \omega_И$, заштриховані сторони прямої і кривої повинні бути звернені один до одного (точки *A,B,C*). Причому, якщо в точці перетину визначник Δ міняє знак, то штрихування персоною прямої переходить на протилежну сторону прямої, якщо ж знак визначника не міняється, то напрям штрихування залишається тим самим.

Після нанесення штрихування виявляють області з найбільшим числом лівого коріння.

9.6. Структурна стійкість систем управління

У попередніх лекціях було показано, що стійкість системи залежить як від виду характеристичного рівняння системи, так і від конкретних числових значень коефіцієнтів рівняння. Існують системи, які нестійкі при будь-яких значеннях параметрів. Такі системи називають *структурно нестійкими*. Структурно нестійку систему можна зробити стійкої, змінивши її структуру. У структурно нестійкої системи в просторі будь-яких її параметрів області стійкості не існує.

Розглянемо одноконтурну систему, що містить одну інерційну ланку й дві ідеальних інтегруючих. Характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд:

$$(T_1 p + 1) p^2 + k = 0 \tag{1}$$

і не містить доданок с p у першому ступені. Очевидно, що в цьому випадку не виконується необхідна умова стійкості - умова позитивності коефіцієнтів, і ніякі варіації параметрів k і T_1 не можуть привести до появи що складається с p у першій ступені. Отже, ця система структурно нестійка.

Існують ланки, які, як правило, погіршують стійкість системи, і ланки, які майже завжди поліпшують стійкість. До першої групи відносять ланки:

- ідеальне інтегруюче $W(p) = \dfrac{k}{p}$

- нестійка статична ланка першого порядку $W(p) = \dfrac{k}{Tp - 1}$

- консервативна (ідеальна коливальна ланка) $W(p) = \dfrac{k}{T^2 p^2 + 1}$

Ланками, що поліпшують стійкість системи, є ланки, що форсують. Звичайно застосовують ланки, що форсують, першого порядку:

$$W(p) = 1 + kp\,.$$

Широко застосовуваний у промисловій автоматиці пропорційно-інтегральний закон регулювання відповідає послідовному з'єднанню ідеального інтегруючої ланки й ланки, що форсує, першого порядку:

$$W(p) = \frac{k_П\, p + k_И}{p}$$

Вплив цього закону на стійкість двояке: при більших значеннях коефіцієнта інтегральної складової $k_и$ стійкість гірше, при більших значеннях коефіцієнта $k_п$ - краще.

Розглянемо загальні умови структурної стійкості одноконтурної системи. Характеристичне рівняння системи в загальному випадку має вигляд:

$$D(p) + K(p) = 0\,, \qquad (2)$$

де $D(p) = \prod d_i(p)$ - добуток знаменників передатних функцій окремих ланок, що входять у контур системи;

$K(p)$ - добуток чисельників цих же функцій.

Умови структурної стійкості залежать від загального порядку n характеристичного рівняння (2) і від виду поліномів $D(p)$ і $K(p)$. У поліном $D(p)$ входять знаменники «поганих» ланок (що погіршують стійкість), а в поліном $K(p)$ - чисельники «гарних» - ланок, що форсують. Позначимо:

q - число ідеальних інтегруючих ланок;

t - число нестійких статичних ланок першого порядку;

r - число консервативних ланок вхідних у систему.

Якщо ланок, що форсують, у контурі ні, тобто $K(p) = k$ (де k - загальний передатний коефіцієнт розімкнутого контуру), то умова структурної стійкості системи виражається у вигляді двох нерівностей:

$$\left.\begin{array}{l} q + t < 2 \\ 4r < n \end{array}\right\}$$

Вплив передатного коефіцієнта розімкнутого контуру системи на стійкість.

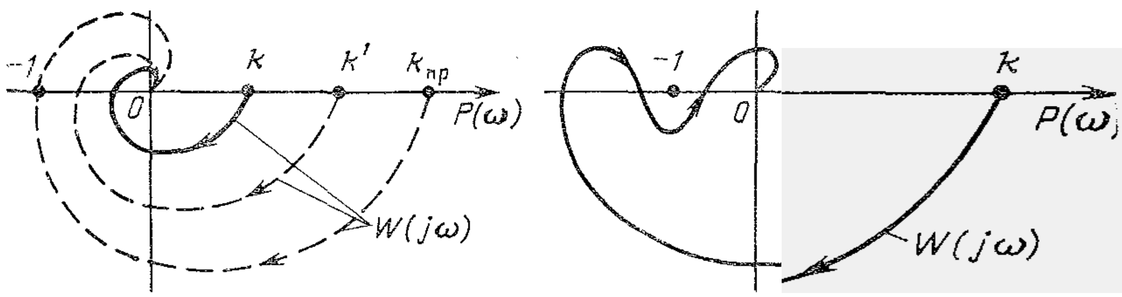
Для одноконтурних систем коефіцієнт k входить у вираження АФЧХ $W(jw)$ як множник:

$$W(jw) = k \cdot K^*(jw) / D(jw),$$

де $K^*(jw)|_{w=0} = 1.$

Це означає, що довжини вектора $W(jw)$ при всіх значеннях w пропорційні коефіцієнту k. При збільшенні коефіцієнта k АФЧХ розширюється (мал. а) і наближається до критичної крапки *(-1; j0).* Отже, збільшення передатного коефіцієнта розімкнутого контуру приводить до порушення стійкості системи.

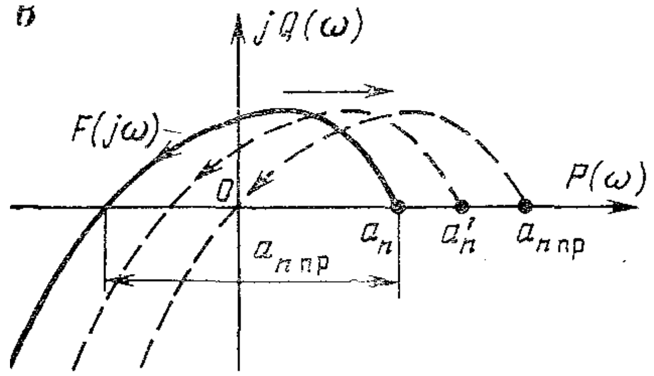
Це правило справедливо для більшості реальних систем, у яких АФЧХ має форму плавної спіралі (мал. а). Однак існують системи, у яких АФЧХ має дзьбоподібну форму (мал. б). У таких системах до порушення стійкості може· привести не тільки збільшення, але й зменшення передатного коефіцієнту.



а) б)

Значення передатного коефіцієнта, при якому АФЧХ проходить через крапку *(- 1; j0),* називають <u>*граничним*</u> або <u>*критичним*</u>.

В існуванні граничного коефіцієнта можна переконатися й за допомогою критерію Михайлова. Дійсно, у простих одноконтурних систем коефіцієнт k входить тільки в коефіцієнт a_n характеристичного рівняння, причому, для статичних систем $a_n = 1 + k$, а для астатичних $a_n = k$. Якщо збільшувати коефіцієнт k, то буде збільшуватися тільки коефіцієнт a_n, і характеристична крива $F(jw)$ без деформації буде переміщатися вправо (мал.). Очевидно, що при деякому граничному значенні коефіцієнта a_n, а отже, і коефіцієнта k, крива $F(jw)$ пройде через початок координат, тобто система буде на границі стійкості.



Таким чином, установлена одна з найважливіших у ТАУ закономірностей:

чим більше загальний передатний коефіцієнт розімкнутого контуру системи регулювання, тим ближче замкнута система до границі стійкості.

Граничне значення передатного коефіцієнта залежить від співвідношення постійних часу ланок, що утворять контур системи. Розглянемо, наприклад, статичну систему, що складається із трьох інерційних ланок першого порядку з передатними коефіцієнтами k_1, k_2, k_3 і постійними часу T_1, T_2, T_3. Характеристичне рівняння такої системи

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

де $a_0 = T_1 T_2 T_3$; $a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$; $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$;

$$a_3 = 1 + k_1 k_2 k_3 = 1 + k.$$

Відповідно до критерію Гурвица система третього порядку буде перебувати на границі стійкості при $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$.

Підставивши в цю умову коефіцієнти характеристичного рівняння, одержимо

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + k_{ПР}) = 0$$

Вирішивши цю рівність відносно $k_{пр}$ і виконавши деякі додаткові перетворення (ділення на a_0), одержимо вираження для граничного коефіцієнта передачі:

$$k_{\text{пр}} = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}.$$

Аналізуючи дану залежність можна довести, що граничний коефіцієнт тим більше, чим більше різниця між двома постійними часу (наприклад, T_1 і T_2), що найбільш різняться, і чим ближче третя постійна часу *(T_3)* до середньоарифметичного значення двох перших.

На підставі вираження можна сформулювати важливе практичне правило:

граничне значення передатного коефіцієнта системи залежить від співвідношення постійних часу й не залежить від їхніх абсолютних значень.

Наведене правило справедливо для систем будь-якого порядку, і, тому, завжди при конструюванні систем прагнуть якнайбільше «розсунути» постійні часу. Однак зміна постійних часу з метою збільшення передатного коефіцієнта й поліпшення точності системи в багатьох випадках виявляється неможливим або недоцільним. Дійсно, при конструюванні елементів системи звичайно вживають заходів, спрямовані на максимальне зменшення постійних часу, а тому подальше їхнє зменшення, як правило, неможливо. Збільшення ж постійних часу недоцільно, тому що веде до погіршення швидкодії всієї системи.

10. ОЦІНКА ЯКОСТІ УПРАВЛІННЯ

Дослідження системи автоматичного управління на стійкість дозволяє визначити можливість або неможливість її функціонування. Однак дані дослідження не дозволяють оцінити ефективність використання цієї системи, навіть якщо вона виявилася стійкою. Для оцінки ефективності функціонування САУ використовують показники якості систем керування.

У ТАУ термін «якість системи», «якість управління» використовують у більше вузькому змісті: розглядають тільки статистичні й динамічні властивості системи. Ці властивості визначають точність підтримки керованої величини на заданому рівні в сталих і перехідних режимах. Кількісне вираження цих властивостей утворять **показники якості управління.**

Раніше була розглянута точність системи в сталих режимах, що є однієї з найважливіших характеристик якості управління. Тепер будуть розглянуті показники якості, що характеризують точність системи в перехідних режимах (несталий динамічний режим).

Точність системи в перехідних режимах оцінюють за допомогою прямих і непрямих показників якості.

Прямі показники якості визначають за графіком перехідного процесу, що виникає в системі при східчастому зовнішньому впливі. ***Непрямі показники якості*** визначають по частотних характеристиках системи або по розподілі коренів характеристичного рівняння. До особливої категорії показників якості відносять ***інтегральні оцінки***, які обчислюють або безпосередньо по перехідній функції системи, або за коефіцієнтами передатної функції системи.

При самій загальній оцінці якості, насамперед, звертають увагу на форму перехідного процесу. Розрізняють наступні типові перехідні процеси: коливальний (1), аперіодичний з перерегулюванням (2), монотонний аперіодичний, (3).

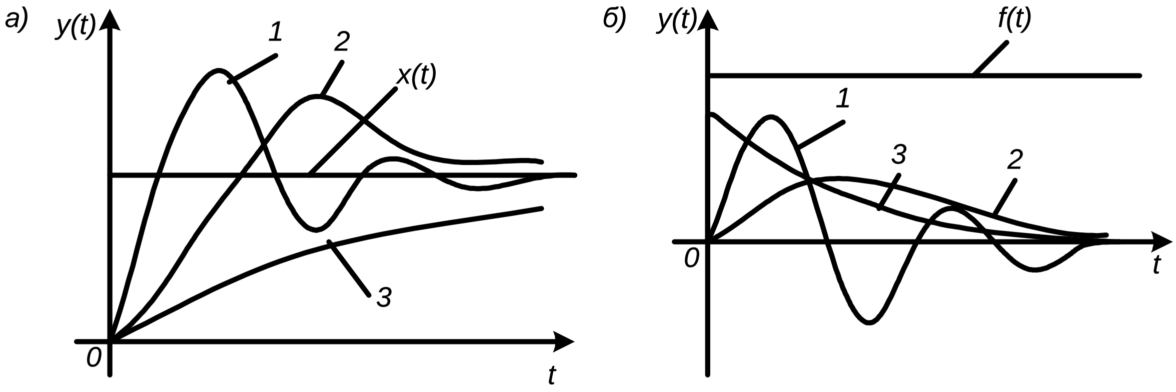


Рисунок 1. Типові перехідні процеси (*а* – за завданням; *б* – за збурюванням)

Кожний з типових перехідних процесів має свої переваги й недоліки, і переваги тій або іншій формі процесу роблять із урахуванням особливостей керованого об'єкта.

10.1. Прямі показники якості

На графіку перехідних процесів, викликаних східчастою зміною впливів, що задає *x(t)* і що обурює *f(t)*, за початок відліку для вихідної величини *y(t)* прийняте значення *y(-0)*, що було до подачі східчастого впливу.

Перерегулювання *s* - величина, рівна відношенню першого максимального відхилення $y_м$ керованої величини *y(t)* від її сталого значення *y(¥)* до цього сталого значення *y(¥)*:

$$s = \frac{y_м - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100, \ \%.$$

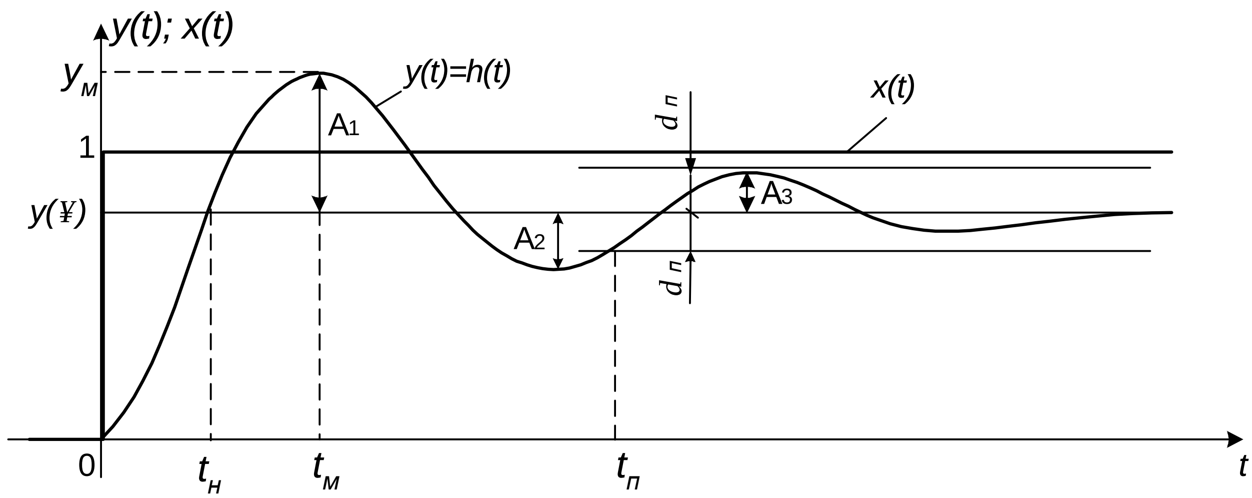
Якість управління вважається задовільною, якщо перерегулювання не перевищує 30...40%.

Для перехідних процесів, викликаних впливом, що обурює, f(t) на вході ОУ, перерегулювання можна визначити як відношення першого негативного максимального відхилення A_2 до першого позитивного максимального відхилення A_1:

$$s = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{A_2}{y_м - y(\infty)} \cdot 100, \ \%.$$

Показник перерегулювання, що обчислюється по даній формулі для перехідних процесів по каналі збурювання, називають також **коливальністю**.

Необхідно відзначити, що й саме перше максимальне відхилення $y_м$, що виникає від збурювання на вході об'єкта, є показником якості. При формуванні вимог до системи вказують припустиме значення максимального відхилення (безпосередньо в одиницях виміру керованої величини).



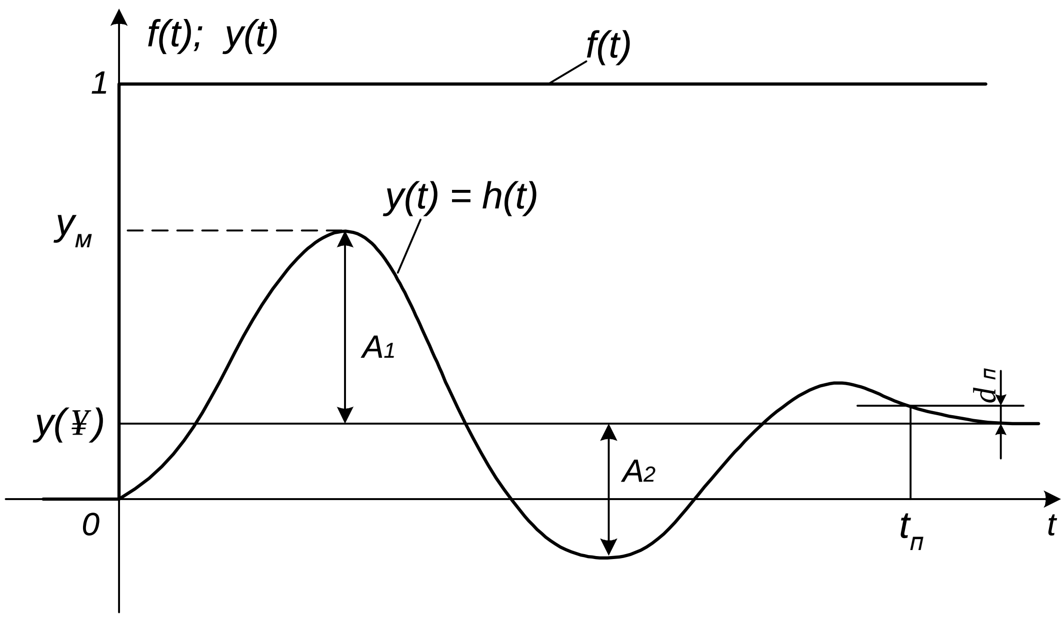


Рисунок 2. Прямі показники якості регулювання

Тривалість перехідного процесу (час регулювання) t_n – інтервал часу від моменту додатка східчастого впливу до моменту, після якого відхилення керованої величини *y(t)* від її нового сталого значення *y(¥)* стають менше деякого заданого числа d_n, тобто до моменту, після якого виконується умова $|y(t) - y(¥)| \le d_n$.

У промисловій автоматиці величину d_n звичайно приймають рівної 5% від сталого значення *y(¥)*: $d_n = 0{,}05y(¥)$.

При оцінці тривалості перехідних процесів, викликаних одиничним впливом, що обурює, f(t) на вході об'єкта величину d_n приймають 5% від значення передатного коефіцієнта об'єкта k_0: $d_n = 0{,}05k_0$.

Ступінь загасання $y = \dfrac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \dfrac{A_3}{A_1}$.

де A_1 й A_3 - сусідні максимальні відхилення одного знаку.

Інтенсивність загасання коливань у системі вважається задовільної, якщо (= 0,75...0,95.

Коливальність N – число переходів керованої величини *y(t)* через її стале значення *y(¥)* за час перехідного процесу t_n.

При проектуванні систем найчастіше допускають *N* = 1...2…2,а іноді й до 3...4, але в деяких випадках коливання в системі не припустимі.

Додаткові часові показники якості:

- Час наростання $t_н$;
- Час досягнення першого максимуму $t_м$;
- Період загасаючих коливань $T_з$.

Ці показники разом з t_n характеризують швидкодію системи регулювання.

Три головних показники якості – перерегулювання *s*, перше максимальне відхилення $y_м$ і тривалість перехідного процесу t_n - тісно зв'язані між собою. Вони залежать від всіх параметрів системи, але найбільше сильно – від передатного коефіцієнта *k* розімкнутої системи. Причому, зі збільшенням цього коефіцієнта максимальне відхилення по каналі збурювання завжди зменшується (рис.3, *а*), максимальне відхилення за каналом впливу, що задає, завжди збільшується (рис.3, *б)* а перерегулювання й тривалість перехідного процесу, як правило, збільшуються (рис.3). Відшукання оптимального компромісу між цими двома суперечливими тенденціями є однієї з основних завдань *синтезу САУ*.

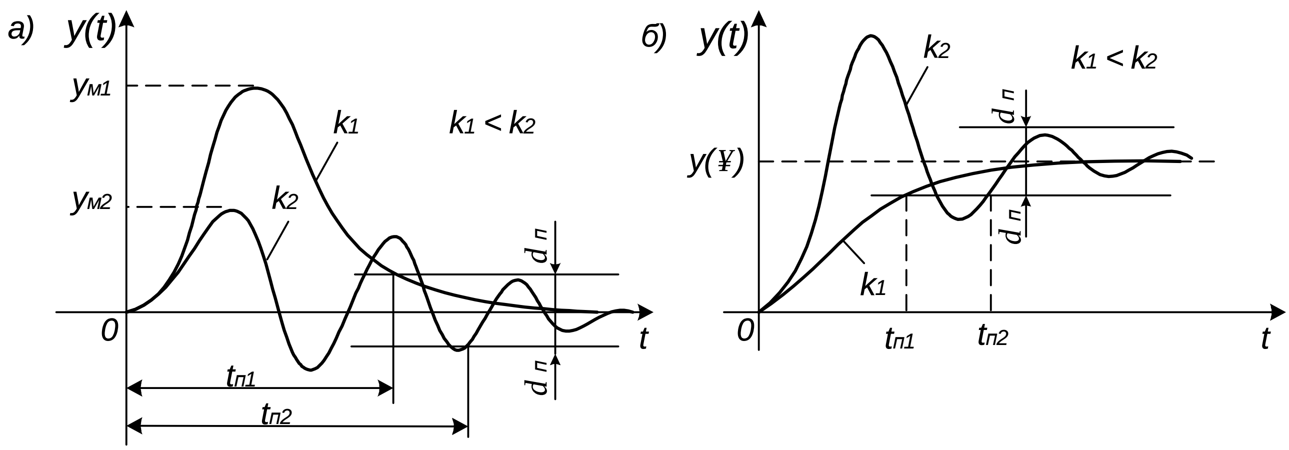


Рисунок 3. Вплив передатного коефіцієнта розімкнутої системи на показники перехідного процесу

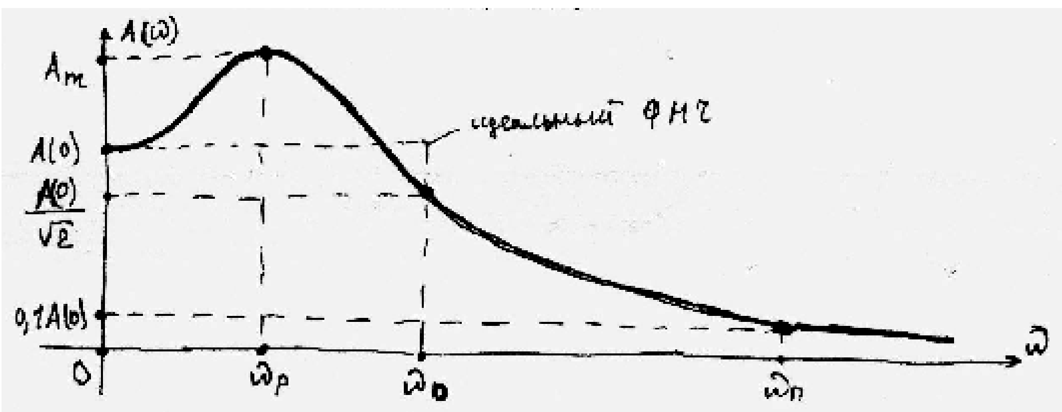
а – за впливом, що обурює*;* б - за впливом, що задає

10.2. Непрямі показники якості

10.2.1. Частотні показники

Частотні показники визначають по частотних характеристиках замкнутого й розімкнутого контуру системи.

АЧХ замкнутої системи.



Частотний показник коливальності M: $M = \dfrac{A_M}{A(0)}$ – це відношення максимуму АЧХ A_M до початкового значення АЧХ $A(0)$.

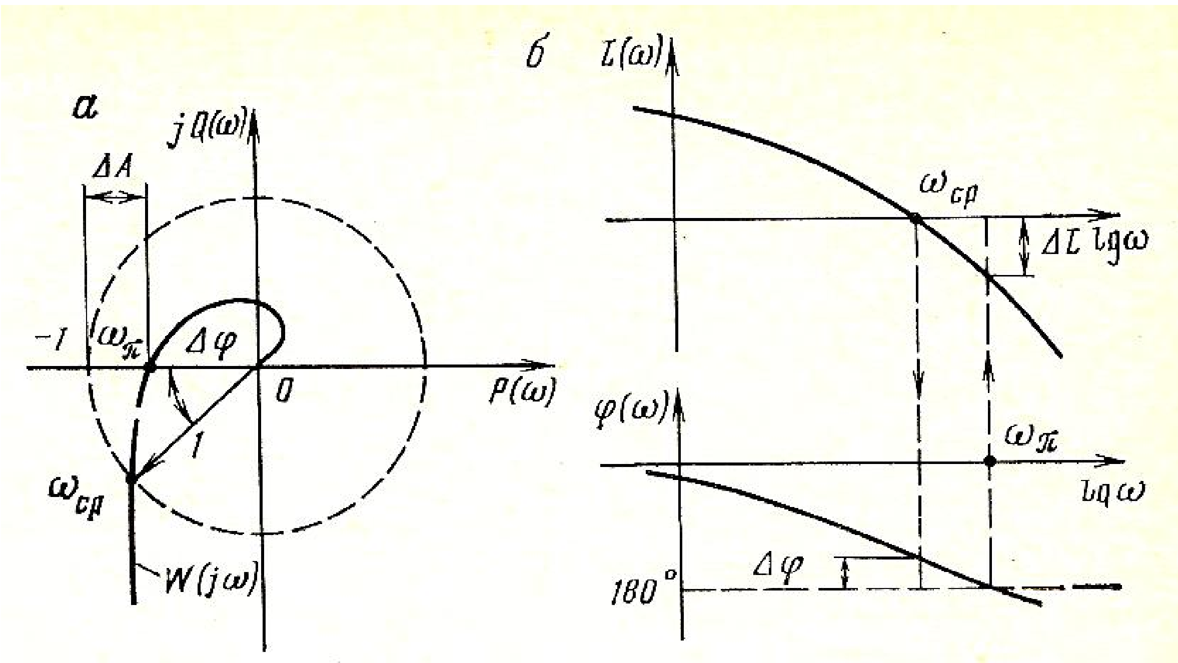
Чим більше $\dfrac{A_M}{A(0)}$, тим сильніше коливальність системи (більше перерегулювання s), і як наслідок більше тривалість перехідного процесу t_n. Якість системи вважається задовільною, якщо показник M = 1,1...1…1,5

Непрямими частотними показниками швидкодії системи є характерні частоти.

– резонансна частота ω_p – відповідає піку АЧХ, близька до частоти коливань у перехідному процесі;

– смуга пропущення системи – це інтервал частот від ω=0 до ω_0, при якій виконується умова $A(w_0) \le 0.707A(0)$. Смуга пропущення не повинна бути занадто широкою, інакше система буде відтворювати високочастотні перешкоди. У той же час, чим менше смуга пропущення системи, тим більше інерційна система (більший час перехідного процесу).

АФЧХ (ЛЧХ) розімкнутої системи



– запас стійкості по амплітуді $DA = 1 - A(w_p)$

– запас стійкості по фазі $Dj = p - \left| j(w_{cp}) \right|$

Показники якості ΔA й $\Delta\varphi$ разом характеризують далекість кривій *W(jw)* від критичної точки (-1; j0).

При проектуванні систем звичайно задаються запасом стійкості по амплітуді $\Delta A \geq 0{,}5 \div 0{,}6$ і по фазі $\Delta\varphi \geq 30 \div 60^{o}$.

Варіанти σ	0 %	10..30 %	50..70 %
Застосовність	рідко	часто	уникають
Запас по фазі	90^0	$60^0 \cdots 30^0$	$30^0 \cdots 10^0$
Число коливань	0	1, 2	3, 4,...

При рішенні задач синтезу САУ широке поширення одержали логарифмічні частотні характеристики. У цьому випадку запас стійкості по амплітуді визначається з вираження $\Delta L = 20\lg\left| A(w_p) \right|$ $\Delta L \geq$ 6-8 дБ

Швидкодію системи можна приблизно оцінити по частоті зрізу $\boldsymbol{\omega_{cp}}$ ЛАЧХ розімкнутої системи:

$$t_p \leq \frac{(2-4)p}{w_{cp}}$$

Необхідність прийняття запасів стійкості пов'язана з:

– зміною параметрів ОУ в процесі експлуатації (зношування, старіння...);
– лінеаризацією характеристик ОУ;
– погрішностями, що виникають при експериментальних дослідженнях характеристик ОУ.

ВЧХ замкнутої системи.

Якщо на лінійну систему діє гармонійний сигнал, то й стале значення вихідної величини буде гармонійним:

$$Y(jw) = W_3(jw)X(jw)$$

де $Y(jw)$ - зображення вихідної величини *y(t)* за Фур'є;

$X(jw)$ - зображення вхідної величини *x(t)* за Фур'є;

$W_3(jw)$ - АФЧХ замкнутої системи.

При впливі на систему одиничної східчастої функції *x(t)*=1*(t)* вихідна величина, що є перехідною характеристикою системи *h*(t), визначається через дійсну частотну або мниму частотну характеристику замкнутої системи

$$h(t) = \frac{2}{p}\int_0^\infty \frac{P(w)}{w}\sin wt\ dw \qquad (1)$$

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{p}\int_0^\infty \frac{Q(w)}{w}\cos wt\ dw \qquad (2)$$

Розглянемо основні властивості дійсних частотних характеристик і відповідних їм перехідних процесів. З (1) випливають основні властивості $P(w)$ й *h(t).* Приведемо їх без доказів.

1. Властивість лінійності: якщо дійсну частотну характеристику можна представити сумою

$$P(w) = \sum_{i=1}^{n} P_i(w),$$

те й перехідний процес *h(t)* може бути представлений сумою складових

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t), \qquad h_i(t) = \frac{2}{p}\int_0^\infty \frac{P_i(w)}{w}\sin wt\ dw.$$

2. Відповідність масштабів по осі ординат для $P(w)$ й *h(t).* Якщо помножити $P(w)$ на постійний множник *a*, то відповідні значення *h(t)* теж множаться на цей множник *a*.

3. Початкове значення ДЧХ дорівнює кінцевому значенню перехідної характеристики

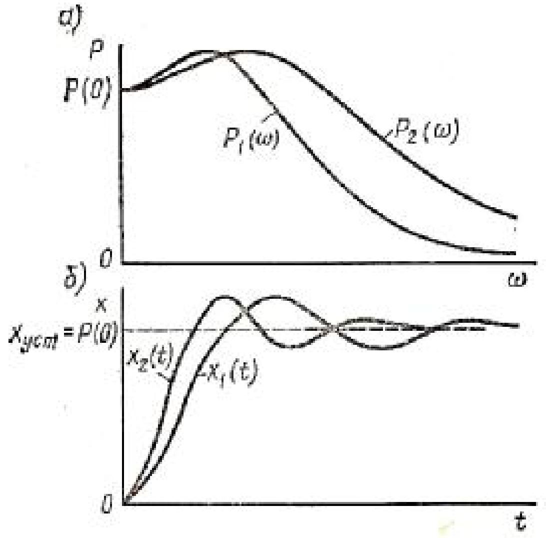
$$\lim_{w\to 0} P(w) = \lim_{t\to\infty} h(t) = P(0).$$

Початкове значення мнимої частотної характеристики $Q(w) = 0$.

4. Кінцеве значення ДЧХ дорівнює початковому значенню оригіналу перехідної характеристики

$$\lim_{w\to\infty} P(w) = \lim_{t\to 0} h(t).$$

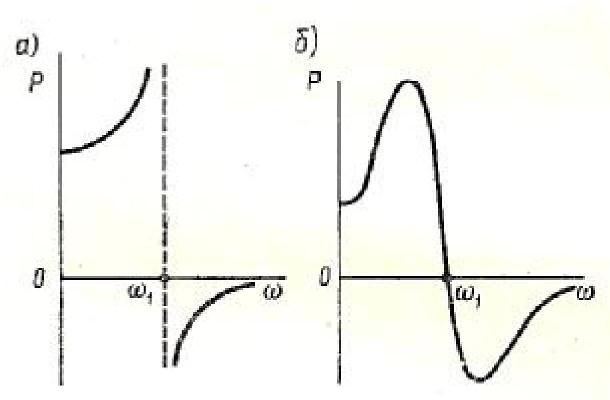
5. Відповідність масштабів по осі абсцис для $P(w)$ та $h(t)$. Якщо аргумент w у відповідному виразі частотної характеристики помножити на постійне число (рис.), то аргумент у відповідному виразі перехідного процесу буде ділитися на це число.



$$h(t/a) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{P(aw)}{w}\sin wt\, dw$$

Становлять інтерес розриви безперервності й піки у ДЧХ.

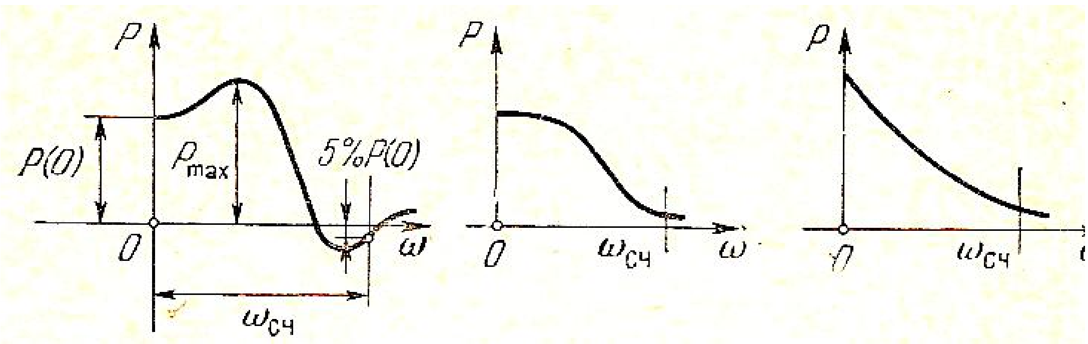
Припустимо, що при $w = w_1$ ДЧХ має розрив безперервності $P(w_1) = \infty$, при цьому характеристичне рівняння системи буде мати мнимий корінь $p = \pm jw_1$ тобто в системі встановлюються незгасаючі гармонічні коливання, якщо інші корені – ліві.



Характеристика для цього випадку показана на рис. а.

Високий і гострий пік частотної характеристики, за яким $P(w)$ переходить через нуль, при частоті, близької до w_1, відповідає повільно загасаючим коливанням (рис.б).

6. Щоб перехідна характеристика системи мала перерегулювання, яке не перевищує 18% ($s \le 18\%$), ДЧХ повинна бути позитивною не зростаючою функцією частоти (рис. г), тобто $P(w) > 0$, $dP(w)/dw \le 0$.



в) г) д)

7. Умови монотонного протікання перехідного процесу. Щоб перехідний процес мав монотонний характер, досить, щоб відповідна йому ДЧХ $P(w)$ була позитивною, безперервною функцією частоти з негативної, убутної по абсолютній величині похідній (рис. д), тобто $P(w) > 0,\ dP(w)/dw < 0$ (ВЧХ має ввігнутий вигляд).

8. Визначення найбільшого значення перерегулювання $s_{\max}$ перехідного процесу по максимуму речовинної частотної характеристики $P(w)$ (рис. в) $s_{\max} = \dfrac{1{,}18P_{\max} - P(0)}{P(0)}$,

де $P_{\max}$ - максимальне значення $P(w)$;

$P(0)$ - початкове значення $P(w)$ ($w = 0$).

9. Тривалість перехідного процесу оцінюється приблизно по величині інтервалу істотних частот $w_{сч}$ (частоті позитивності $w_{П}$)

$$\frac{p}{w_{СЧ}} < t_P < \frac{4p}{w_{СЧ}}$$ - для ДЧХ без вираженого максимуму

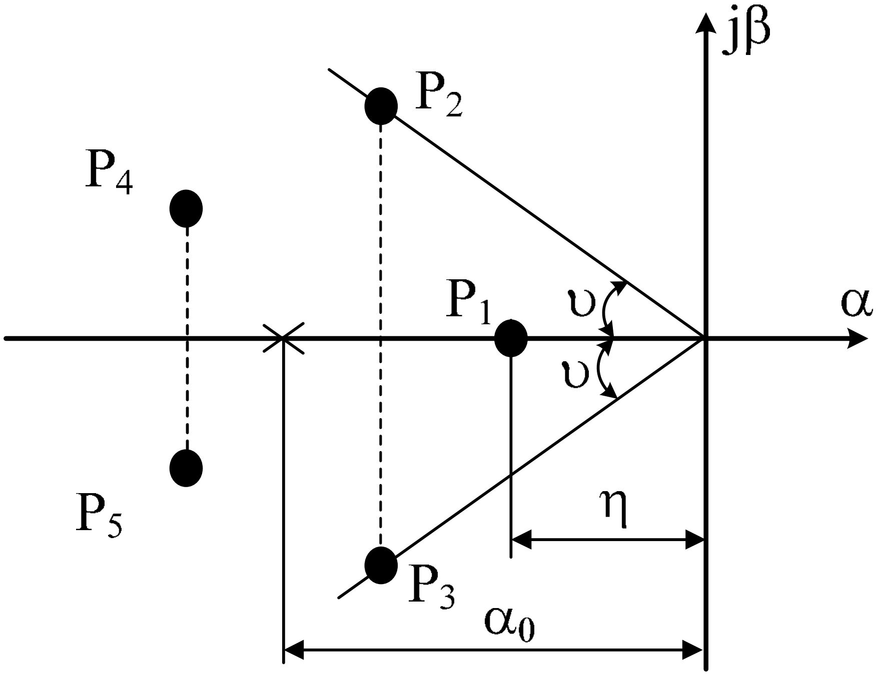
$$\frac{3p}{w_{СЧ}} < t_P < \frac{8p}{w_{СЧ}}$$ - для ДЧХ, що має максимум $P_{\max}$.

10.2.2.Кореневі показники якості.

Для непрямої оцінки якості управління використовують кореневі показники якості, які обумовлені розташуванням коренів p_1, p_2, … p_n… характеристичного рівняння замкнутої системи

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} +…+a_n=0$$

на комплексній площині.



Найбільш загальній кореневий показник якості – ***середнє геометричне значення модулів коренів (середньогеометричний корінь)***:

$$a_0 = \sqrt[n]{|p_1 p_1 ....p_n|} = \sqrt[n]{a_n / a_0}$$

Середньогеометричний корінь a_0 визначає на дійсній осі комплексної площини $a - jb$ точку, що є геометричним центром всіх корінь характеристичного рівняння. Величина a_0 має розмірність із$^{-1}$ і є узагальненою мірою швидкодії системи: чим менше a_0, тим ближче корінь до мнимої осі й тем більше тривалість перехідного процесу.

Коефіцієнт a_n залежить від передатного коефіцієнта k розімкнутого контуру: для статичних систем a_n = 1+k, для астатичних a_n =k. Звідси можна зробити висновок: чим більше коефіцієнт k, тим краще швидкодія системи (за інших рівних умов – однакової конфігурації коренів).

Корені, розташовані ближче всього до мнимої осі називаються ***домінуючими,*** вони впливають на характер перехідного процесу й дають найбільш тривалі складові перехідного процесу.

Відстань від мнимої осі до найближчого до неї кореня називається ***ступенем стійкості*** η. Якщо найближчий корінь дійсний (корінь p_1), то домінуючою складовою перехідного процесу буде експонента з показником $p_k = -h: \quad h_k = C_k e^{-ht}$

Якщо найближчими коренями до мнимої осі буде пара комплексно сполучених корінь, то домінуюча складовій перехідного процесу - коливальна складова, що загасає по експоненті.

В обох випадках тривалість перехідного процесу при припустимій погрішності регулювання $d_n = 0{,}05C_к$ визначається за наближеною формулою: $t_n \le 3/h$, де знак «=» ставиться до випадку дійсного домінуючого кореня, а знак «<» - до випадку домінуючої комплексно сполученої пари коренів.

При виборі настроєних параметрів регулятора завжди прагнуть компенсувати домінуючі (найменші) корені, яким відповідають найбільші постійні часу об'єкта, і тим самим поліпшити швидкодію системи.

Коливальні властивості САУ визначає k-*я* пара комплексних корінь $p_k = a_k \pm jb_k$ для якої найбільше відношення

$$m_k = tgu = \frac{|b_k|}{|a_k|},$$

або найбільший кут u між двома симетричними променями. У цьому випадку такою парою, що визначає домінуючу коливальну складовій перехідного процесу, є комплексні коріння p_1 і p_2.

Відношення $m_Д$ мнимої частини b до дійсної частини a домінуючої пари комплексних корінь називають ***ступенем коливальності***.

У практичних розрахунках найчастіше використовують ***кореневий показник коливальності:***

$$m_Д = \frac{|a_k|}{b_k} = \frac{1}{m_Д}$$

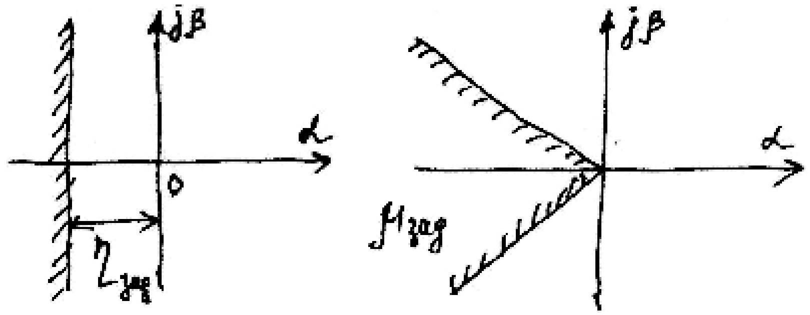
який також визначається через домінуючу пару комплексних корінь. При виборі налаштувань регулятора прагнуть отримати $m_Д$ = 0,2 ÷ 0,5.

Спеціальними математичними дослідженнями встановлено, що в системі будь-якого порядку найбільш швидкий аперіодичний процес має місце, коли всі n коренів рівні між собою.

Максимальна швидкодія системи досягається при невеликий коливальності (δ ≤ 10%). Для цього всі комплексні корені (і один дійсний при n непарному) повинні розташовуватися на однаковій відстані h від мнимої осі, а мнимі частини повинні утворювати арифметичну прогресію з різницею $Db = b_1$. Причому, для кожного порядку рівняння існує оптимальне відношення Δβ/η:

- для другого порядку Δβ/η = 1;
- для третього порядку Δβ/η = 1,45;
- для четвертого порядку Δβ/η = 0,79
- для п'ятого порядку Δβ/η = 1,5.

Визначення показників h і m по рівнянню з відомими коефіцієнтами є в загальному випадку такою же трудомісткою задачею, як і відшукання самих коренів. Легше вирішується зворотна задача – визначення коефіцієнтів рівняння й параметрів системи, при яких всіх корені лежать в області із заданим ступенем стійкості або заданим ступенем коливальності (рис.).



Для цього може бути використаний метод D-Розбивки. Тільки замість звичайної заміни $p = jw$ в характеристичному рівнянні необхідно зробити підстановку $p = -h + jw$ або $p = -(|w|/m) + jw$, де h і m - задані числа. Виконуючи далі всі звичайні операції методу D-Розбивки, можна одержати області заданого ступеня стійкості й коливальності в просторі коефіцієнтів, що варіюються, і параметрів системи.

Кореневі показники α_0, η, $\mu_Д$, $m_Д$ важливі для розуміння проблеми якості і її зв'язків із проблемою стійкості, але використовуються рідше інших, тому що їх безпосереднє визначення для конкретної системи високого порядку (n > 3) являє собою складне обчислювальне завдання.

10.3.Інтегральні показники якості

Кожний з розглянутих вище прямих показників якості характеризує лише *одну* яку-небудь властивість САУ, лише *одну* ознаку перехідного процесу. Причому, всі показники пов'язані з настроюваними параметрами регулятора складними залежностями, що мають, як правило, суперечливий характер: зміна параметра приводить до *поліпшення* одних показників якості й *погіршенню* інших. Ця обставина істотно утрудняє вибір параметрів регулятора. Тому в інженерній практиці широко використовуються *інтегральні показники або оцінки якості*.

Інтегральна оцінка якості *– певний інтеграл за часом (у межах від 0 до ¥) від деякої функції керованої величини y(t), або сигналу помилки e(t):*

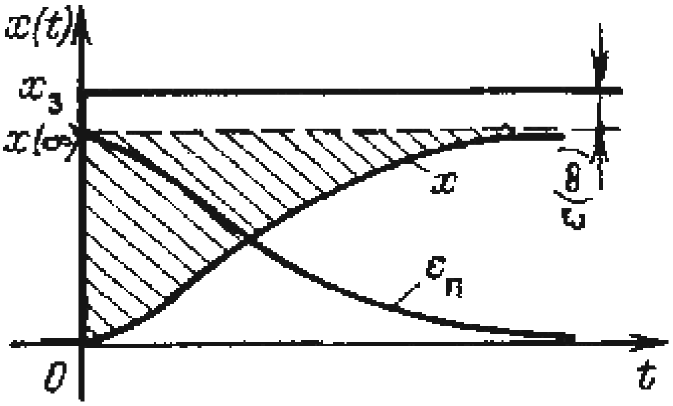
$$I = \int_0^{\infty} f_0\left[y(t), t\right] dt. \qquad (1)$$

Підінтегральна функція f_0 вибирається таким чином, щоб інтеграл (1) краще характеризував якість системи й простіше виражався через коефіцієнти передатної функції замкнутої системи. Щоб інтеграл був збіжним, у функцію f_0 уводять не абсолютні значення $y(t)$ або $e(t)$, а їхнього відхилення від кінцевих, сталих значень.

Найпростішою інтегральною оцінкою є ***лінійна інтегральна оцінка***

$$I_{Л} = \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]\,dt, \qquad (2)$$

яка дорівнює площі, укладеної між прямою $y(\infty)$ і кривою перехідного процесу $y(t)$ (рис.).



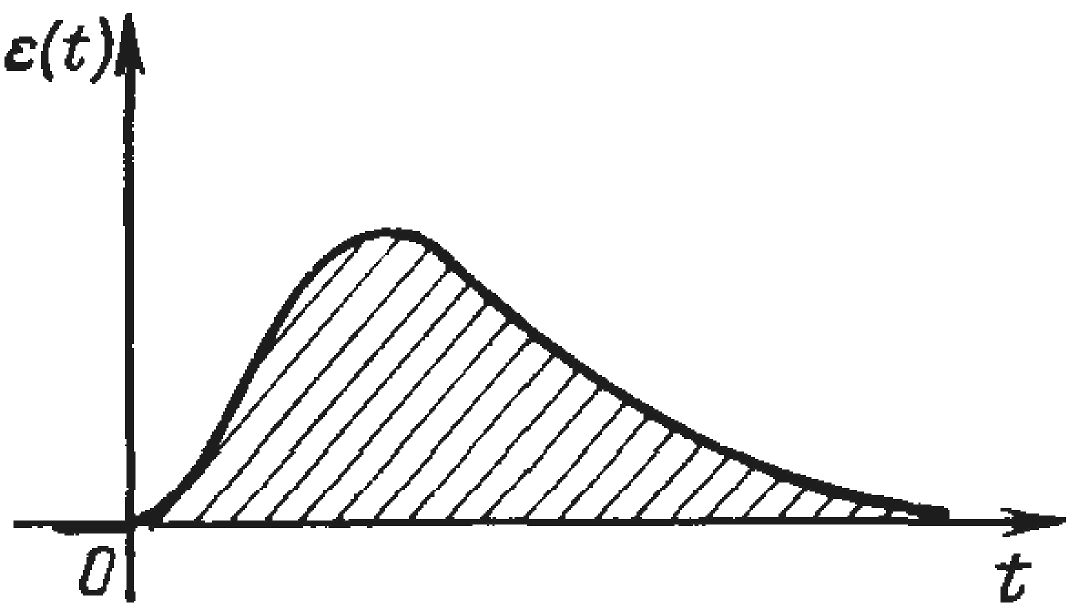
Інтегральна оцінка (2) враховує як величину динамічних відхилень, так і тривалість їх існування. Тому *чим менше оцінка, тем краще якість процесу управління.*

Різниця під знаком інтеграла $y_{уст} - y(t)$ дорівнює динамічній або перехідній складовій сигналу помилки: $y_{уст} - y(t) = x - e(¥) - y(t) = e(t) - e(¥) = e_n(t)$.

Тому лінійна інтегральна оцінка може бути визначена:

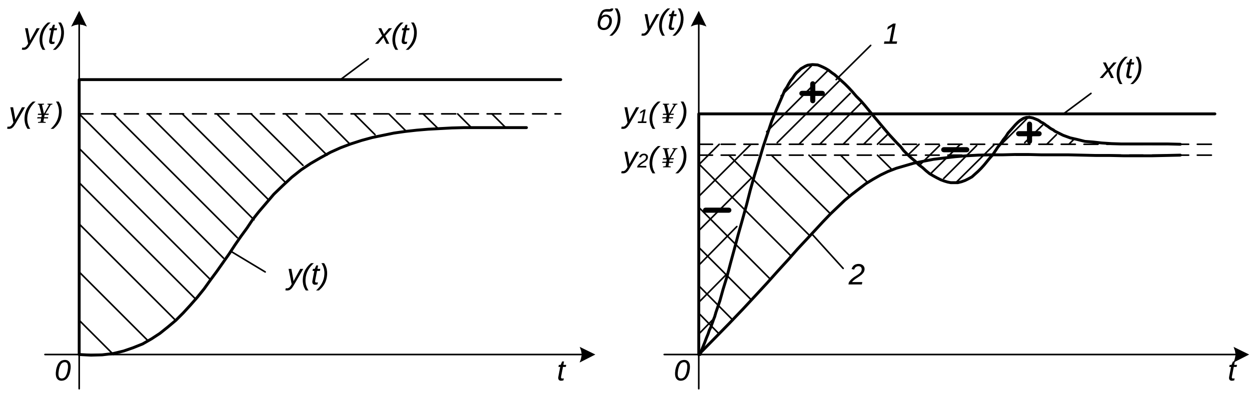
$$I_{Л} = \int_0^\infty [e(t) - e(\infty)]\,dt = \int_0^\infty e_{П}(t)dt,$$

Цей інтеграл відповідає площі під кривою перехідної складової сигналу помилки $e_n(t)$, викликаної зміною впливу, що задає, або впливу, що обурює.



Площа під кривою $e_п(t)$ буде тим менше, ніж швидше закінчується перехідний процес і чим менше відхилення сигналу *y(t)* від *x(t)*. Тому настроєчні параметри регулятора необхідно вибирати таким чином, щоб оцінка $I_л$ була мінімальною.

Недоліком лінійної інтегральної оцінки $Q_Л$ є те, що її можна застосовувати лише для свідомо неколивальних, аперіодичних перехідних процесів. Інтеграл (2), обчислений для знакозмінній кривій 1, (мал. *б)* буде істотно менше інтеграла, обчисленого для аперіодичній кривій 2 (хоча якість перехідного процесу 2 явно краще).



У зв'язку із цим для коливальних перехідних процесів застосовують такі інтегральні оцінки, знакозмінність підінтегральної функції яких тим або іншим способом усунута. Такою оцінкою є, наприклад, ***модульна інтегральна оцінка***

$$I_M = \int_0^\infty |y(\infty) - y(t)|\, dt \quad \text{або} \quad I_M = \int_0^\infty |e_П(t)|\, dt \qquad (3)$$

$$I'_M = \int_0^\infty t|y(\infty) - y(t)|\, dt \quad \text{або} \quad I'_M = \int_0^\infty t|e_П(t)|\, dt \qquad (4)$$

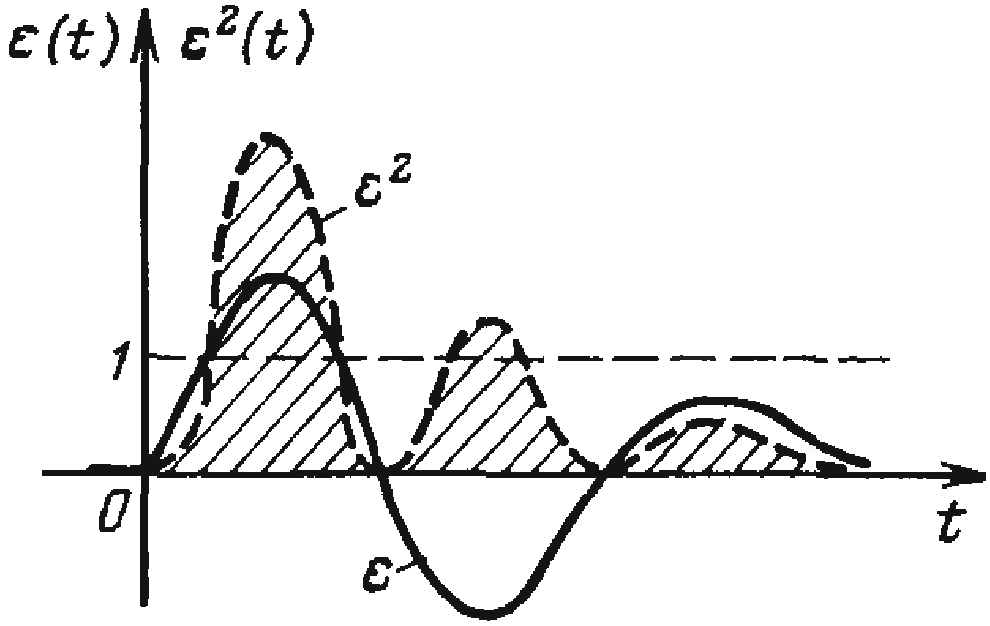
Оцінка (4) надає більшу вагу тим значенням сигналу помилки, які мають місце наприкінці перехідного процесу.

Оцінки $I_м$ і $I'_м$ можна використовувати тільки при дослідженні систем на моделях, тому що їхнє обчислення через коефіцієнти передатної функції (без знаходження $e_п(t)$) неможливо.

При аналізі й синтезі систем регулювання з коливальними властивостями найбільше широко використовується ***квадратична інтегральна оцінка***

$$I_{КВ} = \int_0^\infty e_П^2(t)dt,$$

яка дорівнює площі під кривою $e_П^2(t)$.



Дана квадратична оцінка, як і лінійна враховує величину й тривалість відхилень. Однак через зведення сигналу $e_п(t)$ у квадрат перші (більші) відхилення здобувають у кінцевому значенні інтеграла істотно більшу вагу, ніж наступні (малі) відхилення. Тому мінімальні значення оцінки $I_{кв}$ завжди відповідають коливальним процесам з малим загасанням. Для усунення цього недоліку застосовують ***поліпшену квадратичну оцінку:***

$$I'_{КВ} = \int_0^\infty [e_П^2(t) + T_В^2 e_П^2(t)]dt,$$

яка, крім самих відхилень, ураховує з ваговим коефіцієнтом $T_В^2$ похідну відхилень. Як правило, $T_В^2$ вибирають рівним бажаного часу наростання $t_н$ або в межах $\frac{t_п}{6} \le T_В \le \frac{t_п}{3}$.

де $t_п$ – бажаний час перехідного процесу.

Слід зазначити, що абсолютне значення будь-якої інтегральної оцінки саме по собі не представляє інтересу. Воно служить лише для зіставлення різних варіантів настроювання однієї й тієї ж системи.

Всі розглянуті інтегральні показники використовують для визначення оптимальних значень настроєчних параметрів системи упраління. Оптимальним уважають такі значення, які відповідають мінімуму інтегрального показника $I \to \min$.

11. СИНТЕЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

11.1. Основні поняття про синтез систем керування

Всі математичні завдання, розв'язувані в теорії автоматичного управління, можна об'єднати у два великих класи - завдання аналізу й завдання синтезу автоматичних систем.

У ***завданнях аналізу*** повністю відома структура системи, задане всі (як правило) параметри системи, і потрібно оцінити яке-небудь її статична або динамічна властивість. До завдань аналізу відносять розрахунок точності в сталих режимах, визначення стійкості, оцінка якості системи.

Завдання синтезу можна розглядати як зворотні завданням аналізу: у них потрібно визначити структуру й параметри системи за заданими показниками якостей. Найпростішими завданнями синтезу є, наприклад, завдання визначення передатного коефіцієнта розімкнутого контуру по заданій помилці або умові мінімуму інтегральної оцінки.

Синтезом автоматичної системи називають процедуру визначення структури й параметрів системи за заданими показниками якості. Синтез є найважливішим етапом проектування й конструювання системи. У загальному випадку при проектуванні системи необхідно визначити алгоритмічну й функціональну структуру, тобто вирішити завдання повного синтезу.

Алгоритмічну структуру системи (або її частини) знаходять за допомогою математичних методів і на підставі вимог, записаних у чіткій математичній формі. Тому процедуру відшукання алгоритмічної структури часто називають ***теоретичним синтезом*** або ***аналітичним конструюванням системи керування.***

Синтез функціональної структури або ***технічний синтез*** системи полягає у виборі конкретних елементів (з обліком їхньої фізичної природи) і узгодженні статичних і енергетичних характеристик суміжних елементів.

Виконуючи синтез функціональної структури, насамперед, погоджують вхідні й вихідні сигнали суміжних елементів. Сигнали повинні мати однакову фізичну природу й однакові несучі величини. При виборі виду енергії й конструкції окремих елементів керуються практичними міркуваннями про їхню простоту, надійність, мінімальних габаритах і вартості. Крім цього враховують умови експлуатації елементів: температуру навколишнього середовища, агресивність середовища, вібрацію, вибухонебезпечність. На вибір функціональної структури часто впливають традиції й досвід проектування аналогічних систем.

Послідовність рішення завдання повного синтезу може бути різної. У деяких простих випадках завдання вдається вирішити в ідеальній (з методологічної точки зору) послідовності: спочатку визначити за допомогою математичних методів алгоритмічну структуру системи, а потім - підібрати відповідні конструктивні елементи. Однак застосування цієї послідовності при проектуванні скільки-небудь складних промислових систем управління, як правило, виявляється, з ряду причин неможливим. У першу чергу виникають труднощі в підборі конструктивних елементів: в обмеженій номенклатурі засобів управління, що виготовляються серійно, може не виявитися пристроїв з необхідними алгоритмічними властивостями. Тому завдання синтезу в більшості випадків вирішують у такий спосіб.

Спочатку, виходячи з вимог до призначення системи й з огляду на умови її роботи, по каталогах серійного встаткування вибирають функціонально необхідні елементи системи: регулювальний орган ***РО,*** виконавчий пристрій ***ВП,*** датчики ***Д.*** Ці елементи разом з об'єктом керування ***ОУ*** утворять незмінну частину системи (мал.1). Потім на підставі вимог до статичних і динамічних властивостей системи визначають її змінювану частину, у яку входять підсилювально-перетворюючий блок ***ППБ*** і різні коригувальні пристрої ***КП***. Алгоритмічну структуру змінюваної частини знаходять із урахуванням властивостей уже обраних функціонально необхідних елементів, а технічна реалізація цієї частини здійснюється з використанням стандартних уніфікованих регуляторів і різних коригувальних і пристроїв, що компенсують. Коригувальні пристрої ***КП₁*** і ***КП₂***, що включаються в контур послідовно або у вигляді внутрішнього зворотного зв'язку, служать для поліпшення динамічних властивостей системи. Пристрої, що компенсують**,** ***КУ*** $_3$ включаються між ***датчиком*** $Д_f$, який сприймає вплив, що обурює, і підсилювально-перетворюючим блоком, і використовуються для поліпшення точності системи.

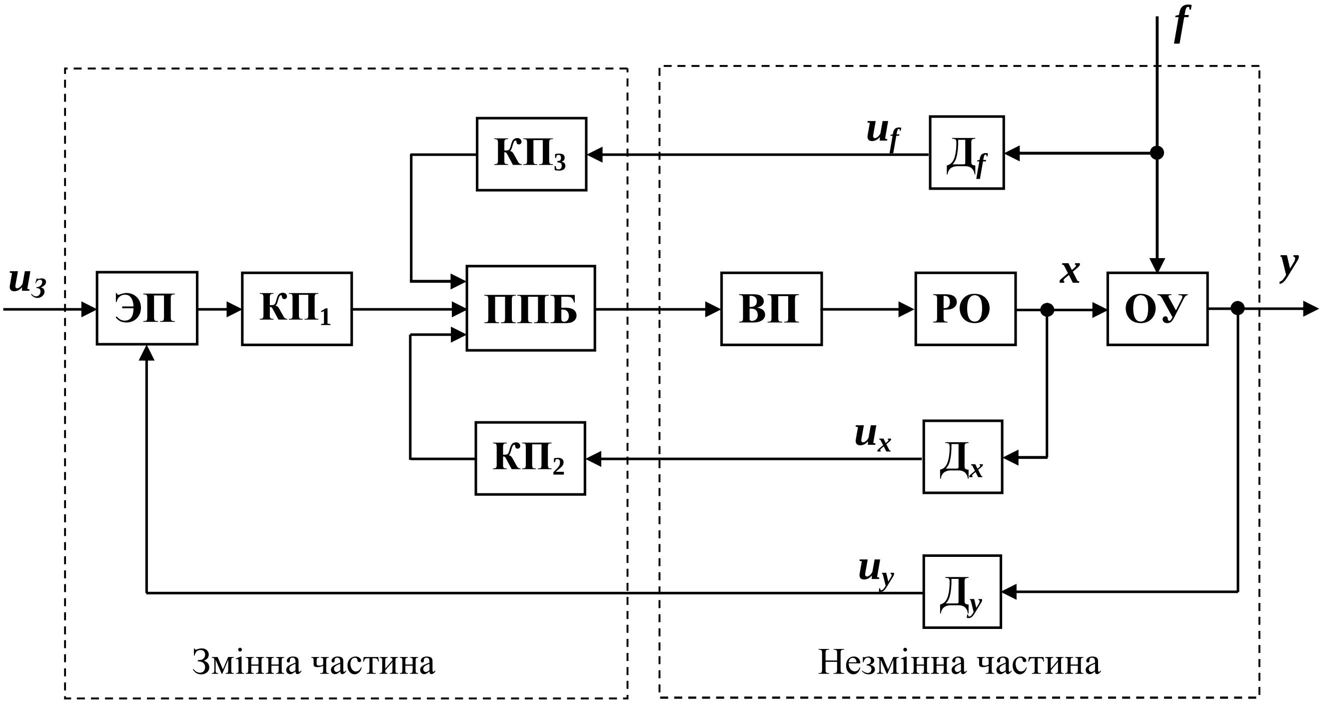


Рисунок 1. Функціональна структура синтезованої системи

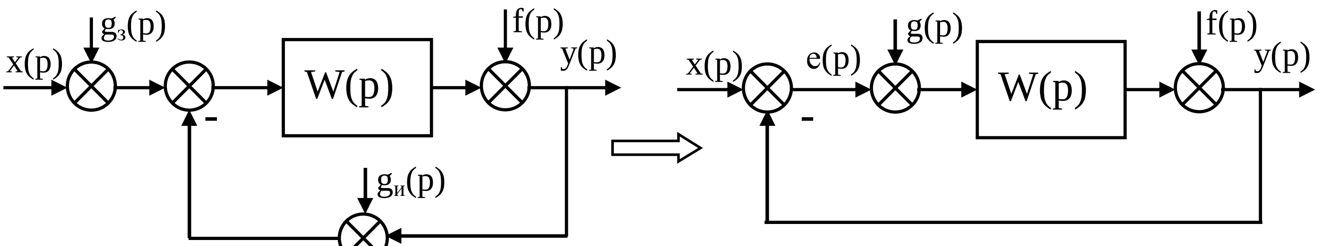
Таким чином, процеси визначення алгоритмічної й функціональної структур всієї системи тісно переплітаються один з одним. Нерідко їх доводиться виконувати декілька раз, чергуючи між собою. Остаточне рішення про структуру системи приймається, як правило, на основі компромісу між точністю і якістю, з одного боку, і простотою й надійністю, з іншої.

Заключним етапом проектування системи керування є ***<u>параметрична оптимізація</u>*** - розрахунок настроєчних параметрів обраного регулятора.

Після рішення завдання синтезу звичайно виконують аналіз синтезованої системи: перевіряють, чи має система необхідні показники точності, стійкості і якості.

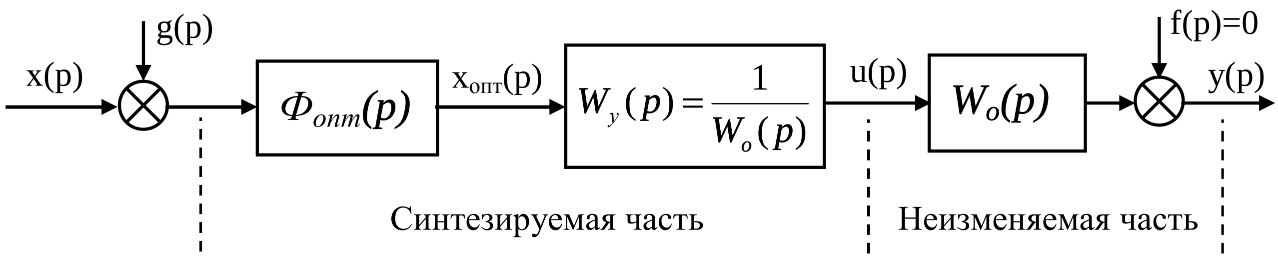
11.2. Загальні принципи синтезу алгоритмічної структури системи управління

<u>Ідеальна структура системи.</u> Для рішення завдання синтезу алгоритмічної структури повинні бути відомі передатна функція $W_O(p)$ об'єкта керування, збурювання $f_{вх}$ й $f_{вых}$ діючі на вході й виході об'єкта, а також перешкода g виникаюча в каналах завдання й виміру.



$W(p) = W_У(p) W_{ОУ}(p)$ $g(p) = g_з(p) + g_и(p)$

У найпростішому випадку, що коли обурюють впливи на об'єкт відсутні, управління можна здійснювати за розімкнутою схемою (мал.2).

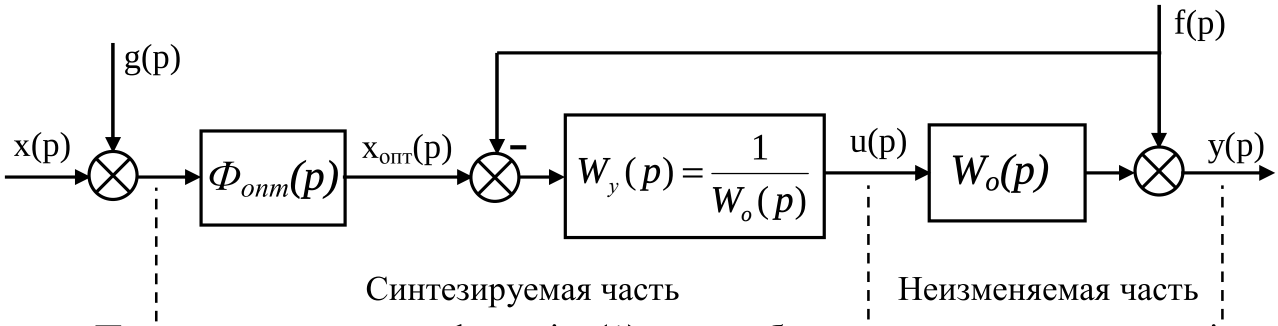


Якщо при цьому передатну функцію $W_y(p)$ управляючого пристрою прийняти рівної

$$W_y(p) = \frac{1}{W_o(p)}, \qquad (1)$$

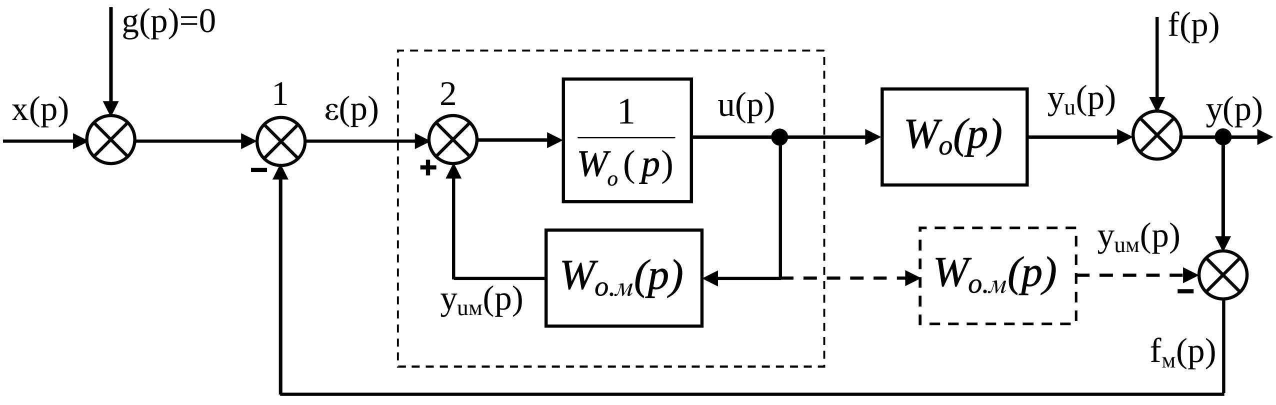
те забезпечиться повна (структурна) компенсація інерційності об'єкта, і система керування буде практично миттєво відтворювати на виході об'єкта вплив, що задає, $x_{опт}(p)$. Завдання $x_{опт}(p)$ формується спеціальним фільтром з передатною функцією $\Phi_{опт}(p)$, що вибирається так, щоб фільтр якнайкраще про пускав всі складові сигналу $x(p)$ і подавляв перешкоду $g(p)$.

Якщо на об'єкт діє збурювання $f(p)\neq 0$ яке піддається виміру, то теоретично можна синтезувати ідеальну розімкнуту систему керування з повною компенсацією збурювання.



Причому, передатна функція (1), що забезпечує повну компенсацію інерційності об'єкта, виявляється найкращої й для компенсації збурювання $f(p)$. Дійсно, при виконанні умови (1) завжди $W_y(p)\cdot W_o(p)=1$, тому корисна складова $y_u(p)$ на виході об'єкта буде повністю врівноважувати збурювання $f(p)$.

Але збурювання $f(p)$, як правило, не вдається виміряти, і систему керування доводиться будувати за замкнутою схемою або принципу зворотного зв'язку. Для відшукання структури ідеальної замкнутої системи можна використовувати ідею непрямого виміру збурювання $f(p)$ за допомогою моделі об'єкта $W_{о.м}(p)$.



Очевидно, що при $W_{о.м}(p) = W_o(p)$ сигнал, що обчислюється на виході моделі

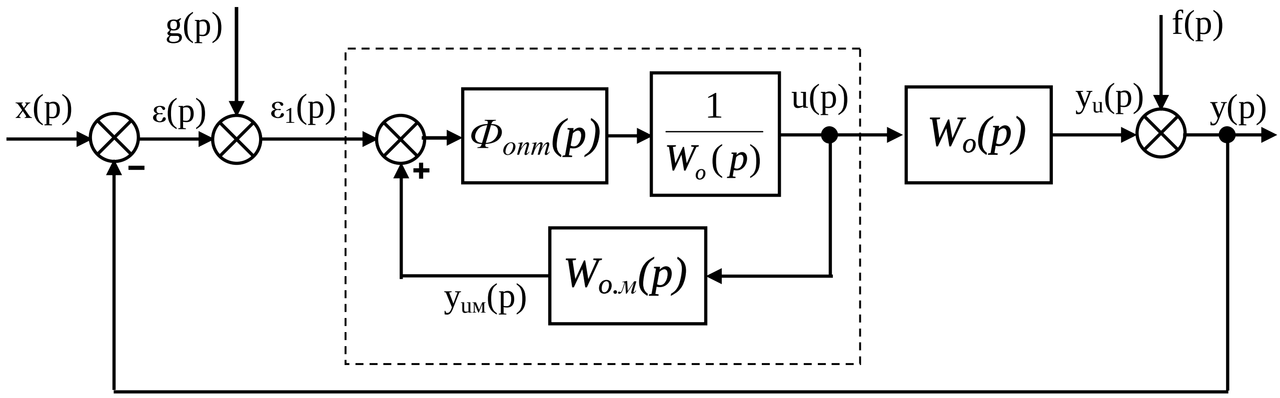
$$f_м(p) = y(p) - y_{им}(p) = (y_и(p) + f(p)) - y_{им}(p) = f(p)$$

є побічно обмірюваним збурюванням *f(p)* і його можна, як і в попередній схемі ввести в керуючий пристрій з передатною функцією $1/W_o(p)$ і, таким чином, знову одержати ідеальну розімкнуту структуру. У ній відповідно до правил структурних перетворень сигнал $y_{им}(p)$ можна перенести на вхід керуючого пристрою й прикласти до суматора 2. Тоді керуючий пристрій $1/W_o(p)$ виявиться охопленим внутрішнім позитивним зворотним зв'язком, а сигнал після суматора 1 буде відповідати сигналу помилки $\varepsilon(p)=x(p)-y(p)$. Останнє означає, що система стала замкнутої й працює за принципом негативного зворотного зв'язку з регулятором - штрихової прямокутник:

$$W_{р.и}(p) = \frac{y(p)}{e(p)} = \frac{1/W_o(p)}{1 - W_{о.м}(p)/W_o(p)}. \qquad (2)$$

При точному збігу моделі й об'єкта регулятор (4) буде працювати як пропорційний з $k_p = \infty$, що відповідає нульовим помилкам по каналах завдання й збурювання.

У загальному випадку, коли $f(p) \neq 0$ і $g(p) \neq 0$ алгоритмічна структура ідеальної замкнутої системи сполучить у собі ознаки обох структур, обґрунтованих вище евристичним шляхом.



У цій ідеальній структурі регулятор також містить внутрішній позитивний зворотний зв'язок, ланки $1/W_o(p)$, $W_{о.м}(p)$, і крім того, -

оптимальний фільтр $\Phi_{опт}(p)$. Замкнута система з таким регулятором теоретично еквівалентна ідеальній розімкнутій системі керування по збурюванню $f(p)$, що практично миттєво відтворює завдання $x(p)$ і повністю компенсує збурювання $f(p)$. Передатна функція регулятора ідеальної системи

$$W_{р.и}(p) = \frac{y(p)}{e_1(p)} = \frac{F_{опт}(p)}{1-F_{опт}(p)} \frac{1}{W_o(p)}. \tag{3}$$

Ланка $\Phi_{опт}(p)$ вхідне в прямий ланцюг регулятора, здійснює оптимальну фільтрацію зовнішніх впливів і виробляє оптимальне завдання $x_{опт}(p)$. Зворотна модель об'єкта $1/W_o(p)$ компенсує його инерционность, а пряма $W_{о.м}(p)$ прогнозує вплив керуючого впливу $u(p)$ на керовану змінну $y(p)$ (обчислює тридцятилітній $y_u(p)$ на виході об'єкта). Тому що сигнал $y_{им}(p)$ з виходу прогнозуючої ланки надходить на вхід регулятора з позитивним знаком, те вся система після чергової зміни керуючого впливу виявляється як би розімкнутою. Внаслідок цього реальна замкнута система теоретично еквівалентна розімкнутій системі керування по збурюванню $f(p)$.

Використовуване в ідеальній системі включення послідовно з об'єктом ланки у вигляді зворотної моделі об'єкта є принциповою основою структурного й параметричного синтезу систем керування, а сам прийом називається ***<u>методом компенсації інерційності об'єкта</u>***.

У практичних завданнях синтезу найчастіше застосовується ***часткова (параметрична) компенсація*** - усунення впливу однієї - двох (звичайно самих більших) постійних часу об'єкта. Для цього послідовно з інерційним об'єктом

$$W_o(p) = \frac{k_o}{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)(T_{o3}p+1).......(T_{on}p+1)}, \tag{4}$$

де $T_{o1} > T_{o2} > T_{o3} >\ldots> T_{on}$, включають ланку, що форсує, першого-другого порядку з передатною функцією

$$W_k(p) = k_k(T_{k1}p+1)(T_{k2}p+1), \tag{5}$$

для якої постійні часу повинні бути рівними компенсуємим постійним часу об'єкта, тобто

$$T_{k1} = T_{o1};\ T_{k2} = T_{o2},$$

і передатний коефіцієнт $k_k = 1/k_o$.

Варто помітити, що практична реалізація систем з ідеальною структурою й застосування методу компенсації інерційності об'єкта пов'язані з певними технічними обмеженнями й перешкодами, які не завжди можуть бути переборені. Зокрема: як правило, неможливо точно реалізувати зворотну передатну функцію об'єкта (1); ланки, що форсують, виду (5), використовувані для часткової компенсації інерційності об'єкта, реально мають свою інерційність; регулятор із внутрішнім позитивним зворотним зв'язком звичайно структурно нестійкий або має великий передатний коефіцієнт, що викликає нереалізовані керуючі впливи. Проте, незважаючи на неможливість практичної реалізації системи з ідеальною структурою, вона є теоретичною межею, до якого необхідно прагнути при синтезуванні високоякісних систем керування. Відповідно до ідеальної структури можна сформулювати фундаментальний **<u>принцип структурно-параметричної оптимізації систем керування зі зворотним зв'язком:</u>**

керуючий пристрій повинен містити динамічну ланку з *передатною функцією, рівної або близької зворотної передатної функції об'єкта.*

<u>Ідеальний регулятор для об'єктів із запізнюванням.</u> Визначимо структуру й передатну функцію ідеального регулятора для інерційних об'єктів із запізнюванням, які можна описати наступною узагальненою передатною функцією

$$W_o(p) = W_o^{'}(p)e^{-pt_o}, \tag{6}$$

де $W_o^{'}(p)$ - дрібно-раціональна функція, що характеризує інерційну частину об'єкта, t_0 - чисте запізнювання об'єкта.

Урахуємо, що при підстановці передатної функції (6) у формулу (3) у передатній функції регулятора з'явиться співмножник e^{+pt_o} який відповідає ***<u>ідеальному випереджувачу</u>*** й точна реалізація якого технічно неможлива.

Тому з метою спрощення шуканої структури регулятора й полегшення його технічної реалізації доцільно допустити, щоб для об'єктів, що містять чисте запізнювання t_0, ідеальна система відтворювала вплив, що задає, із t_0 запізнюванням тобто Щоб

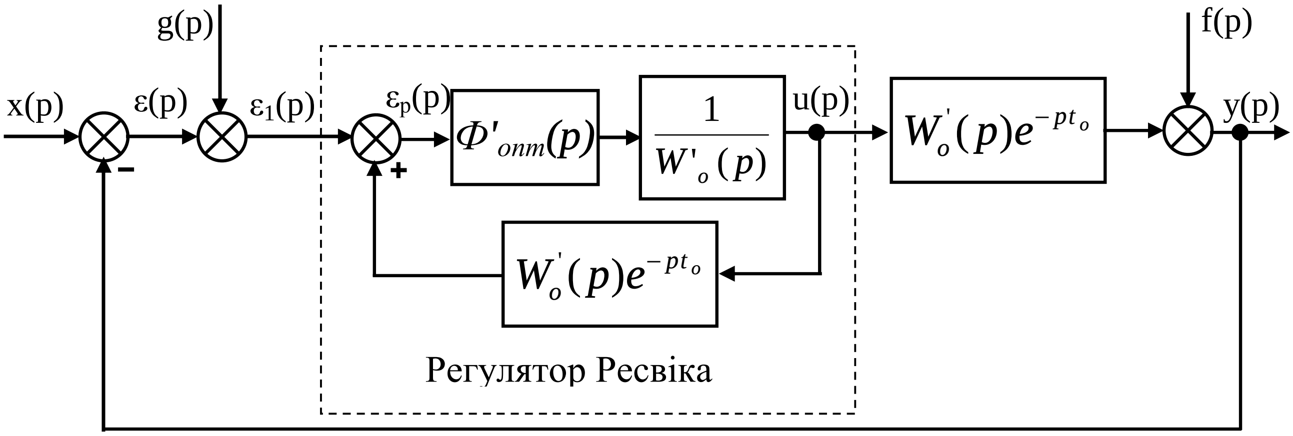
$$\Phi_X(p) = \Phi_{опт}(p) = \Phi'_{опт}(p)e^{-pt_o}, \tag{7}$$

де $\Phi'_{опт}(p)$ - оптимальний фільтр для сигналів *x(p)* і *g(p)*.

Тоді, згідно (3) одержимо ідеальний регулятор для об'єктів із запізнюванням

$$W_{р.и}(p) = \frac{\Phi'_{опт}(p)}{1 - \Phi'_{опт}(p)e^{-pt_o}} \; \frac{1}{W_o'(p)}, \tag{8}$$

який називається ***регулятором Ресвіка.***



Внутрішній зворотний зв'язок регулятора Ресвіка, що містить ланку чистого запізнювання, прогнозує, який сигнал повинен з'явитися на виході об'єкта після чергової зміни керуючого впливу *u*. Тому що цей зв'язок позитивний, то прогнозований сигнал постійно компенсує (нейтралізує) рівний йому реальний вихідний сигнал об'єкта. Результуючий сигнал $\varepsilon_p(p)$ з'являється тільки в перші моменти часу після зміни зовнішніх впливів. Таким чином, завдяки додатковому зворотному зв'язку, що моделює динаміку об'єкта, з основного контуру як би виключається чисте запізнювання t_0, що завжди погіршує стійкість системи й утрудняє рішення завдання синтезу.

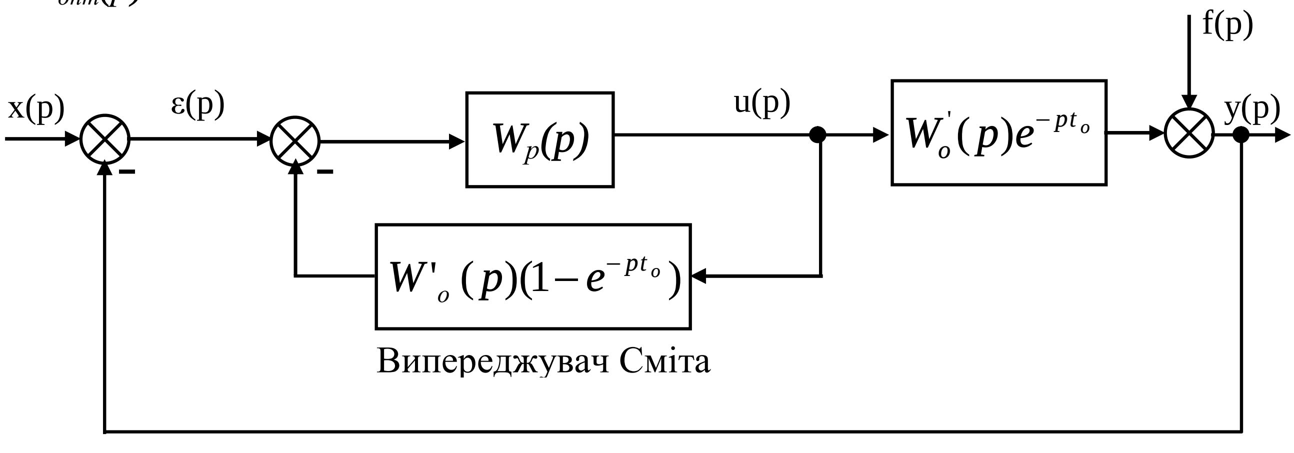
Як і в загальному випадку, практична реалізація ідеальної системи керування об'єктом із запізнюванням пов'язана з певними технічними труднощами. Істотним недоліком системи з регулятором (8) є її критичність або сильна чутливість до малих варіацій запізнювання об'єкта: система стійка тільки при точній рівності запізнювання об'єкта t_0 й запізнювання t_{0M}, в об'єкті, який моделюється тобто

$$t_0 = t_{0M}\,. \tag{9}$$

При розбіжності запізнювань система може стати нестійкою. Можна показати, що у випадку, коли $\Phi_{опт}(p) = k_{опт}$, для стійкості замкнутої системи необхідно $k_{опт} < 0{,}5$. При $k_{опт} > 0{,}5$ найменше порушення рівності (9) веде до втрати стійкості, хоча при точному збігу запізнювань коефіцієнт $k_{опт}$ може бути як завгодно більшим.

Для підвищення запасу стійкості систем з регулятором (8) у їхній контур уводять додаткові коригувальні ланки або обмежуються неповною компенсацією інерційної частини об'єкта. Природно, що динамічна точність керування при цьому погіршується.

Ідея нейтралізації запізнювання об'єкта реалізується також за допомогою ***<u>випереджувачу Сміта</u>***, яким охоплюють типові регулятори. Неважко переконатися, що при великому передатному коефіцієнті ($k_p \to \infty$) регулятор з випереджувачем Сміта еквівалентний регулятору Ресвіка з $\Phi_{опт}(p) = 1$.



Випереджувач Сміта

Систему з випереджувачем Сміта технічно реалізувати легше, тому що не потрібно моделювати зворотну передатну функцію об'єкта.

Хоча регулятор Ресвіка (8) практично здійснити ніколи не вдається, аналіз його властивостей дозволяє оцінити граничні можливості керування об'єктами із запізнюванням. Так, для найкращого відтворення впливу, що задає, $x(p)$ при відсутності перешкоди (тобто при $\Phi_{опт}(p)=1$) регулятор (8) приймає вид:

$$W_{p.u}(p)=\frac{1}{W_o{}'(p)(1-e^{-pt_o})}, \qquad (10)$$

а передатні функції замкнутої системи за каналом завдання ($x(p)$-$y(p)$)

$$W_З(p)=e^{-pt_o}, \qquad (11)$$

і за каналом збурювання ($f(p)$-$y(p)$)

$$W_B(p)=1-e^{-pt_o}. \qquad (12)$$

Функціям (11) і (12) відповідають ідеальні перехідні процеси прямокутної форми, що закінчуються за мінімально можливий час $t_n=t_0$.

Найбільше важко керованими є об'єкти, що містять тільки чисте запізнювання

$$W_O(p)=k_O e^{-pt_o}, \qquad (13)$$

і для них найкраще застосовувати саме регулятор Ресвіка або випереджувач Сміта, що забезпечують структурну компенсацію запізнювання. Регулятор, (10) для об'єкта (13) приймає вид

$$W_{pu}(p)=\frac{u(p)}{e(p)}=\frac{1}{k_O(1-e^{-pt_o})}. \qquad (14)$$

При повільних зовнішніх впливах, для яких припустима наближена заміна

$$e^{-pt_o}\approx 1-pt, \qquad (15)$$

ідеальний регулятор еквівалентний I-Регулятору

$$W_{pu}(p)\approx\frac{k_u}{p}, \qquad (14)$$

де $k_u=1/k_o t_0$.

Звідси можна сформулювати загальне правило настроювання регуляторів для об'єктів із запізнюванням:

передатний коефіцієнт регулятора повинен бути обернено пропорційний передатному коефіцієнту об'єкта й часу запізнювання.

11.3. Структурно-параметрична оптимізація систем без запізнювання

Методи оптимізації амплітудної характеристики.

При проектуванні систем управління об'єктами, що не містять чистого запізнювання, найбільше застосування одержали два критерії - модульний оптимум (МО) і симетричний оптимум (СО).

Критерій модульного оптимуму, називаний також критерієм амплітудного або технічного оптимуму, полягає у виконанні наступних вимог до форми амплітудної характеристики $A_З(w)$ замкнутої системи (Рисунок 1): характеристика в як можна більше широкому діапазоні частот повинна бути горизонтальною і рівною одиниці; похила ділянка характеристики повинен бути як можна більше крутопадаючою. Інакше кажучи, критерій модульного оптимуму вимагає, щоб настроювана система наближалася по своїх частотних передатних властивостях до ідеального фільтра низької частоти, що має, як відомо, прямокутну частотну характеристику с. $w_0 = w_П$ Тоді при відсутності перешкоди на вході, система буде щонайкраще відтворювати вплив, що *задає, x(t)* і подавляти *збурювання f(t)*. При наявності на вході високочастотної перешкоди частоту пропущення w_0 системи вибирають також досить великою, але по компромісній умові спільної фільтрації всіх діючих сигналів.

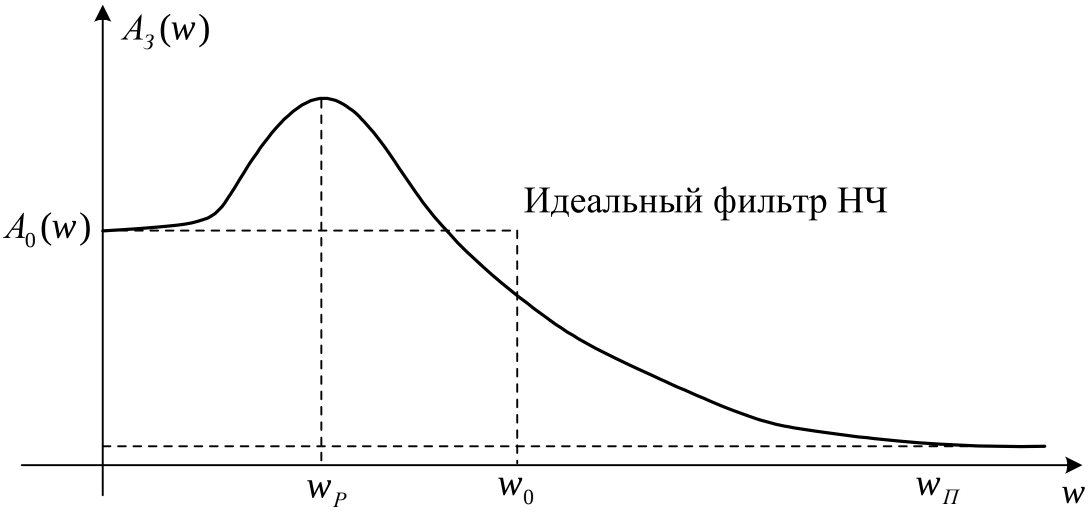


Рисунок 1. АЧХ замкнутої системи

Настроювання системи за критерієм МО забезпечують мале перерегулювання й досить швидке протікання перехідного процесу з наступними показниками якості:

$$s < 9\%, \quad t_H < \frac{2p}{w_0}, \quad t_П < \frac{3p}{w_0}.$$

Амплітудну характеристику, близьку за формою до прямокутної характеристики ідеального фільтра, має так званий *фільтр Баттерворта*, у якого АЧХ

$$A_Б(w) = \frac{1}{\sqrt{(1+Tw)^{2n}}}. \qquad (1)$$

На практиці звичайно використовують фільтри з порядком n = 2...8.

$$W_З(p) = \frac{b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n} \qquad (2)$$

приводять до нормованого виду

$$W_З(\overline{p}) = \frac{B_m}{\overline{p}^n + A_1 \overline{p}^{n-1} + A_2 \overline{p}^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \overline{p} + 1}, \qquad (3)$$

де $\overline{p} = pT_M = p/w_0$ - оператор Лапласа, що відповідає безрозмірному (відносному) часу $\bar{t} = t/T_M$, T_M - масштабний множник, рівний

$$T_M = 1/w_0 = \sqrt[n]{a_0/a_n}; \qquad (4)$$

безрозмірні коефіцієнти

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_M; \qquad A_2 = \frac{a_2}{a_0} T_M^2; \ldots; \; A_2 = \frac{a_{n-1}}{a_0} T_M^{n-1}; \qquad B_m = \frac{b_m}{a_n} \ldots \tag{5}$$

Щоб забезпечити бажану форму амплітудної характеристики, близьку до прямокутного, коефіцієнти нормованої функції (3) вибирають у відповідності зі стандартними поліномами Баттерворта (табл. 1). Саме при таких сполученнях коефіцієнтів A_i амплітудна характеристика фільтра приймає вид (1), причому $T = T_M$, а відносна частота $W_0 = w_0 T = 1$ відповідає значенню АЧХ, рівному 0,7 (при Bm = 1).

Таблиця 1. Коефіцієнти фільтрів Баттерворта

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	1,4	--	--	--	--	--	--
3	2,0	2,0	--	--	--	--	--
4	2,61	3,41	2,61	--	--	--	--
5	3,24	5,24	5,24	3,24	--	--	--
6	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	--	--
7	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	--
8	5,12	13,1	21,8	25,7	21,8	13,1	5,12

Масштабний множник T_M не впливає на форму перехідного процесу й служить узагальненою мірою швидкодії системи. Його значення можна вибрати виходячи з необхідних показників швидкодії t_H і $t_П$ по наступних наближених формулах:

$$t_H \approx nT_M, \qquad t_П \approx 2nT_M. \tag{6}$$

Знайдене по цих формулах значення T_M забезпечують за рахунок вибору по формулі (4) відповідного загального передатного коефіцієнта розімкнутого контуру k, що входить у вільний член a_n: $a_n = 1 + k$ - для статичних систем, $a_n = k$ - для астатических систем.

У системах, параметри яких обрані у відповідності зі стандартними поліномами Баттерворта, перерегулювання $s \approx 10 \div 15\%$.

Зазначені вище значення тривалості перехідного процесу t_n і перерегулювання s строго витримуються тільки в тих випадках, коли чисельник передатної функції (2) не містить доданків з оператором *p*. Проте й для систем з більше складним поліномом чисельника можна користуватися значеннями коефіцієнтів Баттерворта, що рекомендуються. При цьому також забезпечується досить гарна якість перехідного процесу. Крім того, настроювання, що відповідають поліномам Баттерворта, можуть використовуватися як вихідні (відправні) для відшукання оптимальних настроювань систем, передатні функції яких мають чисельник у вигляді полінома від *p*.

11.4.Типові закони регулювання, які застосовують в лінійних САУ.

- пропорційний закон регулювання (П-Закон).

Рівняння пропорційного закону: $u(t) = k_{\Pi} e(t)$.

Передатна функція пропорційного закону регулювання:

$$W_p(p) = k_{\Pi} = k_p .$$

Відповідно до наведеного вище вираження керуючий вплив, як у статичному, так і в динамічному режимах роботи пропорційний сигналу помилки й тому цей закон називається пропорційним, а регулятор його що реалізує - П-регулятор.

Збільшення параметра настроювання - коефіцієнта передачі k_p підвищує точність сталих режимів і швидкодію системи, але збільшує коливальність і погіршує стійкість.

- ***інтегральний закон регулювання (І-Закон).***

Рівняння інтегрального закону: $u(t) = \frac{1}{T_И}\int_0^t e(t)dt$ або $T_И \frac{du(t)}{dt} = e(t)$

Передатна функція інтегрального закону регулювання:

$$W_p(p) = \frac{k_И}{p} = \frac{k_p}{T_И p}.$$

При інтегральному законі регулювання керуючий вплив у кожний момент часу пропорційний інтегралу від сигналу помилки. Тому І-Регулятор реагує головним чином на тривалі відхилення керованої величини від заданого значення - ***повільний спосіб управління***. Короткочасні відхилення згладжуються цим регулятором. Характерною рисою І-Закону є те, що керуючий вплив змінюється доти, поки помилка не буде дорівнює нулю. Типовий І-Закон управління забезпечує астатизм у системі зі статичним об'єктом, тобто нульову сталу помилку при постійних впливах. Негативною стороною І-Закону є погіршення властивостей системи в перехідних режимах: зменшується швидкодія й збільшується коливальність.

- ***пропорційно-інтегральний закон регулювання (ПІ-закон).***

Рівняння пропорційно-інтегрального закону:

$$u(t) = k_p\left(e(t) + \frac{1}{T_И}\int_0^t e(t)dt\right)$$

Передатна функція пропорційно - інтегрального закону регулювання:

$$W_p(p) = k_П + \frac{k_И}{p} = k_P + \frac{k_P}{T_И p} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p}\right) = \frac{k_P(T_И p + 1)}{T_И p}.$$

Цей закон найбільше часто реалізується в промисловій автоматиці. Він забезпечує астатизм у системі. Завдяки наявності інтегральної складової ПІ-регулятор забезпечує високу точність у сталому режимі, а при певному співвідношеннях коефіцієнтів k_P і $T_И$ забезпечує гарні показники якості в перехідних режимах. Керуючі пристрої, що реалізують ПІ-закон, мають два настроюваних параметри - коефіцієнт передачі k_P і постійну часу інтегрування $T_И$.

- ***пропорційно-диференціальний закон регулювання (ПД-закон).***

Рівняння пропорційно - диференціального закону:

$$u(t) = k_p\left(e(t) + T_Д \frac{de(t)}{dt}\right)$$

Передатна функція пропорційно - диференціального закону регулювання: $W_p(p) = k_p(1 + T_Д p)$.

ПД-регулятор реагує не тільки на величину сигналу помилки, але й на швидкість її зміни. Завдяки цьому при використанні ПД-закону досягається попереджуючий ефект управління. Дія даного закону така ж, як і при введенні в систему ланки, що форсує.

Диференційна дія визначається швидкістю зміни помилки управління. Отже, це - ***швидкий спосіб управління***, що, в остаточному підсумку, зникає при наявності постійних помилок. Такий спосіб іноді називається *прогнозуючим способом*, через його залежність від тенденції зміни помилки. Головним обмеженням способу, що диференціює, розглянутого в ізоляції від інших способів, є його тенденція формувати більші керуючі сигнали у відповідь на високочастотні сигнали помилки - помилки, викликані змінами уставки або шумом виміру. Його створення вимагає реалізованої передатної функції, тому звичайно до диференціювання додається полюс.

- ***пропорційно-інтегрально-диференціальний закон регулювання (ПІД-закон).***

Рівняння пропорційно - інтегрально - диференціального закону:

$$u(t) = k_p\left(e(t) + \frac{1}{T_И}\int_0^t e(t)dt + T_Д \frac{de(t)}{dt}\right)$$

Передатна функція пропорційно - інтегрально - диференціального закону регулювання:

$$W_p(p) = k_П + \frac{k_И}{p} + k_Д p = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + T_Д p\right) = k_p \frac{T_И p + 1 + T_И T_Д p^2}{T_И p}.$$

$$W_p(p) = k'_p \frac{(T'_И p + 1)(T'_Д p + 1)}{T'_И p} = k'_p \frac{T'_И + T'_Д}{T'_И} + \frac{k'_p}{T'_И p} + k'_p T'_Д p$$

Самий гнучкий закон управління, ефективний при управлінні складними об'єктами.

Необхідна якість управління при використанні розглянутих типових законів досягається вибором настроечных параметрів - коефіцієнтів передачі й постійних часу відповідного тридцятимільйонного закону управління: $k_П$, $k_И$, $k_Д$ - коефіцієнти пропорційної, інтегральної й диференціальної частини; k_p, k'_p - передатні коефіцієнти регулятора; $T_И$, $T'_И$ - постійні часу інтегрування; $T_Д$, $T'_Д$ - постійні часу диференціювання.

Параметри, що входять у різні форми записи типових законів управління, зв'язані між собою співвідношеннями:

$$k_П = k_p = k'_p \frac{T'_И + T'_Д}{T'_И}; \quad k_И = \frac{k_p}{T_И} = \frac{k'_p}{T'_И}; \quad k_Д = k_p T_Д = k'_p T'_Д$$

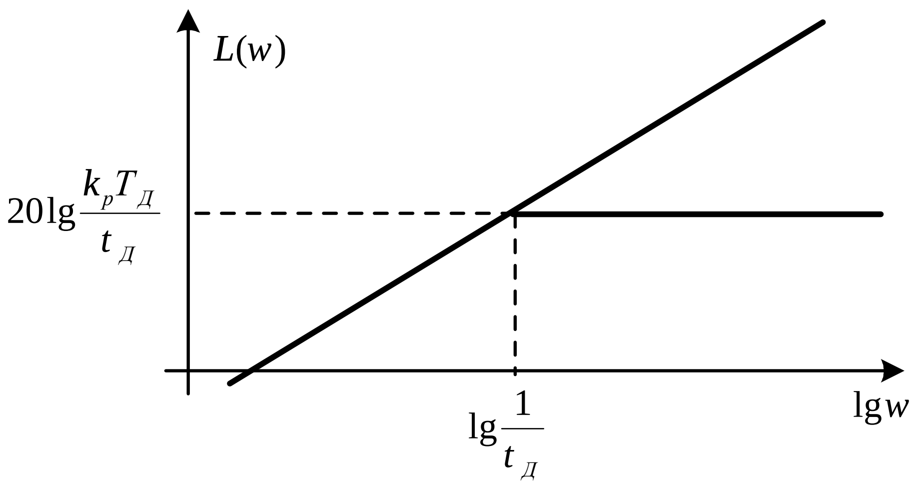
Складова, що диференціює, у розглянутих законах регулювання (ПД, ПІД) представлена у вигляді ідеальної диференцюючої ланки. Її створення вимагає реалізованої передатної функції, тому звичайно до диференціювання додається полюс:

$$W_{ПД}(p) = k_p\left(1 + \frac{T_Д p}{t_Д p + 1}\right)$$

$$W_{ПИД}(p) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + \frac{T_Д p}{t_Д p + 1}\right)$$

У відсутності інших обмежень, додаткова постійна часу $t_Д$ звичайно вибирається такою, що $0{,}1T_Д \le t_Д \le 0{,}2T_Д$. Чим менше додаткова постійна часу диференціювання $t_Д$, тим більше діапазон частот, де реальне диференціювання відповідає точному диференціюванню.

Класичний аргумент вибору $t_Д \neq 0$, крім забезпечення належних фізично реалізованих характеристик регулятора, - зменшити високочастотний шум. Останній момент проілюстрований на рисунку, що показує, що реальне диференціювання гарне наближає точне диференціювання на частотах до $\frac{1}{t_Д}$ рад/с, однак це приводить до обмеженого посилення на високих частотах, у те час як точне диференціювання має необмежене посилення.



Оскільки було показано, що $t_Д \neq 0$ є необхідним злом, тобто як необхідний відхід від чистої диференціальної дії, майже у всіх промислових Під-Регуляторах один раз установлюють $t_Д$ як фіксовану частку $T_Д$, а не розглядають її як незалежний параметр проектування зі своїм власним призначенням. Однак згодом стало ясно, що додаткова постійна часу диференціювання $t_Д$ є важливим ступенем волі, доступної проектувальникові.

Треба бути обережним при використанні правил настроювання ПІД-регулятора, тому що є різні варіанти параметризації (завдання параметрів):

$$W_{ПИД}(p) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + \frac{T_Д p}{t_Д p + 1}\right) \quad (1)$$

$$W_{ПОСЛЕДОВ}(p) = k_П\left(1+\frac{k_И}{p}\right)\left(1+\frac{k_Д p}{gk_Д p+1}\right) \qquad (2)$$

$$W_{ПАРАЛЛЕЛ}(p) = k_П + \frac{k_И}{p} + \frac{k_Д p}{gk_Д p+1} \qquad (3)$$

Рівняння (1) називають стандартною формою. Альтернативна, послідовна форма представлена рівнянням (2), паралельна форма - рівнянням (3).

11.5. Оптимізація типових контурів регулювання.

Застосуємо викладений метод оптимізації амплітудної характеристики для розрахунку настроєчних параметрів типових законів регулювання, використовуваних для управління наступними інерційними об'єктами другого-третього порядку без запізнювання:

Застосуємо викладений метод оптимізації амплітудної характеристики для розрахунку настроєчних параметрів типових законів регулювання, використовуваних для управління наступними інерційними об'єктами другого-третього порядку без запізнювання:

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p(T_{o1}p+1)}, \qquad (1)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)}, \qquad (2)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)}, \qquad (3)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)(T_{o3}p+1)}. \qquad (4)$$

де $T_{o1} < T_{o2} < T_{o3}$ причому в загальному випадку співмножник з найменшої постійної часу T_{o1} приблизно заміняє собою кілька інерційних ланок із ще більш малими постійними часу T_{oi} тобто

$$\prod_i (T_{oi}p+1) \approx T_{oM}p+1, \qquad T_{o1} = T_{oM} = \sum_i T_{oi}$$

Залежно від типу й порядку об'єктів (1) - (4), а також співвідношень між їхній постійними часу, настроювання контуру регулювання здійснюється або за критерієм МО, або за критерієм СО (табл. 2).

Настроєчні параметри регуляторів k'_p, $T'_И$, $T'_Д$, що забезпечують одержання певних показників якості, надалі будемо називати *гарантуючими*. Такий термін у розглянутому завданні точніше, ніж використовувані часто поняття «оптимальні» (у вітчизняній літературі) і «найбільш сприятливі» (у німецькій літературі) настроювання.

Таблиця 2. Гарантуючі настроєчні параметри типових регуляторів для об'єктів без запізнювання

Передатна функція ОУ	Умови застосування	Критерій	Параметри регулятора		
			k'_p	$T'_И$	$T'_Д$
$\dfrac{k_o}{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)}$, $T_{o1}<T_{o2}$	$T_{o2} \le 4T_{o1}$	МО	$\dfrac{T_{o2}}{2k_oT_{o2}}$	T_{o2}	-і-
	$T_{o2} \ge 4T_{o1}$	СО	$\dfrac{T_{o2}}{2k_oT_{o1}}$	$4T_{o1}$	-і-
$\dfrac{k_o}{p(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)}$	$T_{o2} << T_{o1}$	СО	$\dfrac{1}{2k_oT_{o1}}$	$4T_{o1}$	-і-
	$T_{o1}<T_{o2}$	СО	$\dfrac{1}{2k_oT_{o1}}$	$4T_{o1}$	T_{o2}
	$T_{o2} \le 4T_{o1}$	МО	$\dfrac{T_{o2}}{2k_oT_{o1}}$	T_{o2}	T_{o2}
$\dfrac{k_o}{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)(T_{o3}p+1)}$, $T_{o1}<T_{o2}<T_{o3}$	$T_{o3} \ge 4T_{o1}$	СО	$\dfrac{T_{o3}}{2k_oT_{o1}}$	$4T_{o1}$	T_{o2}
	$T_{o2} \ge 4T_{o1}$	СО	$\dfrac{T_{o2}T_{o3}}{8k_oT_{o1}^2}$	T_{o2}	$4T_{o3}$

Якщо в об'єкта другого порядку (2) $T_{o2} \le 4T_{o1}$ то краще критерій МО. Для виконання вимог критерію застосовують ПІ-регулятор

$$W_p(p) = k'_p \frac{(T'_И p + 1)}{T'_И p}$$

с постійною часу інтегрування $T'_И$, рівною найбільшої постійної часу об'єкта $T'_И = T_И = T_{o2}$. Тим самим досягається повна компенсація (усунення з рівняння динаміки) цієї найбільшої постійної часу. Передатна функція розімкнутого контуру приймає вид

$$W(p) = W_p(p) W_o(p) = \frac{k'_p k_o}{T'_И p(T_{o1} p + 1)} \tag{5}$$

На рисунках показані характеристики системи з об'єктом (2) і ПІ-регулятором, настроєним за критерієм МО. Показники якості в замкнутій системі:

$$s \approx 4{,}3\%, \ t_Н \approx 4{,}7 T_{o1}, \ t_Н \approx 4{,}5 T_{o1}.$$

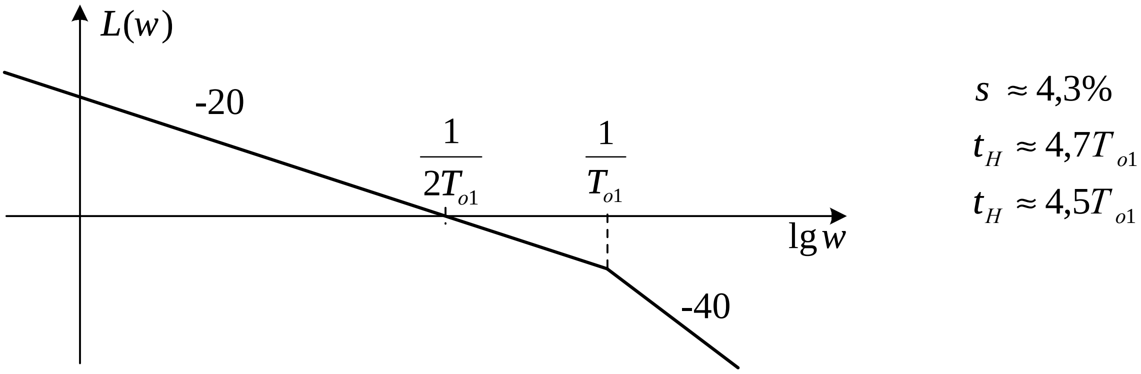


Рисунок 1. ЛАЧХ розімкнутої системи, настроєної за критерієм МО.

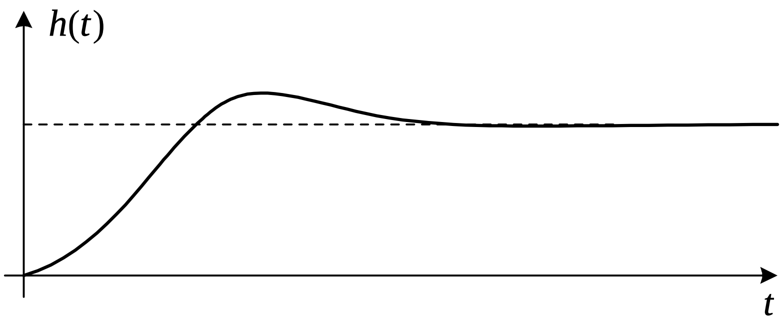


Рисунок 2. Перехідна характеристика системи, настроєної за критерієм МО.

Якщо більша постійна часу T_{o2} перевищує меншу T_{o1} в 20 разів, то об'єкт (2) по своїх властивостях наближається до реальної інтегруючої ланки (1) і описується функцією

$$W_o(p) \approx \frac{k_o}{T_{o2}p(T_{o1}p+1)} \tag{6}$$

Таким об'єктом можна управляти за допомогою П-регулятора

$$W_p(p) = k_p,$$

настроєного на МО. Для цього передатний коефіцієнт регулятора k_p повинен бути таким же як при $T_{o2} \le 4T_{o1}$. Але в системі з П-регулятором по каналі збурювання виникає статична помилка e_B, рівна при одиничному збурюванні *f(t)* = 1(t):

$$e_B = \frac{2k_oT_{o1}}{T_{o2}}.$$

При $T_{o2} \ge 20T_{o1}$ помилка $e_B \le 0{,}1k_o$, що цілком припустимо.

Для астатичних об'єктів другого порядку (1) і (6) за умовами структурної стійкості замкнутої системи не можна використовувати ПІ-регулятор з настроюванням $T'_И = T_{o1}$ повністю компенсує єдину постійну часу. Тому для таких об'єктів застосовують настроювання $T'_И \ne T_{o1}$, що забезпечує лише часткову компенсацію постійної часу T_{o1}. Знайдемо найкращі співвідношення настроєчних параметрів для часткової компенсації. Передатна функція розімкнутого контуру, що складається з астатичного об'єкта (1) і ПІ-регулятора з $T'_И \ne T_{o1}$ має вигляд

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = k'_p\frac{T'_Иp+1}{T'_Иp}\frac{k_o}{p(T_{o1}p+1)} \tag{7}$$

Їй відповідає передатна функція замкнутої системи:

$$W_З(p) = \frac{k'_pk_o(T'_Иp+1)}{T'_ИT_{o1}p^3 + T'_Иp^2 + k'_pk_oT'_Иp + k'_pk_o} \tag{8}$$

Застосовуючи до знаменника функції (8) співвідношення Баттерворта (табл. 1), можна одержати наступні настроювання ПІ-регулятора:

$k'_p = k_p = 1/2 k_o T_{o1}$; $T'_И = T_И = 4T_{o1}$, причому $T_M = 2T_{o1}$.

При отриманих настроюваннях передатні функції (7) і (8) приймають вид:

$$W(p) = \frac{4T_{o1}p + 1}{8T_{o1}^2 p^2 (T_{o1}p + 1)} \qquad (9)$$

$$W_З(p) = \frac{4T_{o1}p + 1}{8T_{o1}^3 p^3 + 8T_{o1}^2 p^2 + 4T_{o1}p + 1} \qquad (10)$$

Передатній функції (9) відповідає симетрична ЛАЧХ. (рис.3), тому викладений підхід до вибору настроювань одержав назву ***симетричного оптимуму***.

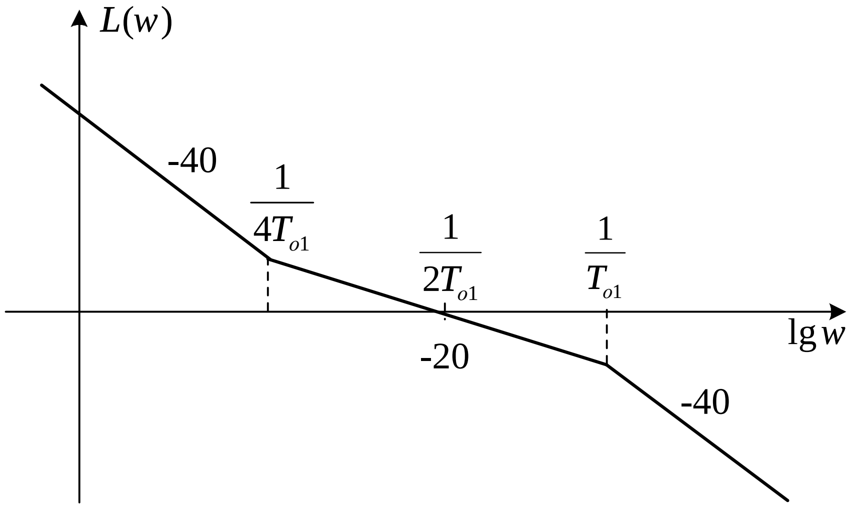


Рисунок 3. ЛАЧХ розімкнутої системи, настроєної за критерієм СО.

Передатній функції (10) відповідає перехідна характеристика замкнутої системи, показана на рис.4. Перехідний процес у контурі, настроєному за критерієм СО, характеризується наступними показниками:

$$s \approx 43\%,\ t_H \approx 3{,}1T_{o1},\ t_H \approx 14{,}7T_{o1}$$

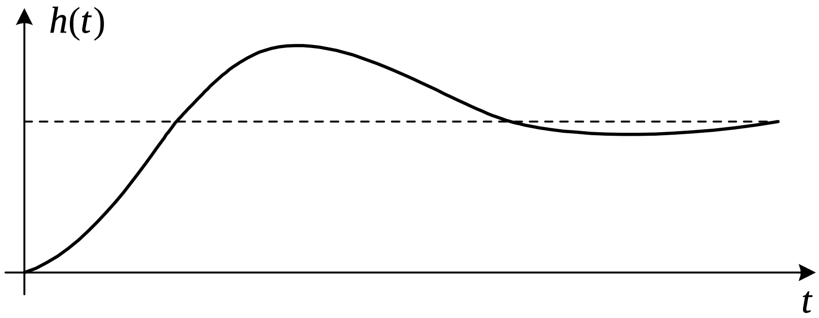


Рисунок 4. Перехідна характеристика системи, що настроєна за критерієм СО

Для статичного об'єкта третього порядку (4) з постійними часу, що незначно відрізняються друг від друга, можна застосовувати ПІД-регулятор

$$W_p(p) = k'_p \frac{(T'_И p+1)(T'_Д p+1)}{T'_И p},$$

настроєний за критерієм МО, з повною компенсацією двох найбільших постійних часу. Причому, більшу ($T_{о3}$) із цих двох постійних часу необхідно компенсувати постійної $T'_И$, а меншу (T_{02}) - постійної $T'_Д$. Якщо хоча б одна з більших постійних часу об'єкта (4) перевищує найменшу в 4 рази, то ПІД-регулятор необхідно настроювати за критерієм ОС, з повною компенсацією лише одного постійної часу T_{02}.

Моделювання на ЕОМ і аналіз перехідних процесів, що відбуваються в замкнутій системі по каналах завдання й збурювання при різних настроюваннях, дозволяють зробити наступні виводи про вплив критеріїв настроювання й параметрів регулятора на показники перехідного процесу й перевагах і недоліках самих критеріїв:

1. Збільшення передатного коефіцієнта k_p приводить до зменшення часу наростання $t_Н$ і підвищенню перерегулювання s .

2. Збільшення постійної інтегрування $T'_И$ приводить до збільшення часу $t_П$ і зниженню перерегулювання s .

3. Критерій МО кращий при оптимізації систем, що відпрацьовують в основному зміни впливу $x(t)$, що задає, тобто що стежать і програмних систем.

4. Критерій ОС доцільно застосовувати при настроюванні систем, які частіше реагують на впливи $f(t)$, що обурюють , тобто стабілізуючих систем.

5. Обидва критерії забезпечують по каналу збурювання приблизно однакові значення першого максимального відхилення $x_{\max}$:

$$x_{\max}/f \approx (0{,}85 \div 1{,}45)k_o/(T_{o2}/T_{o1})$$

де коефіцієнт 0,85 відповідає відношенню T_{o2}/T_{o1} =2,

а 1,45 - відношенню T_{o2}/T_{o1} =8.

6. При настроюванні за критерієм МО відносна тривалість перехідного процесу по каналі збурювання збільшується з ростом відносини T_{o2}/T_{o1}:

$$t_П/T_{o1} \approx 5 + 1{,}5(T_{o2}/T_{o1}),$$

а за критерієм ОС – зменшується: $t_П/T_{o1} \approx (35 \div 65)/(T_{o2}/T_{o1})$,

де $t_П$ відповідає моменту досягнення регульованою величиною значення y = 0,05k_o (при $f(t)$ = 1).

7. При T_{o2}/T_{o1} =4 тривалості перехідного процесу по каналі збурювання для обох критеріїв однакові. При $T_{o2}/T_{o1} < 4$ кращу швидкодію створює критерій МО, а при $T_{o2}/T_{o1} > 4$ - критерій СО.

Для зниження й усунення більших перерегулювань, які виникають у системі, настроєної за критерієм ОС, застосовують згладжування східчастого впливу, що задає, шляхом включення на вході системи спеціального фільтра - інерційної ланки першого порядку:

$$W_Ф(p) = \frac{1}{T_Ф p + 1}, \qquad \textbf{(11)}$$

де $T_Ф = 4T_{o1}$- постійна часу для астатичних об'єктів (1) і (3) і статичних об'єктів (2) і (4) з $T_{o2}/T_{o1} \geq 20$. При менших відносинах постійну часу $T_Ф$

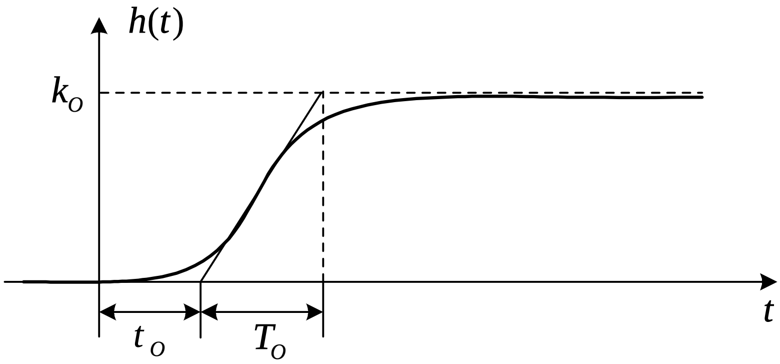
можна зменшити. Природно, що швидкодія системи при включенні фільтра, який згладжує, знижується.

Перехідний процес, що відповідає послідовному з'єднанню ланок (10) і (11), характеризується показниками:

$$s \approx 8{,}1\%,\ t_H \approx 7{,}6T_{o1},\ t_H \approx 11{,}7T_{o1}$$

11.6. Визначення настроєчних параметрів типових регуляторів технологічних об'єктів із запізнюванням

При автоматизації технологічних процесів часто доводиться зустрічатися з інерційними статичними об'єктами, перехідні характеристики яких мають специфічну S-Образну форму. Нахил, кривизна характеристики і її відстань від осі ординат залежать від динамічних властивостей конкретного об'єкта.



Для практичних розрахунків систем управління такими об'єктами кожну S-Образну криву перехідного процесу, зняту при одиничному східчастому впливі, досить охарактеризувати наступними параметрами, обумовленими безпосередньо за графіком:

- коефіцієнт передачі k_o;
- постійна часу T_o;
- повне запізнювання t_o;

Параметри T_o й t_o визначаються досить легко – проведенням дотичної до найбільш крутої ділянки перехідної характеристики.

Використовуємо загальні принципи побудови ідеальної системи для вибору структури й параметрів регулятора, що гарантують одержання заданих показників якості в системі управління з одним з наступних інерційних об'єктів першого й другого порядку із запізнюванням:

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-pt'_o}}{(T'_o p + 1)} \tag{12}$$

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-pt'_o}}{(T_{o1} p + 1)(T_{o2} p + 1)} \tag{13}$$

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-pt'_o}}{(T_{oi} p + 1)^2} \tag{14}$$

де $t'_o = t_o - 0{,}11 T_o$, $T'_o = 0{,}64 T_o$, $T_{oi} = 0{,}37 T_o$, а параметри T_o й t_o визначаються експериментально - проведенням дотичної до перехідної характеристики об'єкта.

Підставивши передатну функцію об'єкта (12) у передатну функцію регулятора, ідеальну для об'єктів із запізнюванням (при відсутності перешкоди й збурювання)

$$W_{p.u}(p) = \frac{1}{W_o'(p)(1 - e^{-pt_o})}, \tag{15}$$

і зробивши наближену заміну, припустиму в області низьких частот, тобто при повільних впливах

$$e^{-pt_o} \approx 1 - pt \,, \tag{16}$$

одержимо

$$W_p(p) = \frac{T'_o p + 1}{p t'_o k_o} = \frac{T'_o}{t'_o k_o} + \frac{1}{t'_o k_o p}$$

$$W_p(p) = k_П + \frac{k_И}{p}; \qquad k_П = \frac{T'_o}{t'_o k_o}; \qquad k_И = \frac{1}{t'_o k_o}. \tag{17}$$

Очевидно, що для об'єкта з інерційною частиною першого порядку (12) регулятор Ресвіка (15) вироджується в ПІ-регулятор з відповідними настроєчними параметрами (17).

Для об'єкта (13), що має інерційну частину другого порядку, найкращим буде ПІД-регулятор. Дійсно, якщо підставити передатну функцію (13) у загальну формулу ідеального регулятора (15) і врахувати заміну (16), те одержимо

$$W_p(p) = \frac{(T_{o1}p+1)(T_{o2}p+1)}{t'_o k_o p} = \frac{T_{o1}T_{o2}p^2 + (T_{o1}+T_{o2})p+1}{t'_o k_o p} =$$

$$= \frac{T_{o1}+T_{o2}}{t'_o k_o}\left[1 + \frac{1}{(T_{o1}+T_{o2})p} + \frac{T_{o1}T_{o2}}{(T_{o1}+T_{o2})}p\right]$$

$$W_p(p) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + T_Д p\right);\; k_p = \frac{T_{o1}+T_{o2}}{t'_o k_o};\; T_И = T_{o1}+T_{o2};\; T_Д = \frac{T_{o1}T_{o2}}{(T_{o1}+T_{o2})} \quad (18)$$

Для найбільш раціональної апроксимації об'єктів з s-образною перехідною характеристикою - моделі (14) із двома однаковими постійними часу $T_{o1} = T_{o2} = T_{oi} = 0{,}37T_o$ параметри ПІД-регулятора повинні бути рівні:

$$k_p = \frac{0{,}74T_o}{t'_o k_o}; \qquad T_И = 0{,}74T_o; \qquad T_Д = 0{,}18T_o.$$

На підставі отриманих загальних співвідношень між параметрами об'єкта й регулятора можна сформулювати рекомендації з вибору законів регулювання і їх настроєчних параметрів:

1. Для об'єктів із запізнюванням, інерційна частина яких дійсно близька ланці першого порядку (а не просто апроксимована такою ланкою!), доцільно застосовувати ПІД-регулятор.

2. Для об'єктів із запізнюванням, у яких інерційна частина має порядок $n \geq 2$, найкращим регулятором є ПІД-регулятор.

3. Значення настроєчних параметрів ПІ- і ПІД-регуляторів пов'язані з параметрами об'єкта: передатний коефіцієнт регулятора k_p обернено пропорційний коефіцієнту об'єкта k_o і прямо пропорційний відношенню T_o/t'_o; постійна часу інтегрування $T_И$ й постійна часу диференціювання $T_Д$

пропорційні постійної часу об'єкта T_o. Коефіцієнти пропорційності між параметрами регулятора й об'єкта залежать від крапки додатка й характеру вхідних впливів і вимог, пропонованих до перехідного процесу в системі регулювання.

Помітимо, що введення диференціальної складової в ПІ-закон регулювання, як правило, поліпшує перехідний процес - зменшує перший викид і тривалість. Але при більших відносинах T_o/t_o або при дії в контурі системи випадкових перешкод ПІД-регулятор варто застосовувати з певною обережністю, після додаткових досліджень системи.

11.7. Емпіричне настроювання типових регуляторів

Один із традиційних шляхів проектування ПІД-регулятора - використання емпіричних правил настроювання, заснованих на вимірах, зроблених на реальному об'єкті.

Метод коливань Зіглера-Нікольса

Ця процедура застосовна тільки для стійких об'єктів і виконується за допомогою наступних кроків.

- взяти реальний об'єкт із пропорційним управлінням і дуже маленьким посиленням;
- збільшувати посилення, поки в контурі не почнуться коливання (необхідно одержати лінійні коливання на виході регулятора);
- визначити граничне (граничне) посилення регулятора $k_p = k_{гр}$ й період коливань $T_{гр}$ на виході регулятора;
- обчислити параметри регулятора згідно табл.1.

Таблиця 1. Настроювання типових регуляторів методом коливань Зіглера-Нікольса

	k_p	$T_И$	$T_Д$
П	$0{,}50k_{гр}$ $(0{,}55k_{гр})$	--	--
ПІ	$0{,}45k_{гр}$ $(0{,}35k_{гр})$	$T_{гр}/1{,}2$ $(1{,}25T_{гр})$	--
ПИД	$0{,}60k_{гр}$	$0{,}5T_{гр}$	$T_{гр}/8$

Є деякі розбіжності відносно різних способів ПІД-параметризації, для яких був розроблений метод Зіглера-Нікольса, але описаний тут варіант застосуємо до параметризації наступного виду:

$$W_{ПИД}(p) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_И p} + \frac{T_Д p}{t_Д p + 1}\right). \tag{1}$$

Настроювання в табл.1 були отримані Зіглером і Нікольсом, для об'єктів, задовільно описуваних моделлю:

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-pt_o}}{(T_o p + 1)}. \tag{2}$$

<u>**Зауваження.**</u> Настроювання типових регуляторів, розрахованих за методом Зіглера-Нікольса дуже чутливі до відношення постійної запізнювання й постійної часу об'єкта t_o/T_o. Інший недолік цього методу - те, що він вимагає досягнення коливань об'єкта; що може бути небезпечно й дорого. Із цієї причини були розроблені інші стратегії настроювання, які не вимагають такого експлуатаційного режиму.

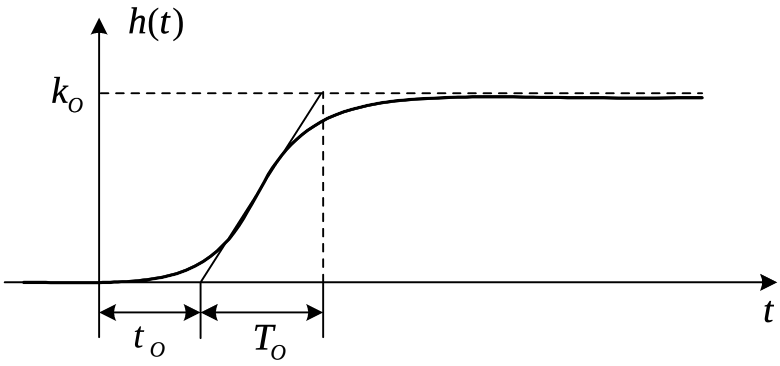
<u>***Методи, засновані на використанні кривій відгуку процесу***</u>

Для практичних розрахунків систем управління такими об'єктами кожну S-образну криву перехідного процесу, зняту при одиничному східчастому впливі, досить охарактеризувати наступними параметрами, обумовленими безпосередньо за графіком:

- коефіцієнт передачі k_o;

- постійна часу T_o;

- повне запізнювання t_o.



Параметри T_o й t_o визначаються досить легко – проведенням дотичної до найбільш крутої ділянки перехідної характеристики.

Отримані параметри моделі (k_o, T_o, t_o) можуть використовуватися різними методами настроювання ПІД-регуляторів. Один із цих методів був також запропонований Зіглером і Нікольсом. За їхнім планом ціль проектування полягає в тому, щоб досягти певного демпфірування для перехідної характеристики замкнутої системи. Точніше ціль полягає в тому, щоб одержати відношення 4:1 для першого й другого максимумів на цій характеристиці. Запропоновані параметри показані в табл.2.

Таблиця 2. Настроювання типових регуляторів методом Зіглера-Нікольса при використанні кривої відгуку

	k_p	$T_И$	$T_Д$
П	$\frac{T_o}{t_o k_o}$	--	--
ПІ	$\frac{0{,}9T_o}{t_o k_o}$	$3t_o$	--
ПІД	$\frac{1{,}2T_o}{t_o k_o}$	$2t_o$	$0{,}5t_o$

Правила завдання параметрів у табл.2, при міняються до моделі ПІД-регулятора (1).

Виконані дослідження показують надзвичайну чутливість результату до значень відносини t_o/T_o. Для зменшення цього обмеження, Коен і Кун виконали додаткові дослідження, щоб знайти настроювання регулятора для тієї ж моделі (1), але такі, щоб вони давали меншу залежність від відношення постійної запізнювання до постійного часу t_o/T_o. Їхні результати наведені в табл.3.

Таблиця 3. Настроювання типових регуляторів методом Коена-Куна при використанні кривої відгуку

	k_p	$T_И$	$T_Д$
П	$\frac{T_o}{t_o k_o}\left(1+\frac{t_o}{3T_o}\right)$	--	--
ПІ	$\frac{T_o}{t_o k_o}\left(0{,}9+\frac{t_o}{12T_o}\right)$	$\frac{t_o(30T_o+3t_o)}{9T_o+20t_o}$	--
ПІД	$\frac{T_o}{t_o k_o}\left(\frac{4}{3}+\frac{t_o}{4T_o}\right)$	$\frac{t_o(32T_o+6t_o)}{13T_o+8t_o}$	$\frac{4t_o T_o}{11T_o+2t_o}$

Необхідно завжди пам'ятати, що настроювання, отримані з використанням кожного з вищерозглянутих емпіричних методів - тільки відправні точки в процесі одержання потрібного регулятора.

12. КОРЕКЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

12.1. Характеристика завдань стабілізації й корекції систем

Теоретичний синтез містить у собі наступні часткові завдання:

- забезпечення стійкості й підвищення запасу стійкості;
- підвищення точності в сталих режимах;
- поліпшення перехідних процесів.

Іноді кілька часткових завдань можуть бути вирішені спільно, в інших випадках вони виявляються суперечливими.

Стабілізація й корекція являють собою процедуру поліпшення динамічних властивостей автоматичної системи шляхом включення в її контур додаткових конструктивних елементів, що мають заздалегідь обрані характеристики.

Під ***стабілізацією*** розуміють процедуру, здійснювану з метою додання системі стійкості або підвищення запасу стійкості.

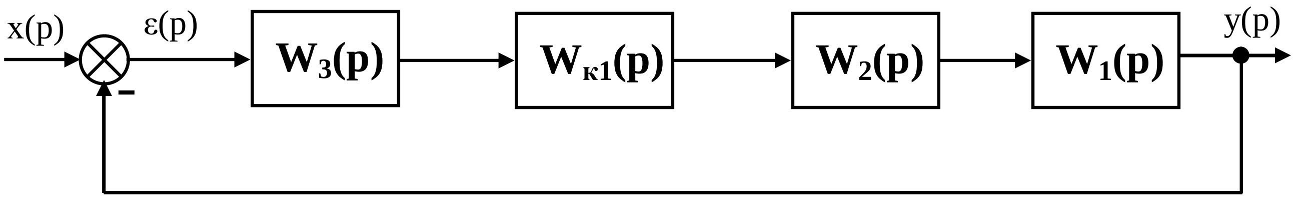
Під ***корекцією*** розуміють процедуру, здійснювану для зменшення тривалості й коливальності перехідного процесу в системі.

Стабілізацію й корекцію здійснюють включенням в основний контур системи різних коригувальних пристроїв.

Коригувальний пристрій - це функціональний елемент системи автоматичного регулювання, що забезпечує необхідні динамічні властивості цієї системи. Іноді коригувальний пристрій змінює потрібним образом і статичні властивості системи.

Розрізняють послідовні, паралельні (зустрічно-паралельні) і прямі паралельні коригувальні пристрої.

Послідовний коригувальний пристрій включають безпосередньо після датчика неузгодженості або ж після попереднього підсилювача в прямий ланцюг системи. Другий варіант включення використовують частіше. Адже рівень сигналу неузгодженості звичайно дуже малий і коригувальний пристрій знижує найчастіше рівень сигналу. Тому при першому варіанті включення послідовного коригувального пристрою буде потрібно мати попередній підсилювач значно більше високої чутливості, чим при другому варіанті.

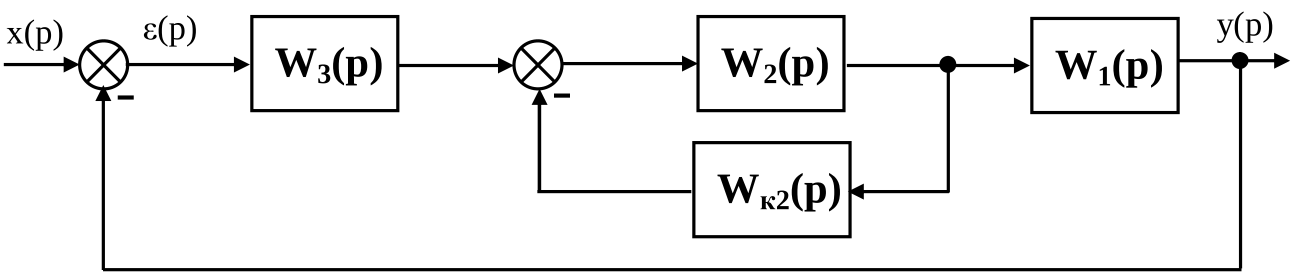


Послідовний коригувальний пристрій просто включається в схему системи, досить просто синтезується.

До недоліків послідовного коригувального пристрою можна віднести:

- ослаблення основного сигналу, що змушує застосовувати додаткові підсилювачі;
- якість системи сильно залежить від стабільності характеристик коригувального пристрою;
- вихід з ладу послідовного КП приводить до непрацездатності всієї системи керування.

Паралельний (зустрічно-паралельний) коригувальний пристрій являє собою зворотний зв'язок, як правило, негативний, яким охоплюється один з елементів прямого ланцюга системи. Цим елементом звичайно є виконавчий елемент або вихідний каскад підсилювача (підсилювач потужності).



Передатна функція ділянки ланцюга з паралельним коригувальним пристроєм:

$$W_2'(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_{k2}(p)}. \quad (1)$$

Звичайно в досить широкому й істотному для якості системи діапазоні частот справедлива нерівність

$$\left|W_2(jw)W_{k2}(jw)\right| >> 1. \qquad (2)$$

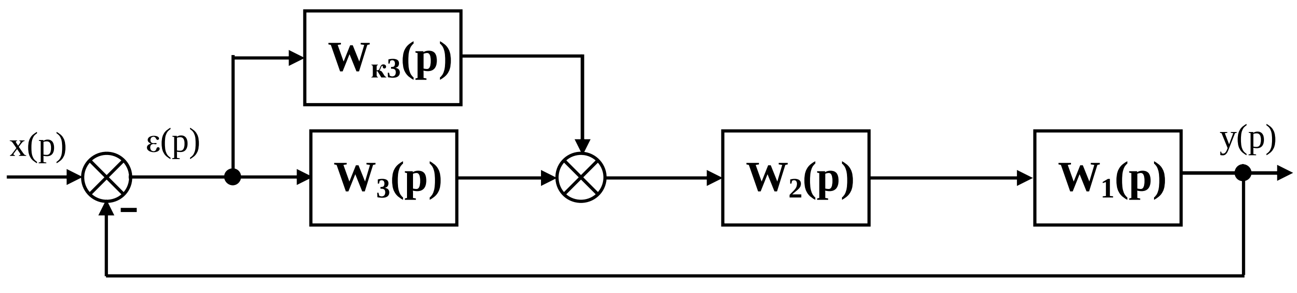
Тоді в цьому діапазоні частот

$$W_2'(jw) \approx \frac{1}{W_{k2}(jw)}. \qquad (3)$$

Таким чином, при задоволенні нерівності (2) властивості ділянки ланцюга з паралельним коригувальним пристроєм визначаються тільки лише властивостями цього коригувального пристрою.

Зазначена обставина є більшим достоїнством паралельного коригувального пристрою. При задоволенні нерівності (2) властивості ділянки прямого ланцюга $W_2(p)$, охопленого паралельним коригувальним пристроєм, і їхньої зміни в процесі дії системи не впливають на її властивості. Несуттєві нелінійності цієї ділянки й зміни його параметрів (коефіцієнтів передатної функції $W_2(p)$) не позначаються на динамічних властивостях системи. Це справедливо тільки при незмінних параметрах самого паралельного коригувального пристрою.

Застосовують і третій варіант включення коригувального пристрою в систему - паралельно одній з ділянок її прямого ланцюга. Включений в такий спосіб коригувальний пристрій називається прямим паралельним.



Вибирають (синтезують) коригувальний пристрій на підставі деякого комплексу вимог до властивостей системи. Спочатку визначають необхідне значення передатної функції $W_{к1}(p)$ послідовного коригувального пристрою. Потім з'ясовують, при якому значенні передатної функції $W_{к2}(p)$

паралельного коригувального пристрою й при якому значенні передатної функції $W_{к3}(p)$ прямого паралельного коригувального пристрою буде отриманий той же ефект. Потім уже можна вирішувати, який коригувальний пристрій доцільніше створювати.

По кожній із структурних схем складаємо вираження передатної функції розімкнутого ланцюга й дорівняємо ці вираження один одному. Одержуємо

$$W(p)W_{k1}(p) = \frac{W(p)}{1+W_2(p)W_{k2}(p)} = W(p)(1+W_{k3}(p)/W_3(p)), \qquad (4)$$

де $W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$.

З (4) визначають формули переходу від одного виду коригувального пристрою до іншого:

$$W_{k1}(p) = 1/(1+W_2(p)W_{k2}(p)) = 1+W_{k3}(p)/W_3(p);$$

$$W_{k2}(p) = (1-W_{k1}(p))/(W_2(p)W_{k1}(p)) = -W_{k3}(p)/W_2(p)(W_3(p)+W_{k3}(p)),$$

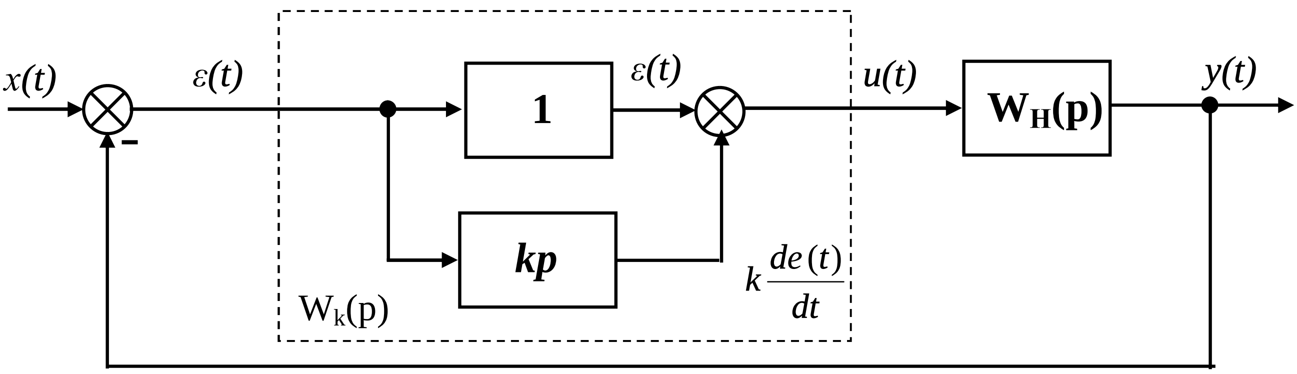
$$W_{k3}(p) = W_3(p)(W_{k1}(p)-1) = -W_2(p)W_3(p)W_{k2}(p)/(1+W_2(p)W_{k2}(p)).$$

Якщо значення передатної функції $W_{к2}(p)$ виявляється негативним, то паралельний коригувальний пристрій повинний включатися у вигляді позитивного зворотного зв'язку. При негативному значенні передатної функції $W_{к3}(p)$ вихідний сигнал прямого паралельного коригувального пристрою повинен відніматися з вихідного сигналу ділянки $W_{к3}(p)$.

12.2. Корекція за допомогою послідовних коригувальних пристроїв

Для послідовної корекції використовують ланки, що форсують:

$W(p) = kp+1$ або $W(p) = Tp+1$; $\quad A(w) = \sqrt{k^2w^2+1},\ j(w) = arctg\ kw$

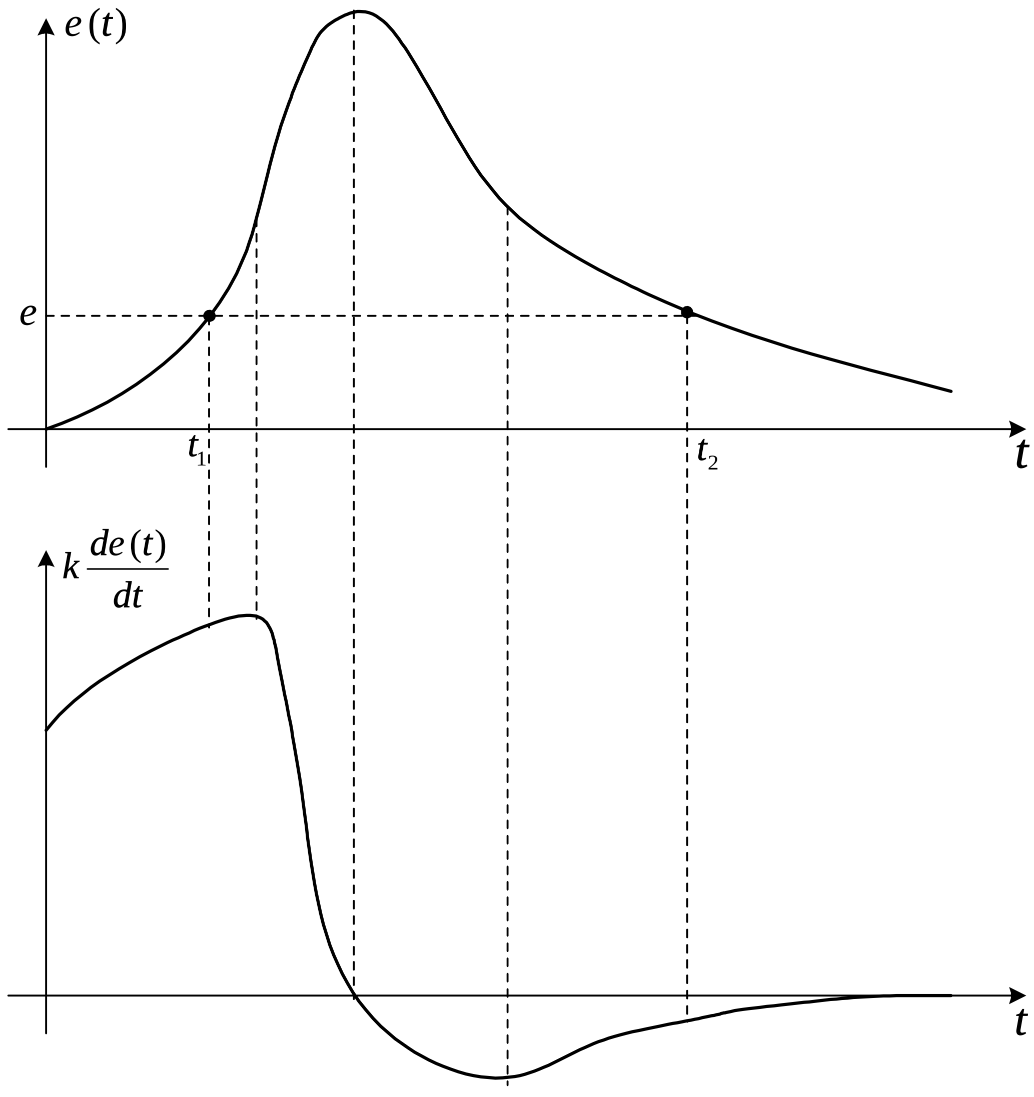


Включення ланки, що форсує, відповідає введенню в алгоритм керування похідної від сигналу помилки:

$$u(t) = e(t) + k\frac{de(t)}{dt}.$$

Чим більше *k*, тим більше випереджальне зрушення й тем сильніше коригувальна дія ланки, що форсує.

Корисний коригувальний вплив ланки, що форсує, можна пояснити в часовій області.



На рисунку наведена зміна в часі сигналу помилки $e(t)$ і його похідна $k\frac{de(t)}{dt}$ у деякій інерційній системі.

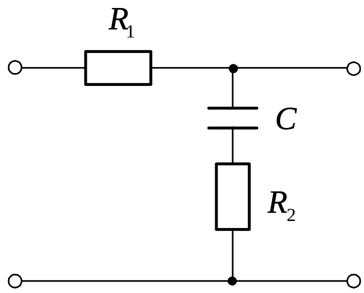
У моменти часу t_1 й t_2 значення сигналу помилки однакові. Але в момент t_1 система віддаляється від заданого положення (помилка зростає), а в момент часу t_2 наближається до нього (помилка зменшується).

У нескоректованій системі керуючі впливи в моменти часу t_1 й t_2 однакові, що нераціонально. Очевидно, що система функціонує краще, якщо в момент t_1 керуючий вплив сильніше, ніж у момент часу t_2. Саме так і працює система з ланкою, що форсує, реагуюча на суму двох складових $u(t) = e(t) + k\frac{de(t)}{dt}:$.

У момент t_1 похідна позитивна й сума двох складових більше, ніж момент часу t_2, коли похідна негативна.

Якщо коефіцієнт k обраний з обліком інерційності незмінної частини системи, то можна повністю виключити явище перерегулювання, тобто поліпшити якість перехідного процесу.

<u>Інтегро-диференцююча ланка з перевагою інтегруючих властивостей. (корекція з відставанням по фазі)</u>



$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}; \qquad T_2 > T_1;$$

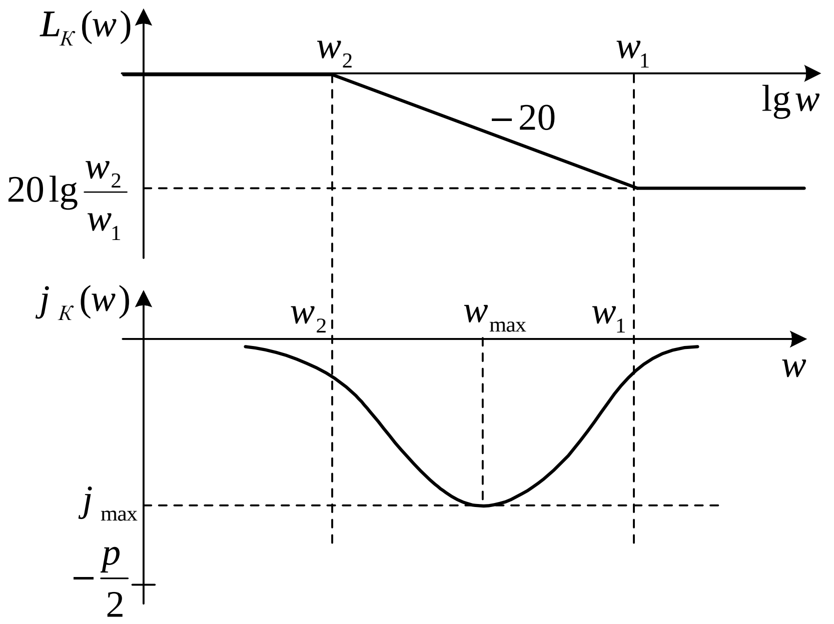
$$T_1 = R_2 C;$$

$$T_2 = (R_1 + R_2)C$$

Дана ланка використовується для корекції ВЧ частини частотної характеристики (подавлення високочастотних перешкод).

При включенні ланки в контур керування АЧХ в області високих частот опускається. Це дозволяє зменшити частоту зрізу не змінюючи загального передатного коефіцієнта системи, або збільшити коефіцієнт передачі не змінюючи частоту зрізу.

Фазо-частотна характеристика завжди негативна, а максимальне фазове зрушення $j_{\max}$ менше 90°. Максимальне фазове зрушення має місце на частоті $w_{\max} = \sqrt{w_1 w_2}$.



Коригувальний пристрій створює додаткове відставання по фазі в певній області частот. Щоб це відставання не погіршувало запас стійкості частоти, що сполучають, коригувального пристрою w_1 і w_2 повинні перебувати значно лівіше частоти зрізу скоректованої системи:

$$T_1 \approx (10 \div 20)/w_{CP}\,, \quad T_2 \approx (10 \div 20)k_p/w_{CP}\,,$$

де k_p - необхідне з умов точності значення коефіцієнта передачі розімкнутого контуру.

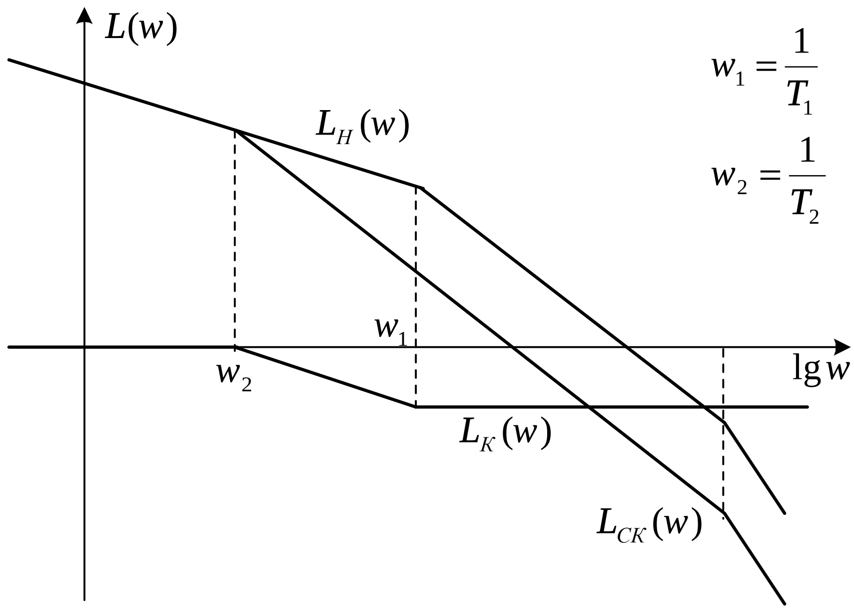
<u>Достоїнства:</u>

- зменшення помилок, викликаних високочастотними перешкодами (за рахунок зменшення коефіцієнта передачі системи в області високих частот при незмінному коефіцієнті передачі в низькочастотній області);

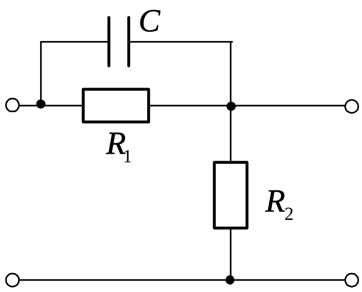
- збільшення запасів стійкості системи.

Недоліки:

- зниження смуги пропущення системи, що приводить до погіршення її швидкодії.



<u>Інтегро-диференцююча ланка з перевагою диференцюючих властивостей. (корекція з випередженням по фазі)</u>

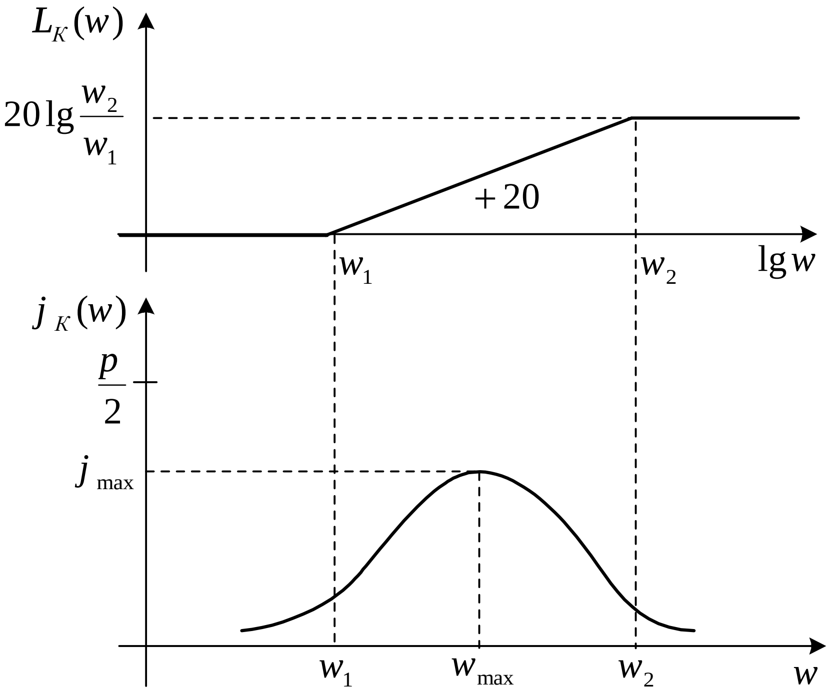


$$W_k(p) = k\frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}; \quad T_1 > T_2;$$

$$T_1 = R_1 C; \quad T_2 = kT_1$$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (k<1)$$

Пасивна інтегро-диференцююча ланка з перевагою диференцюючих властивостей подавляє низькі частоти й зменшує загальний коефіцієнт передачі системи k. Тому що за умовою забезпечення заданої точності системи зменшення коефіцієнта передачі неприпустимо, то одночасно із включенням цього коригувального пристрою необхідно забезпечувати збереження коефіцієнта передачі системи на необхідному рівні.



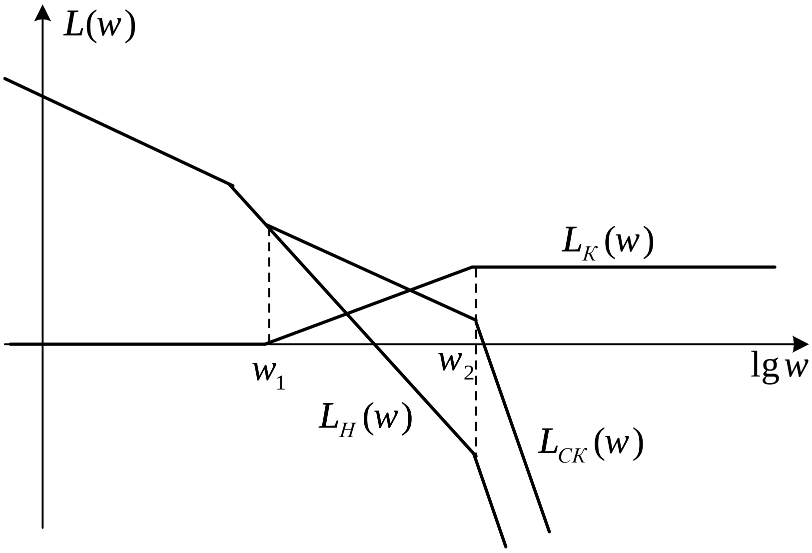
Ланка використовується для підняття високочастотної області АЧХ, крім того, як і у випадку з ланкою, що форсує, для створення випередження по фазі в певній області частот.

Максимальне фазове зрушення має місце на частоті $w_{\max} = \sqrt{w_1 w_2}$:

$$j_{\max} = arctg\sqrt{T_1/T_2} - arctg\sqrt{T_2/T_1}$$

Фазоопереджувальні властивості тим сильніше, чим більше відношення T_1/T_2. Але занадто більшим дане відношення не можна вибирати, тому що при цьому сильно послабляється сигнал, що проходить через коригувальний пристрій. На практиці приймають $T_1/T_2 = 10 \div 50$. T_1 вибирають приблизно рівним найбільшої постійної часу незмінної частини системи T_M.

У тих випадках, коли найбільша постійна часу T_M перевищує інші на порядок і більше, або коли на вході системи високочастотні перешкоди, $T_1 < T_M$.



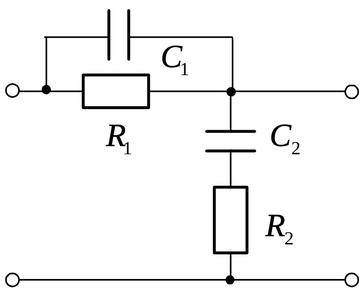
Достоїнства:

- поряд зі збільшенням загального передатного коефіцієнта системи (введення додаткового підсилювача) вдається збільшити частоту зрізу: поліпшення й точності й швидкодії;

Недоліки:

- необхідність додаткового підсилювача;
- погіршення перешкодозахищеності системи у високочастотній області.

Інтегро-диференцююча ланка із властивостями смугового фільтра.



$$W_k(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)};$$

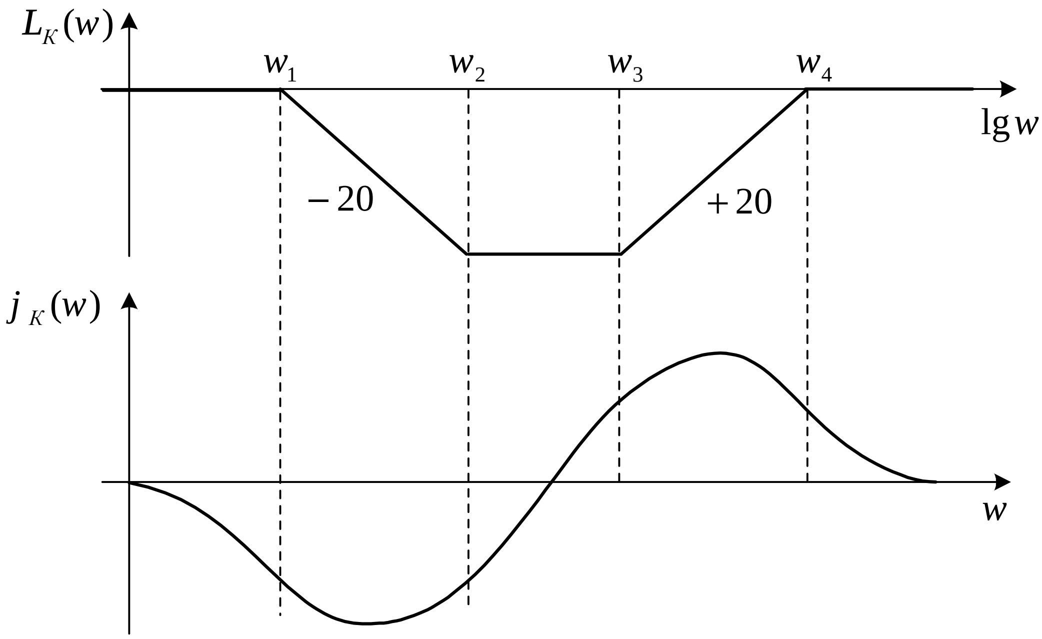
$$T_1 > T_2 > T_3 > T_4;$$

$$T_2 = R_1 C_1; \quad T_3 = R_2 C_2$$

$$\begin{cases} T_1 T_4 = T_2 T_3 \\ T_1 + T_4 = T_2 + T_3 (1 + R_1 / R_2) \end{cases}$$

В області НЧ - інтегруючі властивості.

В області ВЧ – диференцюючі властивості.



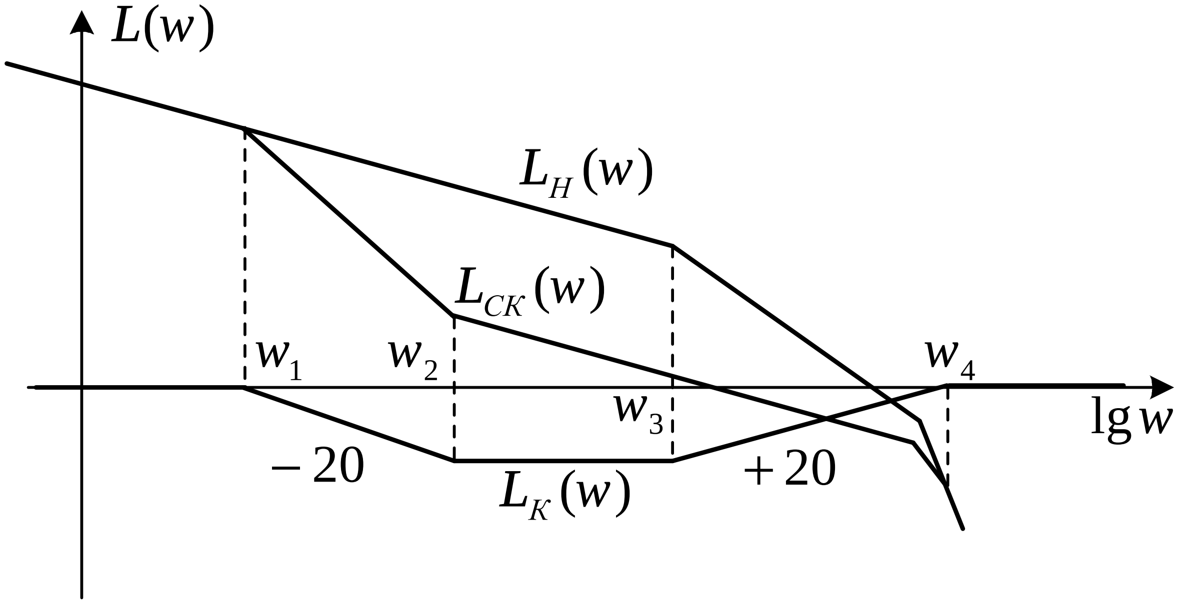
При включенні даної ланки в контур відбувається придушення СЧ. Це дозволяє збільшити загальний передатний коефіцієнт і частоту зрізу системи без погіршення перешкодозахищеності на високих частотах.

При виборі параметрів коригувального пристрою керуються наступними міркуваннями:

- частоти, що сполучають, відповідні постійним часу T_1 і T_2 так само, як і у ланки з перевагою інтегруючих властивостей, повинні бути менше частоти зрізу скоректованої системи. У цьому випадку, область частот, у якій пристрій вносить відставання по фазі буде лівіше частоти зрізу (як мінімум не зменшуватися запаси стійкості).

- постійну часу T_3 доцільно приймати рівною найбільшій постійній часу незмінної частини системи.

- частота зрізу скоректованої системи повинна перебувати між частотами, що сполучають, $1/T_3$ і $1/T_4$, тобто в області максимального випередження фаз, створюваного коригувальним пристроєм (для забезпечення максимального запасу стійкості по фазі).



12.3. Корекція систем за допомогою паралельних коригувальних пристроїв

Паралельні коригувальні пристрої включаються у вигляді зворотного зв'язку, що охоплює частину основних елементів системи. На відміну від головних зворотних зв'язків системи, паралельні коригувальні пристрої реалізуються у вигляді місцевих (внутрішніх) зворотних зв'язків.

Залежно від коригувального пристрою, що включається у вигляді місцевого зворотного зв'язку, розрізняють тверді й гнучкі зворотні зв'язки.

<u>Твердий зворотний зв'язок</u> здійснюється через безінерційну або інерційну статичну ланку $W(0) \neq 0$:

$$W_{OC}(p) = k_{OC}; \quad W_{OC}(p) = \frac{k_{OC}}{T_{OC}p + 1}$$

Дія твердого зворотного зв'язку проявляється як у статичному, так і в динамічному режимах роботи.

<u>Гнучкий зворотний зв'язок</u> здійснюється через ідеальну або реальну диференцюючу ланку $W(0) = 0$:

$$W_{OC}(p) = k_{OC}\,p; \;\; W_{OC}(p) = \frac{k_{OC}\,p}{T_{OC}p + 1}$$

Гнучкий зворотний зв'язок діє тільки в динамічної режимі, коли вихідний сигнал охоплюваної ділянки змінюється в часі.

Розглянемо вплив твердого зворотного зв'язку на характеристики типових ланок.

1. Аперіодичну ланку першого порядку охоплено твердим зворотним зв'язком: $W_{OC}(p) = k_{OC}$, $W_O(p) = \dfrac{k_O}{T_O p + 1}$.

$$W(p) = \frac{k_O}{T_O p + 1 \pm k_O k_{OC}} = \frac{k}{Tp + 1}; \quad k = \frac{k_O}{1 \pm k_O k_{OC}}; \quad T = \frac{T_O}{1 \pm k_O k_{OC}}.$$

Твердий зворотний зв'язок не змінює структуру аперіодичної ланки, але зменшує його інерційність і коефіцієнт передачі при ВЗЗ, або збільшує інерційність і коефіцієнт передачі при ПЗЗ.

Якщо при ПЗЗ $k_O k_{OC} = 1$, то аперіодична ланка першого порядку перетвориться до виду: $W(p) = \dfrac{k_O}{T_O p}$ (ідеальна інтегруюча ланка). У такий спосіб можна підвищити порядок астатизму системи.

2. Ідеальна інтегруюча ланка охоплена твердим зворотним зв'язком: $W_{OC}(p) = k_{OC}$, $W_O(p) = \dfrac{k_O}{p}$.

$$W(p) = \frac{k_O}{p(1 \pm \frac{k_O k_{OC}}{p})} = \frac{k_O}{p \pm k_O k_{OC}} = \frac{k}{Tp \pm 1}; \quad k = \frac{1}{k_{OC}}; \quad T = \frac{1}{k_O k_{OC}}.$$

При охопленні твердим зворотним зв'язком ідеальної інтегруючої ланки одержуємо аперіодичну ланку першого порядку з коефіцієнтом підсилення, що повністю визначається тільки глибиною зворотного зв'язку. ПЗЗ не застосовується, тому що еквівалентна ланка нестійка.

3. Коливальна ланка охоплена твердим зворотним зв'язком:

$$W_{OC}(p) = k_{OC}, \; W_O(p) = \frac{k_O}{T_O^2 p^2 + 2x_O T_O p + 1}.$$

$$k = \frac{k_O}{1 \pm k_O k_{OC}}; \quad T = \frac{T_O}{\sqrt{1 \pm k_O k_{OC}}}; \quad x = \frac{x_O}{\sqrt{1 \pm k_O k_{OC}}}.$$

Твердий ПЗЗ не змінює структуру коливальної ланки, але збільшує її параметри k, T, x (збільшується інерційність, зменшується коливальність).

Твердий ВЗЗ не змінює структуру коливальної ланки, але зменшує його параметри k, T, x (зменшується інерційність, збільшується коливальність).

4. Ідеальна інтегруюча ланка охоплена негативним інерційним твердим зворотним зв'язком: $W_{OC}(p) = \dfrac{k_{OC}}{T_{OC} p + 1}$, $\quad W_O(p) = \dfrac{k_O}{p}$.

$$W(p) = \frac{k_O (T_{OC} p + 1)}{T_{OC} p^2 + p + k_O k_{OC}} = \frac{k(T_{OC} p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1};$$

$$k = \frac{1}{k_{OC}}; \quad T_2^2 = \frac{T_{OC}}{k_O k_{OC}}; \quad T_1 = \frac{1}{k_O k_{OC}}$$

У цьому випадку інтегруюча ланка перетворюється в ланку другого порядку із введенням похідної. При цьому коефіцієнт підсилення k і інтенсивність введення похідній T_{OC} цілком визначаються зворотним зв'язком, а первинний коефіцієнт підсилення ланки k_O впливає лише на нові постійні часу T_1 й T_2, які будуть тим менше, чим більше k_O. Тому, ***при великому k_O охват інтегруючої ланки негативним інерційним твердим зворотним зв'язком еквівалентний підсилювальній ланці із введенням похідної.***

Розглянемо вплив гнучкого зворотного зв'язку на характеристики типових ланок.

1. Аперіодичну ланка першого порядку охоплено гнучким зворотним зв'язком: $W_{OC}(p) = k_{OC} p$, $\quad W_O(p) = \dfrac{k_O}{T_O p + 1}$.

$$W(p)=\frac{k_O}{T_O p+1\pm k_O k_{OC} p}=\frac{k}{Tp+1};\quad T=T_O\pm k_O k_{OC}.$$

Гнучкий зворотний зв'язок не змінює структуру аперіодичної ланки й не впливає не його коефіцієнт передачі. Він збільшує його інерційність при ВЗЗ і зменшує інерційність при ПЗЗ.

2. Ідеальна інтегруюча ланка охоплена гнучким зворотним зв'язком:

$$W_{OC}(p)=k_{OC}p,\quad W_O(p)=\frac{k_O}{p}.$$

$$W(p)=\frac{k_O}{p\pm k_O k_{OC} p}=\frac{k}{p};\qquad k=\frac{k_O}{1\pm k_O k_{OC}}.$$

Гнучкий зворотний зв'язок не змінює структуру ідеального інтегруючої ланки, але зменшує його передатний коефіцієнт при ВЗЗ, або збільшує коефіцієнт передачі при ПЗЗ.

3. Коливальна ланка охоплена гнучким зворотним зв'язком: $W_{OC}(p)=k_{OC}p$,

$$W_O(p)=\frac{k_O}{T_O^2p^2+2x_OT_Op+1}.$$

$$W(p)=\frac{k_O}{T_O^2p^2+2x_OT_Op+1+k_Ok_{OC}p}=\frac{k_O}{T_O^2p^2+2xT_Op+1}$$

$$2xT_Op=2x_OT_Op+k_Ok_{OC}p,\quad x=x_O+\frac{k_Ok_{OC}}{2T_O}$$

Як видно, у цьому випадку збільшується демпфірування коливальної ланки (тому що $x>x_O$), причому не міняється коефіцієнт підсилення. Процес стає менш коливальним і може перетворитися в аперіодичний (якщо $x\geq 1$).

4. Реальна інтегруюча ланка охоплена негативним інерційним гнучким зворотним зв'язком: $W_{OC}(p)=\dfrac{k_{OC}p}{T_{OC}p+1}$, $W_O(p)=\dfrac{k_O}{p(T_Op+1)}$.

$$W(p)=\frac{k_O(T_{OC}p+1)}{p(T_OT_{OC}p^2+(T_O+T_{OC})p+1+k_Ok_{OC})}=\frac{k(T_{OC}p+1)}{p(T_2^2p^2+T_1p+1)};$$

$$k=\frac{k_O}{1+k_Ok_{OC}};\qquad T_2^2=\frac{T_OT_{OC}}{1+k_Ok_{OC}};\qquad T_1=\frac{T_O+T_{OC}}{1+k_Ok_{OC}}.$$

Тут при збереженні інтегруючої властивості ланки виходить ефект введення похідній, а нові постійні часу T_1 й T_2, що характеризують інерційність ланки, можуть бути зроблені малими за рахунок великого первинного коефіцієнта підсилення *k*. В останньому випадку маємо:

$$k\approx\frac{1}{k_{OC}}.$$

Можна помітити взагалі, що інерційне запізнювання у зворотному зв'язку (на відміну від такого в прямому ланцюзі) доцільно використовувати для поліпшення якості перехідних процесів, одержуючи ефект, аналогічний введенню похідної в прямому ланцюзі.

12.4. Синтез коригувальних пристроїв по логарифмічним амплітудно-частотним характеристиках

Завдання синтезу коригувальних пристроїв полягає в наступному. Задано: вихідна САУ, структура й параметри основних функціонально-необхідних елементів (незмінна частина), показники якості системи – перерегулювання, час перехідного процесу, величина помилки (помилок). Потрібно: визначити передатні функції, схеми й параметри коригувальних пристроїв, включення яких у систему забезпечить одержання заданих показників якості.

Найбільш простим, наочним і добре розробленим методом синтезу коригувальних пристроїв - метод ЛЧХ. Синтез КП методом ЛЧХ заснований на зв'язку перехідної характеристики із ДЧХ замкнутої системи й ДЧХ замкнутої системи із ЛЧХ розімкнутої системи. Завдяки такому зв'язку можна переходити від прямих показників якості до параметрів ДЧХ і від параметрів ДЧХ до параметрів ЛЧХ системи. Таким чином, за заданими показниками якості можна побудувати бажані ЛЧХ.

Бажаної ЛАЧХ називають таку частотну характеристику системи, при якій забезпечуються задані показники якості.

При синтезі коригувальних пристроїв методом ЛЧХ прийнятий наступний порядок рішення завдання:

- будується ЛАЧХ нескоректованої системи, але з урахуванням необхідного коефіцієнта передачі системи в розімкнутому стані. k_p знаходять із умови забезпечення заданої точності;
- за заданими показниками якості й враховуючи вихідну ЛАЧХ будується бажана ЛАЧХ;
- на підставі бажаної ЛАЧХ і ЛАЧХ нескоректованої системи визначається ЛАЧХ коригувального пристрою;
- по отриманої ЛАЧХ коригувального пристрою знаходять його передатну функція й підбирають найбільш простий спосіб її реалізації;
- будується остаточна ЛАЧХ скоректованої системи з обліком ЛАЧХ реального коригувального пристрою, і визначаються показники якості керування.

<u>Побудова бажаної ЛАЧХ системи</u>

<u>1. Вибір бажаної типової ДЧХ.</u>

Для спрощення вибору ДЧХ існує набір розрахованих і побудованих перехідних функцій систем, які відповідають різноманітним типовим ДЧХ із різними параметрами. Якщо, наприклад, взяти систему з найбільш простою, а саме із прямокутною трапецієподібною ДЧХ, що має коефіцієнт нахилу $c = w_a / w_П = 0{,}2...0{,}8$, то ми одержимо гарні перехідні процеси, які можуть бути прийняті за оптимальні.

Звичайно, у реальних системах реалізувати ДЧХ у вигляді простої трапеції (рис. 1,а) досить складно. У цьому випадку або необхідно складний коригувальний пристрій, або зовсім неможливо реалізувати на практиці такі характеристики.

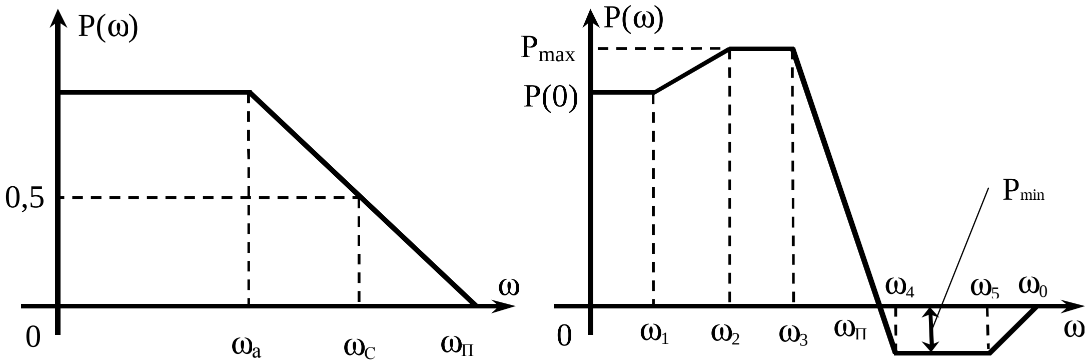


Рисунок 1. Типові ДЧХ

Значно простіше реалізувати типову ДЧХ, що зображена на рис.1,б і яка характеризується наступними параметрами:

$c = \dfrac{w_3}{w_П}$ – основний коефіцієнт нахилу;

$c_1 = \dfrac{w_1}{w_2}$ – перший додатковий коефіцієнт нахилу;

$c_2 = \dfrac{w_5}{w_0}$ – другий додатковий коефіцієнт нахилу;

$l_1 = \dfrac{w_2}{w_П}$ – перший коефіцієнт форми;

$l_2 = \dfrac{w_4}{w_0}$ – другий коефіцієнт форми.

Для різних значень коефіцієнтів c , c_1 і l_1 встановлено, що найкращі перехідні процеси можуть бути отримані в системах із ДЧХ, що характеризується коефіцієнтами $c \leq 0{,}8$, $c_1 \geq 0{,}4$, $l_1 \geq 0{,}5$. Величина перерегулювання при таких коефіцієнтах як правило залежить від $P_{max} > 0$.

2. Визначення P_{max} і P_{min} типової ДЧХ.

P_{max} і P_{min} типової ДЧХ побічно характеризують перерегулювання в системі керування. Для визначення P_{max} використовується номограма проф. В.В.Солодовникова (мал.2), що представлена у вигляді залежностей $s = f(P_{max})$ і $t_p = f(P_{max})$.

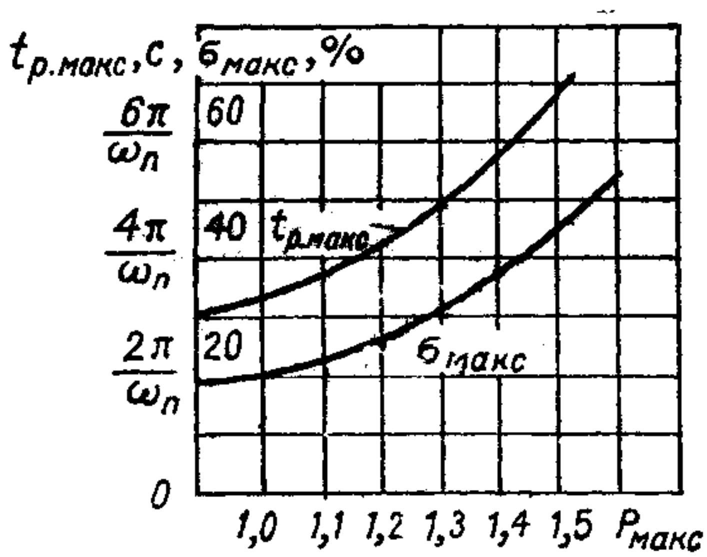


Рисунок 2. Номограма для визначення P_{max} і $w_{П}$.

Якщо ДЧХ має негативний «хвіст», то додатково викликане нею перерегулювання Ds визначається за формулою:

$$Ds \le 0{,}3 \cdot |P_{min}| \cdot 100\%.$$

Тоді величину максимального перерегулювання знайдемо з умови:

$$s_{max} = s + Ds \ ,$$

де величина s визначається із графіка $s = f(P_{max})$(рис.2).

Загальне перерегулювання буде дорівнювати:

$$s_{max} = s\left(P_{max}\right) + 0{,}3 \cdot |P_{min}| \cdot 100\%. \qquad (1)$$

На практиці приймають:

$$P_{min} \approx 1 - P_{min} \qquad (2)$$

Таким чином, маючи графік $s = f(P_{max})$ і з огляду на (1) і (2), можна визначити $P_{мах}$ і P_{min}, які задовольняють заданому перерегулюванню s_{max}.

3. Визначення частоти позитивності $w_П$ типової ДЧХ.

Частота позитивності $w_П$ типової ДЧХ побічно характеризують швидкодію системи керування. Визначається частота позитивності за графіком $t_p = f(P_{\max})$ номограми проф. В.В.Солодовникова виходячи із заданого часу регулювання t_p й отриманого значення P_{max}:

$$t_p = \frac{mp}{w_П}, \qquad w_П = \frac{mp}{t_p}$$

де коефіцієнт m знаходять із графіку $t_p = f(P_{\max})$ (мал.2).

4. Визначення параметрів бажаної ЛАЧХ.

- *вибір частоти зрізу* w_{CP} *бажаної ЛАЧХ*:

$$w_{CP} = (0{,}6 \div 0{,}9) w_П$$

- *вибір нахилу бажаної ЛАЧХ в області середніх частот (частоти зрізу).* Нахил асимптоти бажаної ЛАЧХ, що проходить через частоту зрізу приймають рівним -20 дБ/дек. При більшому нахилі важко забезпечити необхідний запас стійкості, перерегулювання й коливальність у системі.
- *визначення ширини середньочастотної ділянки бажаної ЛАЧХ.*

  Для задоволення заданого значення перерегулювання необхідно виконати наступні умови:

$$P_{\min} \le P_З \le P_{\max} \qquad (3)$$

  Еквівалентні вимоги до ЛАЧХ можна знайти за допомогою номограми перекладу ЛАФЧХ розімкнутої системи у ДЧХ замкнутій (рис.3). З номограми видно, що умова (3) еквівалентна тому, щоб ЛАФЧХ не заходила в заборонну область, обмежену кривими з індексами $P_{мах}$ і P_{min} (приблизно ці криві можна замінити прямокутником).

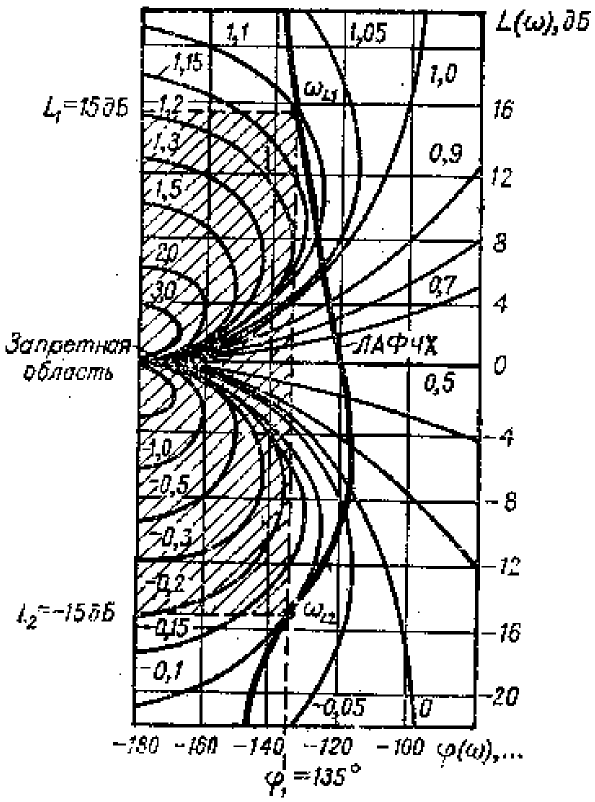


Рисунок 3. Визначення запасів стійкості по фазі й по амплітуді

З вимог до ЛАФЧХ випливають еквівалентні вимоги до ЛАЧХ і ЛФЧХ: для забезпечення заданого перерегулювання необхідно, щоб у діапазоні частот від w_{L1} до w_{L2} виконувалися наступні умови: $L_2 \le 20\lg\left|W\left(jw\right)\right| \le L_1$, $\left|j\left(w\right)\right| < \left|j_1\right|$.

Ординати L_1 і L_2, що знайдені з умов забезпечення заданого перерегулювання $s_{\max}$, називають запасом стійкості по амплітуді. Різниця $\Delta j(w)=180-|j_1|$ називається запасом стійкості по фазі.

5. Побудова бажаної ЛАЧХ.

Бажана ЛАЧХ складається із трьох основних асимптот: низькочастотної, середньочастотної і високочастотної. Крім того, можуть бути асимптоти, що сполучають, з'єднуючі основні.

Низькочастотна ділянка бажаної ЛАЧХ відповідає за точність системи в сталому режимі. Вихідними даними для побудови цієї асимптоти є:

необхідний порядок астатизму, величина помилки, вид вихідної ЛАЧХ. В області НЧ бажана ЛАЧХ - це пряма, що проходить через точку $20\lg k$ при $w=1$. k - розрахований з умови точності коефіцієнт передачі розімкнутого контуру:

- для системи з астатизмом першого порядку k визначається з умови одержання заданої швидкісної помилки $d_{ск}$ при відомій величині вхідного впливу g_0. Загальний коефіцієнт підсилення системи з астатизмом першого порядку дорівнює:

$$k = \frac{g_0}{d_{CK}}$$

- для статичної системи загальний коефіцієнт підсилення системи визначається за формулою:

$$k = \frac{S_0}{S_C} - 1$$

де S_0 – статизм об'єкта; S_C – статизм системи;

- Якщо задано максимально припустиму амплітуду сигналу помилки $e_{\max}$ при гармонійному вхідному впливі $x(t) = X_m \sin w_1 t$, те низькочастотна частина бажаної ЛАЧХ повинна розташовуватися не нижче контрольної точки, що має на частоті w_1 ординату $L(w_1) = 20\lg(\frac{X_m}{e_{\max}})$ (точка F).

- Якщо вхідний вплив має більш складний вид, чим гармонійний вплив і відомі максимальні значення його першої й другої похідних, то можна підібрати еквівалентний гармонійний вплив з такими ж значеннями похідних. З умови рівності максимальних значень похідних реального вхідного впливу й еквівалентного гармонійного обчислюють еквівалентні значення частоти й амплітуди:

$$w_1^{экв} = \frac{X_m''}{X_m'}; \qquad X_m^{экв} = \frac{(X_m')^2}{X_m''}.$$

Проведення бажаної ЛАЧХ на 3 дБ вище точки з координатами $L(w_1), w_1$ (точка F) забезпечує динамічну помилку не більше заданої.

На практиці за низькочастотну асимптоту бажаної ЛАЧХ приймають НЧ асимптоту вихідної ЛАЧХ із необхідним коефіцієнтом передачі.

Середньочастотна асимптота бажаної ЛАЧХ і її сполучення з низькочастотної визначають динамічні властивості системи – стійкість і показники якості перехідної характеристики.

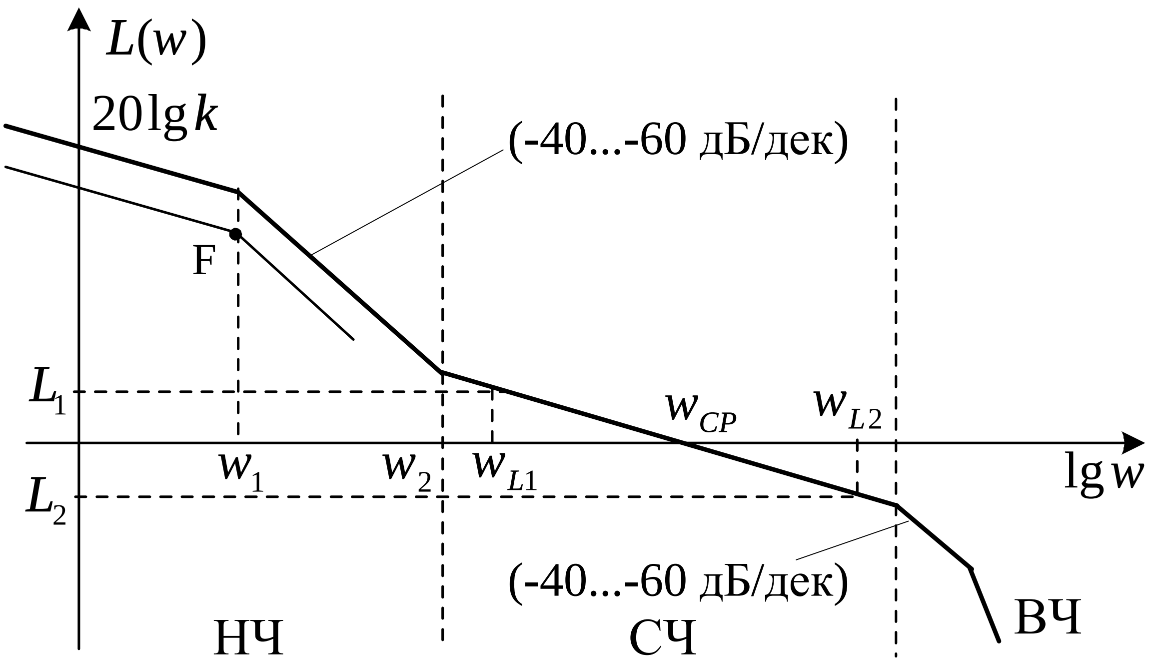
Середньочастотна асимптота бажаної ЛАЧХ проводиться через точку w_{CP} з нахилом -20 дБ/дек. При більшому нахилі важко забезпечити необхідний запас стійкості й припустиме перерегулювання.

Довжина середньочастотної асимптоти встановлюється виходячи з необхідного запасу стійкості (використовуючи знайдені раніше значення L_1 і L_2). Із цих же міркувань вибирають її сполучення з низькочастотної асимптотою. Крім того, асимптоту, що сполучає, варто вибирати так, щоб характеристика $L_Ж(w)$ можливо менше відрізнялася від $L_H(w)$ і коригувальний пристрій було можливо більше простим.

Спочатку потрібно провести прямі з ординатами L_1 і L_2, до перетинання з якими продовжують середньочастотну асимптоту. Потім із крапки перетинання середньочастотної асимптоти із прямою L_1 нанести асимптоту, що сполучає, з нахилом -40 дБ/дек або -60 дБ/дек до перетинання з низькочастотною асимптотою.

При сполученні необхідно забезпечити, щоб в інтервалі частот від w_{L1} до w_{CP} в якому значення ординати бажаної ЛАЧХ укладені між L_1 і 0, запас стійкості по фазі був не менше $\Delta j(w)=180-|j_1|$. Якщо ж запас стійкості по фазі менше необхідного, то асимптоту, що сполучає, необхідно перемістити вліво. У іншому випадку (при занадто великому запасі стійкості) асимптота, що сполучає, переміщається вправо. Чим більший діапазон займає низькочастотна асимптота, тим краще система відтворює низькочастотні зміни впливу, що задає.

Високочастотна асимптота бажаної ЛАЧХ мало впливає на властивості системи. Тому її варто вибирати так, щоб коригувальний пристрій був як можливо більше простим. Це досягається при сполученні високочастотних асимптот характеристик $L_Ж(w)$ і $L_Н(w)$. Якщо сполучення не вдається, то високочастотна асимптот $L_Ж(w)$ повинна мати той же нахил, що й високочастотна асимптот $L_Н(w)$.

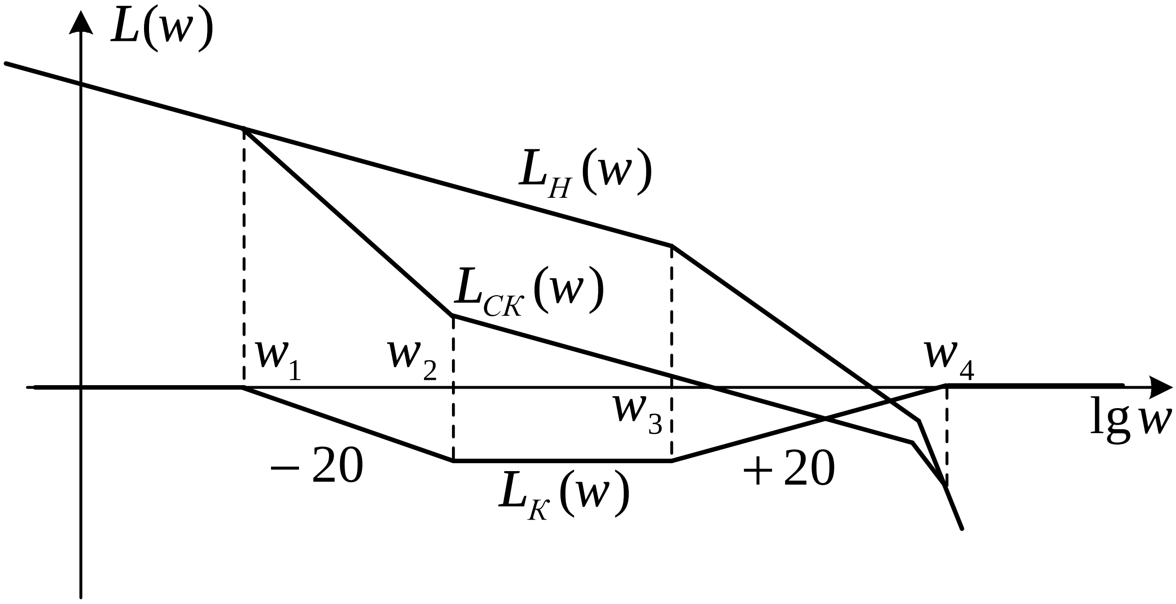


Після побудови бажаної ЛАЧХ визначають характеристику коригувального пристрою.

ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою $L_K(w)$ визначаю графічним вирахуванням ординат ЛАЧХ вихідної (некоректованої) системи з ординат бажаної ЛАЧХ:

$$L_K(w) = L_Ж(w) - L_Н(w).$$

За отриманим виразенням $L_K(w)$ знаходять передатну функцію послідовного коригувального пристрою $W_{к1}$(p). Потім з'ясовують, при якому значенні передатної функції $W_{к2}$(p) паралельного коригувального пристрою й при якому значенні передатної функції $W_{к3}$(p) прямого паралельного коригувального пристрою буде отриманий той же ефект. Потім уже можна вирішувати, який коригувальний пристрій доцільніше створювати.



Після вибору технічної реалізації обраного типу коригувального пристрою визначають показники якості в скоректованій замкнутій системі управління.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теория автоматического управления / Под ред. А.А.Воронова - М.: Высшая школа, 1986, ч. 1, 2.
2. Теория автоматического управления / Под ред. А.В.Нетушила - М.: Высшая школа, 1983. – 432 с.
3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
4. Зайцев Г.Ф., Стеклов В.К., Бріцький О.І. Теорія автоматичного управління. - К., Техніка, 2002.- 688 с.
5. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. Підручник. – Київ: Либідь, 1997. – 544с.
6. Лукас В. А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
7. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. Киев: Вища школа, 1988 - 431 с.

Навчальне видання

Конспект лекцій з курсу

"Теорія автоматичного управління"

Частина 1 - Аналіз та синтез лінійних САУ

Для студентів, що навчаються за напрямами

6.050201“Системна інженерія” (СУА) і

6.050202“Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології” (АУП)

(для денної й заочної форм навчання)

Укладачі: Федюн Роман Валерійович, к.т.н, доц.

Попов Владислав Олександрович, к.т.н, доц.

Рецензент Секірін Олександр Іванович, к.т.н, доц.

Відповідальний

за випуск Воропаєва Вікторія Яківна, к.т.н., доц.., зав. каф.