УДК 051.73

ГЕНЕРАТОР ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Иваницкая, *студентка факультета экономики*
Е.Н. Едемская, *ст. преподаватель каф. ВМиП*
Донецкий национальный технический университет, Украина
Svetivadon@yandex.ru

Целью данной работы является исследование одномерных дискретных отображений, как модели динамических систем. Исследование в статье выполнено с помощью разработанной программы.

The purpose of this work is research of unidimensional discrete reflections, as models of the dynamic systems. Research in the article is executed by the developed program.

О динамической системе говорят в том случае, если можно указать такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает оператор эволюции системы. Если состояние системы задается набором N величин, то изменение состояния во времени, или динамику системы, можно представить как движение точки на траектории в N-мерном фазовом пространстве, которую называют фазовой траекторией.

В последнее время и в теоретических исследованиях, и в работах прикладного характера рассматриваются системы с дискретным временем, которые описываются рекуррентными отображениями. В этом случае под фазовой траекторией следует понимать некоторую дискретную последовательность точек в фазовом пространстве.

Выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные [1].

В физике свойство консервативности понимается как сохранение энергии. Например, механические колебательные системы в отсутствие трения относятся к консервативным системам. При наличии трения механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается (диссипирует) и переходит в тепло, т.е. в энергию микроскопического движения молекул, составляющих систему и ее окружение. Это будет диссипативная динамическая система.

В таких системах возникают сложные хаотические режимы. Они характеризуются нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени. В диссипативных системах хаос ассоциируется с наличием в фазовом пространстве странных аттракторов – сложно устроенных фрактальных множеств, притягивающих к себе все

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

траектории из некоторой прилегающей области (бассейна аттрактора) [2,3].

Целью данной работы является исследование одномерных дискретных отображений, как модели динамических систем.

В статье рассматриваются системы [1], состояние которых описываются единственной переменной x, т.е. фазовое пространство одномерно, а оператор эволюции задается рекуррентным отображением вида $x_{n+1}=f(x_n)$, где n – дискретное время. Их анализ является важным, поскольку эти простые системы имеют много свойств, встречающиеся в более сложных ситуациях.

Логистическое отображение задается формулой $x_{n+1}=1-\lambda\ x_n^2$, где x_n – динамическая переменная, а λ – параметр, от величины которого зависит характер динамики. Это искусственно сконструированная модель динамической системы, но она имеет достаточно реалистичную интерпретацию в биологии для описания динамики численности некоторых биологических популяций. На рисунке 1 показан фазовый портрет системы при λ=2.

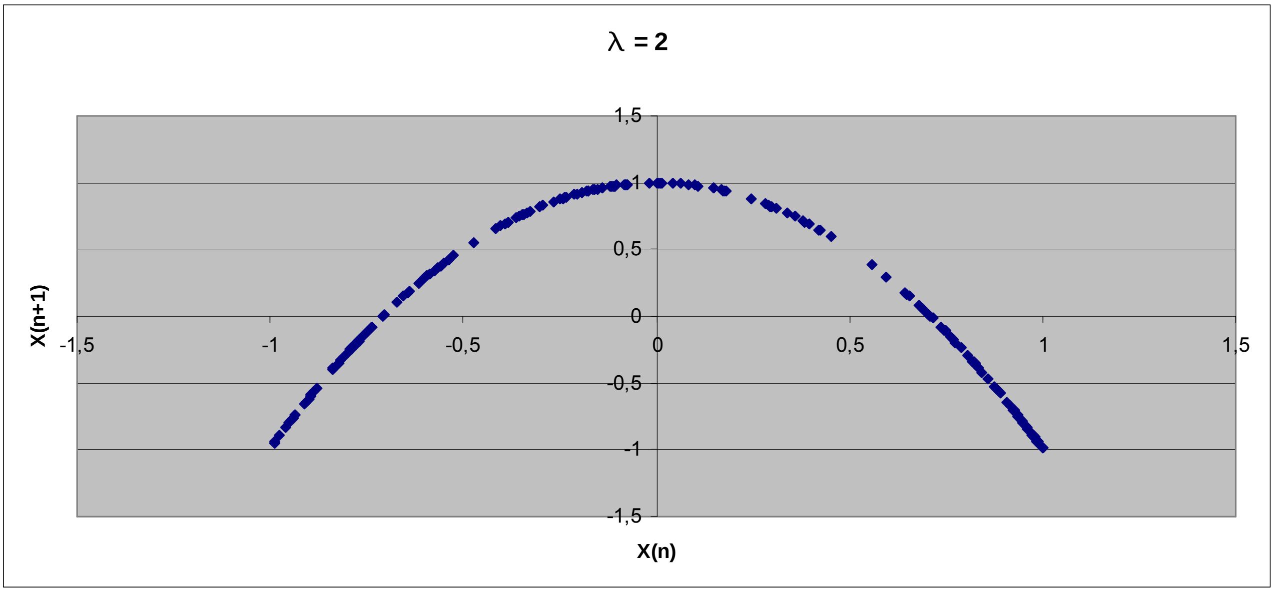

Рисунок 1

На рисунке 2 представлена бифуркационная диаграмма модели. На график нанесены возможные величины x, соответствующие различным значениям λ. Несмотря на хаотичность системы, имеет место определенная упорядоченность в ее возможных решениях. На нижних уровнях λ существуют единичные равновесные решения. Видны также точки бифуркаций и область хаоса между значениями λ, равными 1,3 и 2. Но и в хаотической области наблюдается некий порядок.

На рисунке 3 показана бифуркационная диаграмма в диапазоне λ от 1,3 до 2 на графике с более высоким разрешением. На этом уровне детализации можно видеть, что хаотическая область не сплошь покрыта точками.

На графике существуют области, где точки сгущаются, в то же время их прорезают белые полосы, где порядка больше чем хаоса (λ<1,4).

Если эти полосы увеличить, то в них обнаружатся еще меньшие участки, подобные целому, и так до бесконечности. На рисунке 4 показана такая полоса в диапазоне λ от 1,72 до 1,8.

Бифуркационная диаграмма представляет множество возможных решений уравнения. Все точки в хаотической области статистически не равновероятны. Темные полосы и устойчивые в широком диапазоне решения указывают на изменчивость вероятностей при возрастании λ. При каждом λ в хаотической области имеется бесконечное количество решений, заключенных в конечном пространстве.

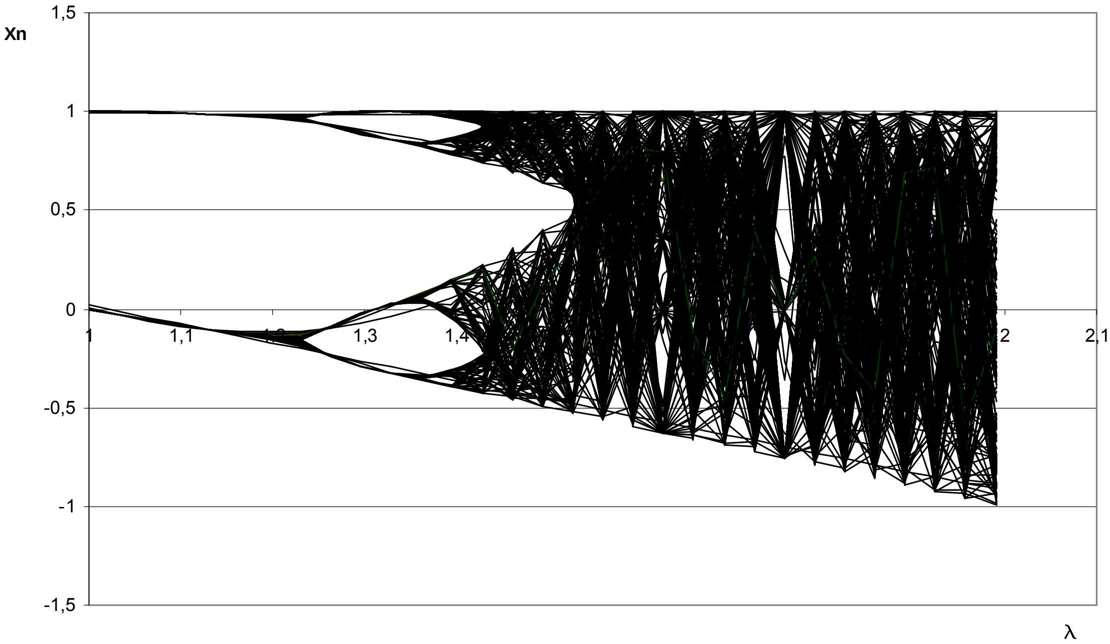

Рисунок 2

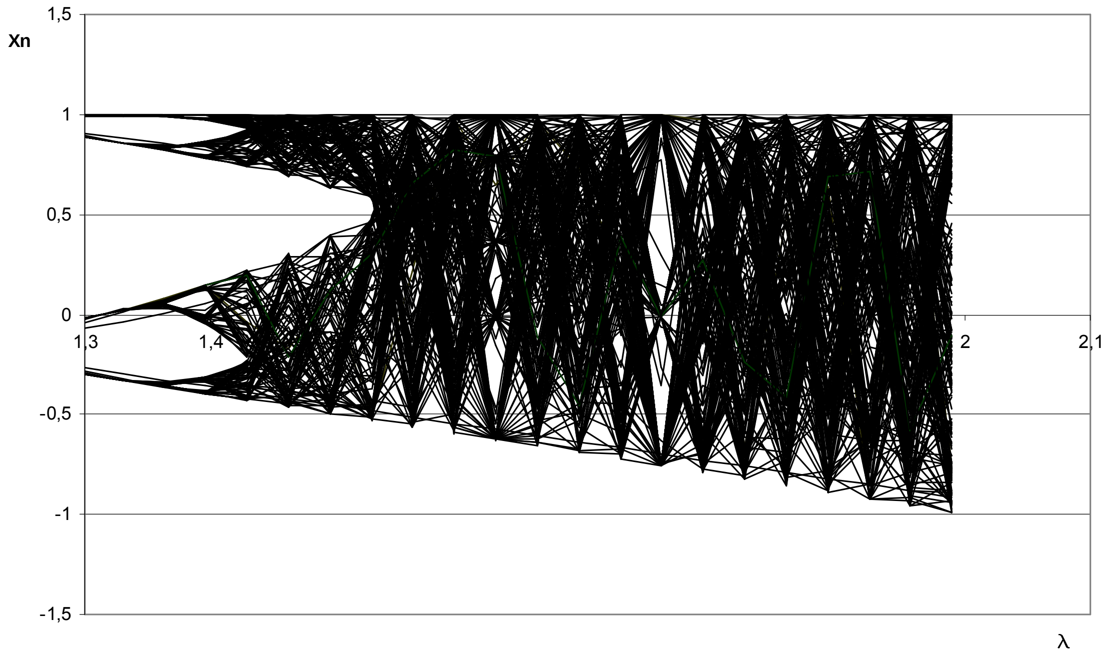

Рисунок 3

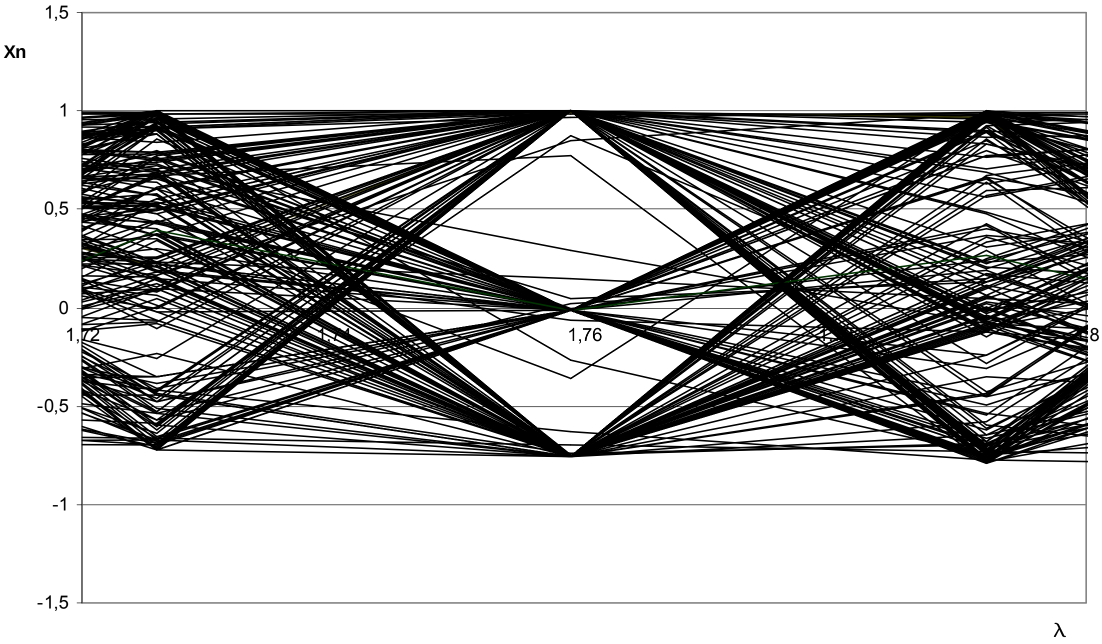

Рисунок 4

Отображение "тент" задается формулой

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{\lambda}, & 0 < x_n < \lambda, \\ \dfrac{1 - x_n}{1 - \lambda}, & \lambda < x_n \le 1, \end{cases}$$

где λ - положительный параметр, меньший 1. Частный случай симметричного тента получается при λ=1/2. Оно получило название за форму своего графика, напоминающего палатку – тент.

На рисунке 5 показан фазовый портрет для отображения "симметричный тент",

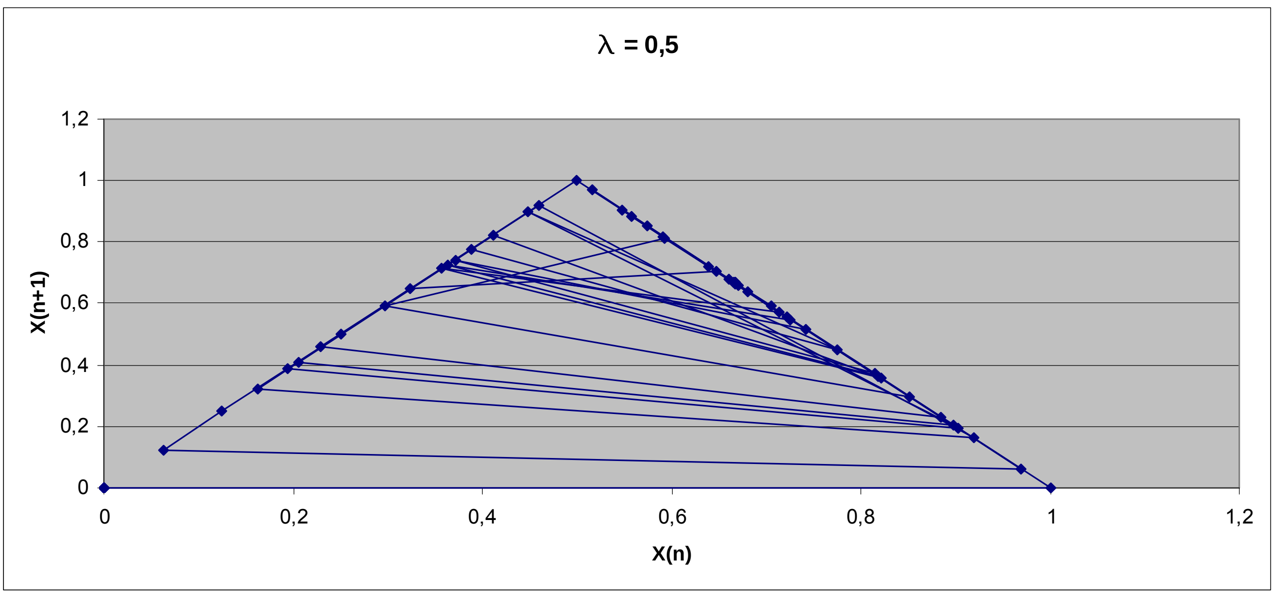

Рисунок 5

На рисунке 6 показан фазовый портрет модификации этого отображения – "косой тент".

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

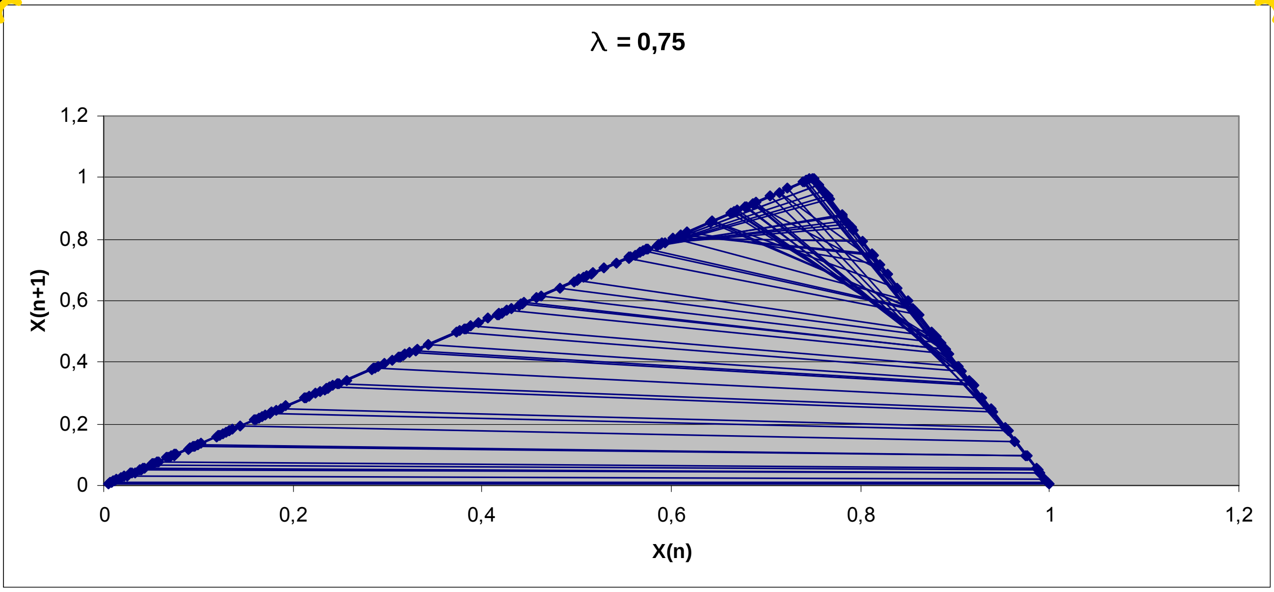

Рисунок 6

На рисунке 7 представлена бифуркационная диаграмма изучаемого процесса. На график нанесены величины x_i, соответствующие различным значениям λ. Из графика видно, что, несмотря на хаотичность отображения, имеет место определенная упорядоченность в его возможных решениях. При малых значениях λ существуют равновесные решения.

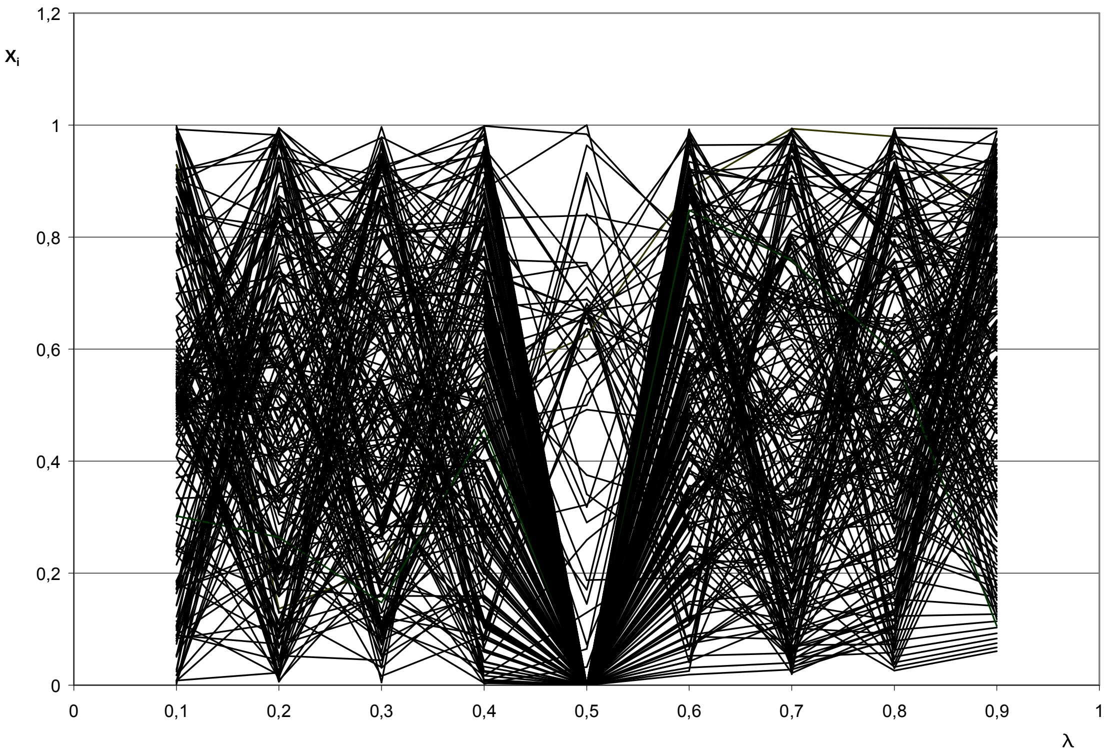

Рисунок 7

На этом уровне детализации можно видеть, что хаотическая область не сплошь покрыта точками. Существуют области, где точки сгущаются (хаос увеличивается). Имеются белые “окна”, в которых порядка больше, чем хаоса. Эти “окна” иллюстрируют фрактальную природу изучаемой системы. На рисунке 8 показано множество белых “окон” для диапазона $0{,}35 \le \lambda \le 0{,}65$. При увеличении степени детализации становятся заметны все меньшие и меньшие участки, подобные целому. Такого рода самоподобие образует фрактал.

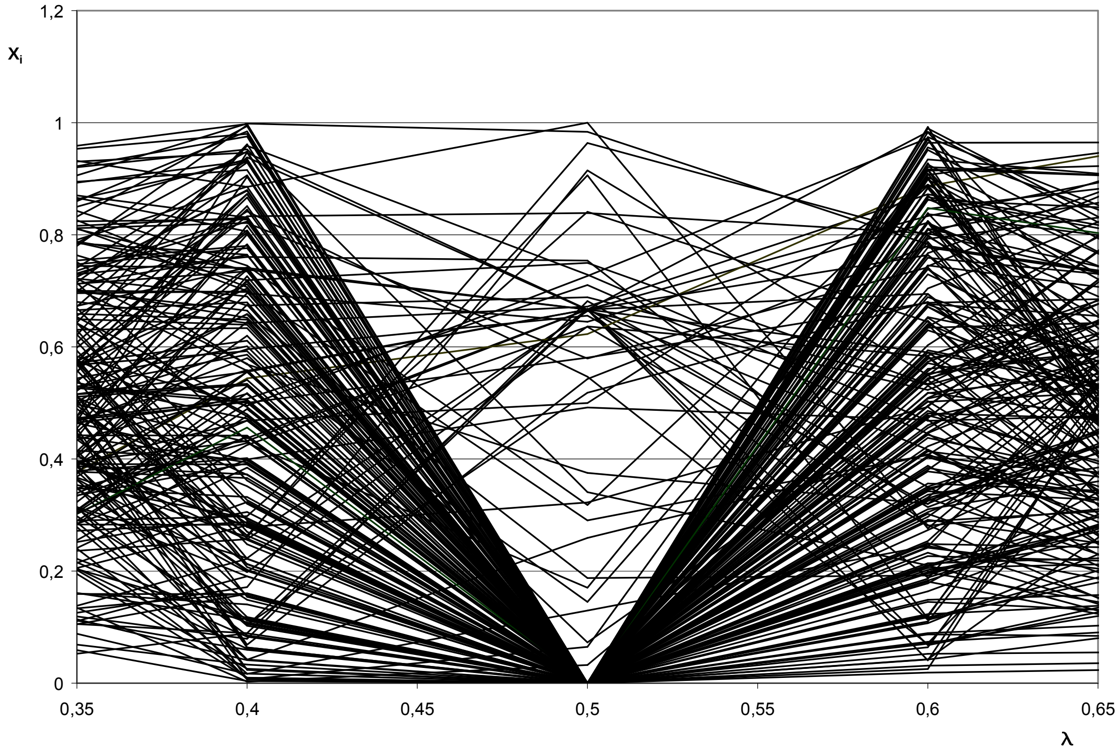

Рисунок 8

Бифуркационная диаграмма представляет множество возможных решений уравнения. Все точки в хаотической области статистически не равновероятны. Темные полосы и устойчивые в широком диапазоне решения указывают на изменчивость вероятностей при возрастании λ. При каждом λ в хаотической области имеется бесконечное количество решений, заключенных в конечном пространстве.

В данной работе для исследования динамических систем разработана программа – генератор одномерных дискретных отображений. В зависимости от выбора пользователя она позволяет моделировать динамику различных отображений и строить графики временных рядов и бифукарционные диаграммы. Статья содержит примеры использования программы с целью исследования динамики отображений.

Литература

1. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003. – 296 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания. Москва: Мир, 1990. – 312 с.
3. Терехов С.В. Фракталы и физика подобия. Донецк, 2010. – 255 с.