УДК621.3.011.714

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Федоров М.М., проф., д.т.н.; Казак А.О., студент; Кузнецов Г.В., студент
(ГУВЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина)

Анализ режимов работы в системах автоматического управления сопровождается необходимостью расчета переходных процессов. Важным элементом является оценка длительности протекания переходного процесса, которую можно оценить путем решения характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений описывающих процессы в соответствующей системе автоматического управления.

Рассмотрим алгоритм составления характеристического уравнения на примере схемы приведенной на рис.1.

В схеме имеется источники напряжения и тока, два реактивных разнородных элемента индуктивность $\boldsymbol{L_3}$ и емкость$\boldsymbol{C_2}$.

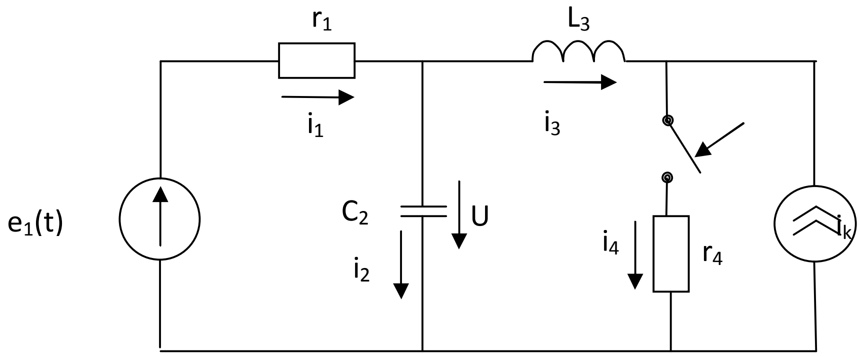

Рисунок 1- Электрическая схема

Составляем уравнения по законам Киргофа:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 - i_4 = -i_k \\ i_1 r_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_2\,dt = e_1(t) \\ i_1 r + L\dfrac{di_3}{dt} + i_4 r_4 = e_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему ДУ для свободной составляющей.

Свободная составляющая не зависит от внешних сил, то есть в уравнениях отсутствуют источники напряжения и тока, система примет вид:

$$\begin{cases} i_{1\,св} - i_{2\,св} - i_{3\,св} = 0 \\ i_{3\,св} - i_{4\,св} = 0 \\ i_{1\,св} r_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_{2\,св}\,dt = 0 \\ i_{1\,св}\, r + L\dfrac{di_{3\,св}}{dt} + i_{4\,св}\, r_4 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Ток в k-ой ветви свободной составляющей в общем случае равен:

$$i_{k_{св}} = A_k e^{pt} \tag{3}$$

Где A_k - постоянная интегрирования , р-корень характеристического уравнения, тогда свободная составляющая напряжения на индуктивном элементе равна:

$$u_{Lсв} = L\frac{di_{3св}}{dt} = Lp \cdot A_3 e^{pt} = Lp \cdot i_{3св} \tag{4}$$

напряжение на емкостном элементе соответственно равно:

$$u_{Ccc} = \frac{1}{C}\int i_{2св}dt = \frac{1}{c}\int A_2 e^{pt}dt = \frac{1}{Cp}A_2 e^{pt} = \frac{1}{Cp}\cdot i_{2св} \tag{5}$$

С учетом выше изложенного , система уравнений для свободной составляющей примет вид:

$$\begin{cases} i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + i_{3св} - i_{4св} = 0 \\ i_{1св} r_1 + \dfrac{1}{Cp} i_{2св} + 0 + 0 = 0 \\ i_{1св} r + 0 + Lpi_{3св} + i_{4св} r_4 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Полученной системе уравнений соответствует схема приведенная на рис.2.

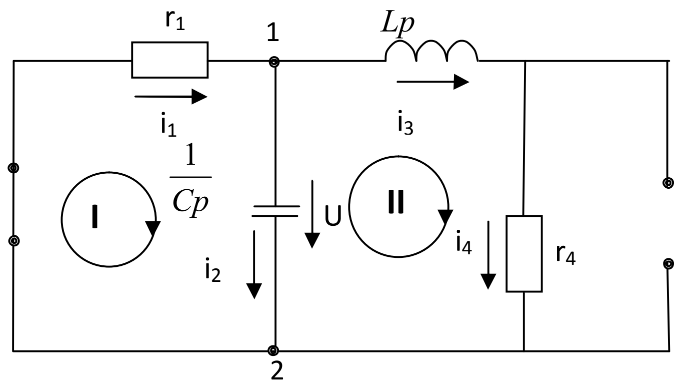

Рисунок 2 –Электрическая схема для свободной составляющей

Из полученной системы уравнений следует что, определитель системы равен:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ r_1 & \dfrac{1}{Cp} & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & Lp & r_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

так как правая часть равна нулю, то $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$

Принимая во внимание что $i_{1св} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$,$i_{2св} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ и.т.д, и свободная составляющая не должна равняться нулю ,то следует что $\Delta(p) = 0$. Порядок определителя соответствует числу уравнений составленных по первому и второму законам Киргофа, для данной схемы определитель 4гопорядка. Если раскрыть определитель системы то он имеет вид:

$$p^2 r_1 LC + p(L + r_1 r_4 C) + r_4 + r_1 = 0 \tag{8}$$

В результате получили квадратное уравнение что соответствует порядку системы.

В общем случаи порядок системы определяется количеством реактивных элементов схемы после коммутации . Исключения составляют особые случаи (емкостные контуры подключенные к одному узлу , индуктивные сечения).После раскрытия определителя характеристическое уравнение будет иметь вид полинома. Наибольшая степень полинома P будет соответствовать порядку системы.

Рассмотрим возможности составления характеристического уравнения с использованием различных методов определения $i_{св}$на основе законов Киргофа с использованием электрической схемы рис.2, с целью получения определителя меньшего порядка.

Например, используя метод контурных токов запишем:

$$\begin{cases} i_{свI}\left(r_1+\frac{1}{Cp}\right)-\frac{1}{Cp}i_{свII}=0 \\ -\frac{1}{Cp}i_{свI}+i_{свII}\left(Lp+r_4+\frac{1}{Cp}\right)=0 \end{cases} \tag{9}$$

Определитель данной системы имеет вид:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} r_1+\frac{1}{Cp} & -\frac{1}{Cp} \\ -\frac{1}{Cp} & Lp+r_4+\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

После его раскрытия получаем:

$$p^2r_1LC+p(L+r_1r_4C)+r_4+r_1=0 \tag{11}$$

Полученное характеристическое уравнение совпадает с полученным ранние, однако его порядок меньше ($2^{й}$ порядок) он определяется числом независимых контуров или числу уравнений составленных по второму закону Киргофа.

Рассмотрим составление характеристического уравнения на основе метода узловых потенциалов рис.2

Потенциал точки 2 принимаем равным нулю $\varphi_2=0$, тогда согласно методу узловых потенциалов имеем:

$$\varphi_{1св}\left(\frac{1}{r_1}+Cp+\frac{1}{Lp}+\frac{1}{r_4}\right)=0 \tag{12}$$

отсюда следует:

$$p^2r_1LC+p(L+r_1r_4C)+r_4+r_1=0 \tag{13}$$

Данное характеристическое уравнение соответствует ранее полученным. Порядок определителя соответствует числу узлов, а также количеству уравнений составленных по первому закону Киргофа.

Правила составления характеристических уравнений для электрических схем:

1. Вычертим элементарную схему соответствующую уравнениям свободных составляющих, для получения этой схемы из исходной:

a) Ключ ставим в положение после коммутации .

b) Вместо источников питания ставим их внутреннее сопротивление.

c) Вместо емкости ставим сопротивление $\frac{1}{cp}$, вместо индуктивности сопротивление Lp.

2. Составляем систему уравненийлюбым из известных методов.

3. Из системы уравнений находим определитель и приравниваем его нулю.

Вывод:

Предложенный алгоритм составления характеристических уравнений предполагает использование определителей меньшего порядка, что в значительной степени облегчает расчет и анализ системы дифференциальных уравнений описывающих состояние процесса.