УДК 621.321.7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОЛИТА ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОМ ПОКРЫТИИ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНОВОДА

Герасименко А.Н., ассистент; Герасименко Ю.Я., проф., д.т.н.;
Герасименко Е.Ю., доц., к.т.н.
(Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия)

При математическом моделировании рассматриваемого процесса принимаются следующие допущения:

– лимитирующей стадией электродных процессов является диффузия ионов металла в слое электролита;

– все физико-химические параметры электролита являются постоянными величинами;

– нормальная составляющая плотности электрического тока по контуру поперечного сечения волновода распределена равномерно.

Геометрия исследуемой системы изображена на рис.1.

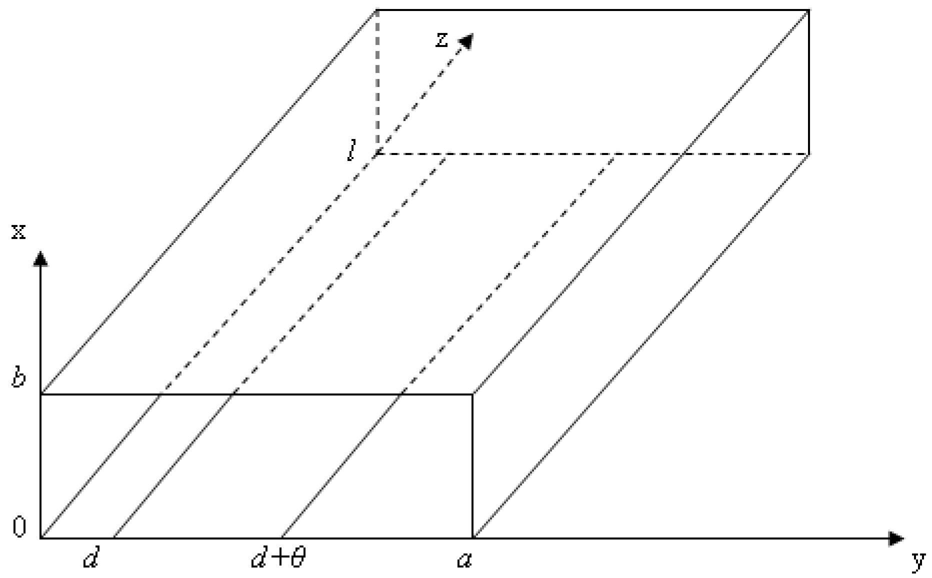

Рисунок 1 – Геометрия математической модели процесса

При введенных допущениях математической моделью исследуемого процесса является следующая краевая задача [1]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right); \tag{1}$$

$$c(x; y; z; 0) = C_0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0; y; z; t) = Ni(z; t)\left[h(y-d) - h(y-d-\theta)\right]; \tag{3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(b; y; z; t) = Nk(z; t); \tag{4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x;0;z;t)=0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x;a;z;t)=Nk(z;t); \tag{6}$$

$$c(x;y;0;t)=C_0; \tag{7}$$

$$c(x;y;l;t)=C_0, \tag{8}$$

где $c(x;y;z;t)$ – концентрация электролита; D – коэффициент диффузии;
C_0 – начальная концентрация электролита; N>0 – электродно-кинетическая константа;
$i(z;t)$ – неизвестная нормальная составляющая плотности электрического тока на аноде;
$k(z;t)$ – неизвестная нормальная составляющая плотности электрического тока на катоде;
$h(y)$ – функция Хевисайда.

Начально-краевую задачу (1) – (8) удобно решать операторным методом Лапласа. Введем следующие соответствия: $c(x;y;z;t)\overset{\circ}{\underset{\circ}{=}}\overset{\circ}{C}(x;y;z;p)$; $i(z;t)\overset{\circ}{\underset{\circ}{=}}\overset{\circ}{I}(z;p)$; $k(z;t)\overset{\circ}{\underset{\circ}{=}}\overset{\circ}{K}(z;p)$.

Задача (1) – (8) преобразуется в краевую задачу относительно изображения $\overset{\circ}{C}(x;y;z;p)$.

$$\frac{\partial^2 \overset{\circ}{C}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overset{\circ}{C}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \overset{\circ}{C}}{\partial z^2}-\frac{p}{D}\overset{\circ}{C}=-\frac{C_0}{D}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{C}}{\partial x}(0;y;z;p)=N\,\overset{\circ}{I}(z;p)\left[h(y-d)-h(y-d-\theta)\right]; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{C}}{\partial x}(b;y;z;p)=N\,\overset{\circ}{K}(z;p); \tag{11}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{C}}{\partial y}(x;0;z;p)=0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{C}}{\partial x}(x;a;z;p)=N\,\overset{\circ}{K}(z;p); \tag{13}$$

$$\overset{\circ}{C}(x;y;0;p)=\frac{C_0}{p}; \tag{14}$$

$$\overset{\circ}{C}(x;y;l;p)=\frac{C_0}{p}. \tag{15}$$

Неоднородную краевую задачу (9) − (15) будем решать с помощью функции Грина $G(M;M_0;p)$, где $M=M(x;y;z)$ − точка наблюдения, $M_0=M_0(x_0;y_0;z_0)$ − точка интегрирования. Для поиска функции Грина ставится вспомогательная краевая задача специального вида:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\frac{p}{D}G=-\delta(M;M_0);$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0;y;z;p)=0\,; \quad \frac{\partial G}{\partial x}(b;y;z;p)=0\,; \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x;0;z;p)=0\,; \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x;a;z;p)=0\,;$$

$$G(x;y;0;p)=0\,; \qquad G(x;y;l;p)=0\,,$$

где $\delta(M;M_0)$ − импульсная функция Дирака трех переменных, которая может быть представлена в виде

$$\delta(M;M_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).$$

Функция Грина как решение последней краевой задачи представляется в виде кратного ряда Фурье по ее собственным функциям. После определения функции Грина $G(M;M_0;p)$ можно записать и решение краевой задачи (9) − (15), т.е. найти изображение концентрации $\overset{\circ}{C}(x;y;z;p)$.

$$\overset{\circ}{C}(x;y;z;p)=\oiint_S D\frac{\varphi(M_0)}{\alpha_2(M_0)}G(M;M_0;p)d\sigma_{M_0}-\iiint_V G(M;M_0;p)\left(-\frac{C_0}{D}\right)dV_{M_0}\,,$$

где $\varphi(M_0)$ − правая часть обобщенного краевого условия

$$\alpha_1(M_0)c(M_0)+\alpha_2(M_0)\frac{\partial c}{\partial n}(M_0)=\varphi(M_0)$$

на граничной поверхности исследуемого объема (параллелепипеда).

Распределения плотностей тока $i(z;t)$ и $k(z;t)$ могут быть найдены только после системного исследования концентрационного и электрического полей в электролите волновода.

Перечень ссылок

1. Герасименко Ю.Я. Математическое моделирование электрохимических систем. ЮРГТУ (НПИ), Новочеркасск, 2009, 310 с.