УДК 681.51.015

Удовенко С.Г.
Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

АЛГОРИТМ ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Отличительной особенностью синтеза систем управления многосвязными динамическими комплексами является необходимость декомпозиции глобальной задачи оптимизации в ряд взаимосвязанных подзадач. Традиционный подход к созданию таких систем предусматривает, как правило, реализацию двух основных процедур: решение локальных подзадач, обеспечивающих достижение локальных целей подсистем, и координацию локальных управлений, направленную на достижение глобальной цели [1, 2]. Недостатком координационных методов является неизбежность упрощения глобального функционала качества при построении процедур координации, что может привести к недооценке степени взаимодействия подзадач и плохой координируемости всей системы. Наиболее существенно это проявляется при управлении многостадийными стохастическими объектами, где спонтанные изменения взаимосвязей нарушают оптимальное функционирование системы и могут даже привести к потере ее устойчивости [3].

В противоположность традиционным методам предполагается подход, в соответствии с которым локальные управления модифицируются так, чтобы гарантировались субоптимальность и асимптотическая устойчивость всей системы. Кроме решения для подсистем с постоянными взаимодействиями, такой подход предусматривает возможность структурного изменения в связях, что особенно важно при разработке интеллектуальных управляющих систем.

Пусть динамическая стохастическая система S состоит из N взаимосвязанных подсистем $S_i,\ i=\overline{1,N}$, которые являются локально управляемыми по отношению к своим целевым функциям, а каждая из подсистем описывается дискретным уравнением вида:

$$x_i(k+1)=A_i x_i(k)+B_i u_i(k)+\sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(k)+e_i(k+1),\ i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

где: $x_i(k)\in R^{ni}$ – вектор состояния подсистемы S_i;

$u_i(k)\in R^{mi}$ – вектор управления подсистемой S_i;

A_i – матрица параметров размерности $n_i\ x\, n_i$;

B_i – блочная диагональная матрица;

n – размерность вектора состояний $x(k)$ всей системы;

$k=0,1,2,\ldots$ – дискретное время;

$e_i(k)\in R^{ni}$ – вектор независимых случайных воздействий с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией.

Задачи локальных регуляторов заключаются в минимизации квадратичных функционалов I_i для каждой из подсистем:

$$I_i=\min_{u_i(k)} M\{\sum_{k=0}^{k1}[x^T{}_i(k)Q_i x_i(k)+u^T{}_i(k)R_i u_i(k)]\}, \tag{2}$$

где: Q_i, R_i – положительно определенные (полуопределенные) диагональные матрицы;

$k1$ – горизонт управления.

Очевидно, что оптимальное локальное управление i-ой подсистемой определяется из уравнения обратной связи:

$$u^0{}_i(k) = -G^0{}_i(k)x_i(k)\,, \tag{3}$$

где: $G^0{}_i(k) = R^{-1}{}_i B^T{}_i K_i(k)x_i(k),\ i = \overline{1, N}$,

$K_i(k)$ – решение дискретного уравнения Риккати [4].

При подстановке локального решения в (1) получаем:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i R^{-1}{}_i B^T{}_i K_i(k)x_i(k) + z_i[x_j(k), k] + e_i(k+1)\,, \tag{4}$$

где: $z_i[x_j(k), k] = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j,\ i = \overline{1, N}$.

Общую оценку качества управления всей системой естественно выразить аддитивным функционалом:

$$I(u) = \sum_{i=1}^{N} I_i(u_i)\,, \tag{5}$$

где: u – вектор управляющих воздействий системы.

Без учета взаимодействий между подсистемами значение функционала (5) составит:

$$I(u^0) = \sum_{i=1}^{N} I_i(u^0{}_i)\,, \tag{6}$$

где: u^0 – вектор локально-оптимальных (в смысле (3)) управлений.

Так как функция $u^0(k)$ не может гарантировать условий глобального оптимума $I(u)$, то значение $I(u^0)$ является лишь субоптимальным.

Очевидно, что справедливо следующее неравенство:

$$I(u_g) \le (1 + \varepsilon) I(u^0)\,, \tag{7}$$

где: u_g – управления, обеспечивающие глобальный минимум (5);

ε – индекс субоптимальности.

Значение индекса ε является мерой отклонения значений функционала качества системы от глобального оптимума $I(u_g)$ и характеризует влияния взаимодействий между подсистемами на эффективность управления.

Будем считать значения $u_i^0 \cdot \varepsilon$ оптимальными, если существует такой скалярный индекс $\varepsilon > 0$, при котором неравенство (7) выполняется.

Пусть каждая из подсистем оптимизирована с индексом ε. Очевидно, что ε – оптимальное решение связано с ограничением нормы взаимодействий $z_i[x_j(k), k]$, в частности, с неравенством вида:

$$\| z_i[x_j(k), k] \| \le \xi \| x_j \|, \tag{8}$$

где: ξ – множитель, ограничивающий норму переменных взаимодействия.

В работе [3] предлагается следующая зависимость для определения этого множителя:

$$\xi = \frac{\lambda_{\min}(p)}{\lambda_{\max}(k)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \tag{9}$$

где: $P = blok - diag\{P_i\},\ i = \overline{1,N};\ P_i = -K_i(k)B_i R^{-1}{}_i K_i(k) + Q_i$;

$K = blok - diag\{K_i(k)\}$;

$K_i(k)$ – матричные решения уравнения Риккати для $k_1 \longrightarrow \infty$;

$\lambda_{\max}(k)$ – максимальные собственные значения матрицы k;

$\lambda_{\min}(p)$ – минимальные собственные значения матрицы p.

Выполнение условия (8) обеспечивает асимптотическую устойчивость управления системой. Искомые управляющие воздействия $u^*{}_i(k)$, гарантирующие ε – оптимальность и устойчивость, будут определяться суммой следующих составляющих:

$$u^*{}_i(k) = u^0{}_i(k) + u_{im}(k),\ i = \overline{1,N}, \tag{10}$$

где: $u_{im}(k) = -G_{im}x_j(k),\ j = \overline{1,N},\ j \neq i$; G_{im} – матричный коэффициент.

С учетом (10) уравнения системы (1) преобразуются к виду:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i[u^0{}_i(k) + u_{im}(k)] + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j(k) + e(k+1); i = \overline{1,N},\ \ i \neq j, \tag{11}$$

а после подстановки в (11) значений $u^0{}_i(k)$ и $u_{im}(k)$ получаем:

$$x_i(k+1) = (A_i - B_i G^0{}_i)x_i(k) + \sum_{j=1}^{N}(A_{ij} - B_i G_{im})x_j(k) + e(k+1);\ i = 1,N,\ i \neq j. \tag{12}$$

Теорема. Для всех $i = \overline{1,N}$ существуют такие значения $u_{im}(k)$, при которых система (11) является асимптотически устойчивой и выполняется условие субоптимальности (7) и (8), причем индекс ε должен соответствовать зависимости:

$$\varepsilon = \inf_{u_m(k)}\{\varepsilon(\|z_i(x_j, u_{im}, k)\|),\ k = 0,1,...k1;\ i = \overline{1,N}\}. \tag{13}$$

Доказательство. Корректирующее управление $u_{im}(k)$ для каждой подсистемы однозначно определется матрицей G_{im}. В соответствии с (12) свяжем задачу поиска этой матрицы с минимизацией нормы вида:

$$\|\sum_{j=1}^{N}(A_{ij} - B_i G_{im})\| \longrightarrow \min_{G_{im}},\ i = \overline{1,N} \tag{14}$$

Если матрица B_i неквадратная, то решением (14) является:

$$G_{im} = (B^T{}_i B_i)^{-1} B^T{}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij},\ i = \overline{1,N}. \tag{15}$$

Если матрица B_i квадратная и несингулярная, то решение упрощается:

$$G_{im} = B_i^{-1}\sum_{j=1}^{N} A_{ij},\ i = \overline{1,N}. \tag{16}$$

Корректирующие функции управления для каждой из подсистем определятся тогда соответствующими зависимостями:

$$u_{im}(k) = -(B^T{}_i B_i)^{-1} B^T{}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(k),\ i = \overline{1,N}\,, \qquad (17)$$

или для случая (16)

$$u_{im}(k) = -B_i^{-1} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(k),\ i = \overline{1,N}\,. \qquad (18)$$

Динамика каждой подсистемы, управляемой в соответствии с суммарным законом (10), описывается, таким образом, уравнением (для случая (17)):

$$x_i(k+1) = (A_i - B_i G^0{}_i) x_i(k) + [I_i - B_i (B^T{}_i B_i)^{-1} B^T{}_i] \cdot \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(k),\ i = \overline{1,N}\,. \qquad (19)$$

После простых преобразований с учетом (3) получаем:

$$x_i(k+1) = (A_i - B_i R^{-1}{}_i B^T{}_i K_i(k)) x_i(k) + [I_i - B_i (B^T{}_i B_i)^{-1} B^T{}_i] \cdot \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(k),\ i = \overline{1,N},$$

где: I_i – единичные матрицы соответствующей размерности.

Динамику всей оптимизируемой системы можно теперь представить в следующей векторно-матричной форме:

$$x(k+1) = (A - BR^{-1} B^T K) x(k) + (I - B(B^T B)^{-1} B^T)\, Z\, x(k), \qquad (20)$$

где x – вектор состояний системы;

A, B – блочные диагональные матрицы параметров системы, состоящие из подматриц A_i и B_i соответственно;

K – блочная диагональная матрица локальных решений K_i уравнения Рикатти для каждой из подсистем;

Z – матрица взаимодействий, определяемая следующей суммой:

$$Z = \sum_{j=1}^{N} A_{ij},\ i = \overline{1,N},\ i \neq j\,.$$

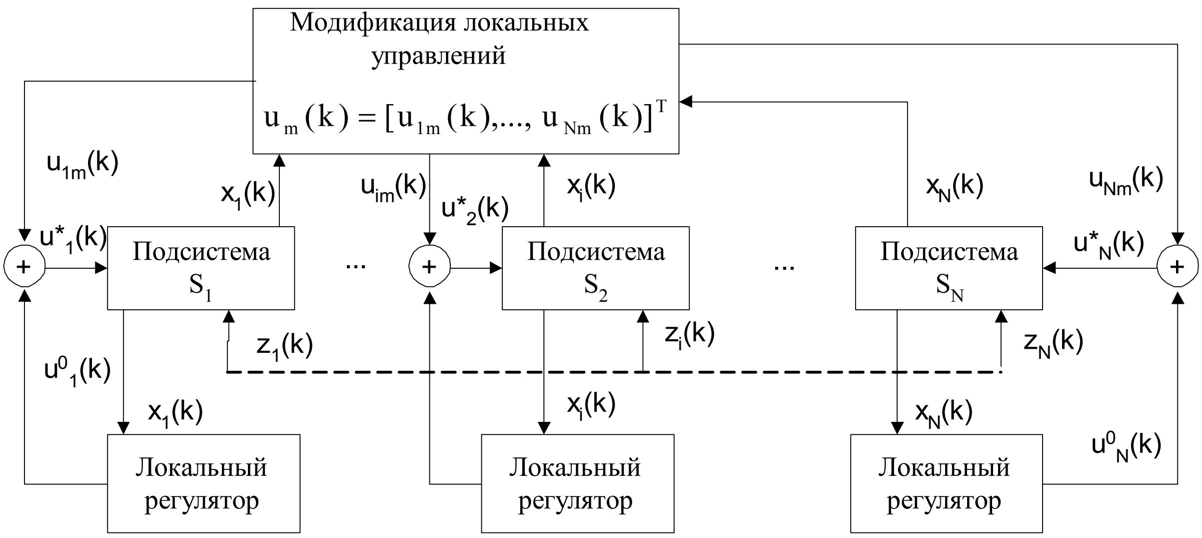

Рис. Схема децентрализованного управления системой.

Нетрудно видеть, что система (21) является асимптотически устойчивой для взаимодействий $z_i[x_j(k),k]$ и при введении корректирующих функций управления (17) для неквадратных матриц B_i или (18) для квадратных матриц B_i всегда выполняются условия субоптимальности, определяемые выражениями (7) и (8).

На рисунке представлена схема общего решения рассмотренной проблемы.

Кроме решения для систем с постоянными связями, описанный алгоритм позволяет предусматривать структурные изменения взаимодействий между подсистемами, что является практически невозможным при использовании классических координационных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.И., Гусев Ю.М., Ефанов В.Н. и др. Многоуровневое управление динамическими объектами. - М.: Наука, 1987. - 309 с.
2. Волик Б.Г., Буянов Б.Б., Лубков Н.В. и др. Методы анализа и синтеза структур управляющих систем. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 296 с.
3. Bailey P. Boundson optimality in optimal control of dinamic systems // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1973. V. AC-18. № 4. P. 532–534.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. - М.: Машиностроение, 1986. - 448 с.