3. Сергиенко М. А. Методы проектирования нечеткой базы знаний / М. А. Сергиенко // Вестник ВГУ. – 2008. – № 2. – С. 67-71.

Ильина Ю.В.
Науч. руководитель к.ф.-м.н. Володин Н.А.
Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ

Идентификация функции источника в уравнении параболического типа

Бурное развитие промышленности поставило перед человечеством острую проблему – охрану окружающей среды. Локальные загрязнения в результате выбросов промышленных предприятий превзошли предельно допустимые санитарные нормы. Причинами появления высоких концентраций отдельных загрязняющих веществ в атмосфере могут быть либо выбросы одного, и нескольких источников, либо возникновение неблагоприятной метеообстановки [1,3]. В обеих ситуациях необходимо выявить источник, уменьшение выброса которого приводит к снижению повышенного уровня загрязнения воздушной среды. Поэтому в процессе эксплуатации автоматизированной системы экологического мониторинга и управления качеством атмосферного воздуха возникает необходимость решения задачи об идентификации источников загрязнения воздушной среды [2].

Задача идентификации источников должна решаться в два этапа: первый – нормирование предельно – допустимого выброса с учётом текущей метеообстановки для каждого из источников при их совместной работе; второй – ранжирование источников по степени опасности путём текущего контроля за состоянием воздуха средствами автоматизированной системы экологического мониторинга [4].

Пусть система описывается математической моделью в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+Q=0 \qquad (t, x) \in \Sigma = [t_a , t_b] \times [x_0 , x_1] \quad (1)$$

где t_a – начальный момент времени, t_b – конечный момент времени, x_0 – координата начала области Σ, x_1 – координата завершения области Σ, C – концентрация источника, t – температура, D – коэффициент диффузии, Σ – область идентификации источника, Q – источниковый член, который описывает функцию источника в области Σ.

Краевые условия имеют вид:

$$c\Big|_{x_0} = c_0 , \quad \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x_1} = \alpha c_1. \qquad (2)$$

Начальное условие имеет вид:

$$c(t_a , x) = c_a (x). \qquad (3)$$

Поставим задачу идентификации для параметра $D(x)$.С этой целью введём критерий качества идентификации:

$$J (D) = \int_{t_a}^{t_b} [c(x_* , t) - c_* (t)]^2 \, dt, \qquad (4)$$

Пусть источник расположен в точке x_*, тогда в точке $x = x_*$ провели замеры функции $c(x_* , t)$ и получили некоторую экспериментально заданную функцию $c_*(t)$. При этом получим:

$$Q = Q_0\Theta(x - x_*)\Theta (x' - x_*) \qquad (5)$$

Тета – функции имеют вид:

$$\Theta(x - x_*) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ x \geq x_* , \\ 0, & \text{если} \ x < x_* , \end{cases}$$

$$\Theta(x - x_*) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \le x_*, \\ 0, & \text{если } x > x_*, \end{cases}$$

где Q_0 — - количество выброшенного вещества, в общем случае, являющейся функцией времени t.

Если мощность единичного источника равна Q_0, то данный единичный источник распространён на всю область Σ. Получим:

$$Q = Q \times P, P = Q_1(x - x_*) \times Q(x - x_*). \qquad (6)$$

Распространён критерий качества идентификации на всю область Σ. Получим выражение:

$$J(D) = \int_{t_a}^{t_b}\int_{x_0}^{x_1} [c(x,t) - c_*(t)]^2 P dxdt. \qquad (7)$$

Рассмотрим постановку задачи, которая формулируется следующим образом: необходимо найти функцию $D(x)$ уравнения (1), которая доставляет min критерию качества идентификации (7).

Для минимизации целевых функционалов обычно используются градиентные методы [5]:

$$Q^{k+1} = Q^k - b^k \alpha^k \nabla J^k \qquad (8)$$

где k – номер итерации, $b^k > 0$ – число, направленное в сторону min функционала, α – шаг метода. В точке $\beta = \beta^K$ в направлении градиента ∇J^k.

$$\alpha = \frac{(0.01 \div 0.15) Q^0}{\left|\nabla J^0\right|} \qquad (9)$$

где Q^0 – начальное приближение,

$|\nabla J^k|$ – градиент на начальной итерации. Тогда

$$b^{k+1} = b_1 b^k, \; b_1 > 1 \qquad (10)$$

Если $D(x)$ – произвольная функция, тогда градиент имеет вид:

$$\nabla J = h(x,t)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad (11)$$

где $h(x,t)$ – множитель Лагранжа, которому удовлетворяет сопряжённая задача вида:

$$\delta c: \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial h(x,t)D}{\partial x} + \frac{\partial^2 Dh(x,t)}{\partial x^2} + 2(c - c_*)P = 0. \qquad (12)$$

Получено аналитическое выражение для градиента критерия качества идентификации (11), ∇J которое выражается через решение сопряжённой задачи (12).

Литература.

1. Берлянд М. Я. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1985 – 270 с.

2. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982 – 320 с.

3. Афиногенова О. Я. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения // ДАН, 2009, Т. 424, №4, с.439 – 441.

4. Белов Ю. Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на глпдкой кривой // Вычислительные технологи, 2006, Т.11, Ч. 1, с. 46 – 54.

5. Кожевникова М. Ф. Идентификация источников загрязнения: вычислительные методы. Национальный научный центр «Харьковски физико – технический институт», Харьков, Украина, 156 с.