Лєсіна М. Ю.,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики ім. В. В. Пака,
Гоголева Н. Ф.,
асистент вищої математики ім. В. В. Пака,
Донецький національний технічний університет.
(м. Донецьк, Україна)

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Задача о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным сферическим и неголономным шарнирами, поставлена в работах [1, 2], в [2] также выполнена редукция к уравнению Абеля второго рода. Найдены три точных решения обобщенной задачи в работах [2, 3, 4].

Здесь решение получено с помощью исходной системы уравнений движения. В работе [2] получены уравнения

$$\begin{aligned}&(\xi+1)\{\Omega_2(\theta)-\omega_2(\theta)\cos\theta-[A_0k(\theta)+Nk_0(\theta)]\sin\theta\}=\\&=2\,[\omega_2'(\theta)-A_0k_0'(\theta)\sin\theta-Nk_0(\theta)]\sin\theta,\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&(\xi-1)\{\Omega_2(\theta)\cos\theta-\omega_2(\theta)-[Ak_0(\theta)+Nk(\theta)]\sin\theta\}=\\&=2\,[\Omega_2'(\theta)-Nk_0'(\theta)\sin\theta+Nk(\theta)]\sin\theta\end{aligned} \tag{2}$$

Зададим инвариантное соотношение

$$\Omega_2(\theta)\cos\theta-\omega_2(\theta)-[Ak_0(\theta)+Nk(\theta)]\sin\theta=0, \tag{3}$$

тогда при $\xi\neq1$, из (2) следует

$$\Omega_2'(\theta)-Nk_0'(\theta)\sin\theta+Nk(\theta)=0. \tag{4}$$

Переменные n_0, n, ω_2 связаны соотношениями

$$n'(\theta)=-n_0'(\theta)\cos\theta, \tag{5}$$

$$\omega_2(\theta)\sin\theta=\frac{n(\theta)}{J}\cos\theta-\frac{n_0(\theta)}{J_0}, \tag{6}$$

Из уравнения (1) будем определять ξ .

Система (3)–(6) замкнута: четыре уравнения связывают четыре величины $\omega_2(\theta),\ \Omega_2(\theta),\ n_0(\theta), n(\theta)$..

Среди этих уравнений два уравнения конечные, поэтому можно выполнить редукцию к одному уравнению второго порядка относительно $n_0(\theta)$.

Для частного случая $N=0$, $A_0 = J_0$ редуцированное уравнение принимает вид

$$n_0''(\theta)-\lambda^2 tg\,\theta\, n_0'(\theta)-\lambda^2\left(1+tg^2\theta\right)n_0(\theta)=0 \tag{8}$$

где $\lambda^2 = J/(J+J_0)$.

Общее решение этого уравнения таково

$$n_0(\theta)=\left[C+C_1\int(\cos\theta)^{\lambda^2}d\theta\right](\cos\theta)^{-\lambda^2}, \tag{9}$$

Интеграл $I_*=\int(\cos\theta)^{\lambda^2}d\theta$, по теореме Чебышева не может быть выражен в элементарных функциях, потому считаем C_1=0, тогда решение имеет вид

$$\begin{aligned}&n_0(\theta)=J_0C(\cos\theta)^{-\lambda^2},\ n(\theta)=JC(\cos\theta)^{1-\lambda^2},\\&\omega_2(\theta)=-C(\cos\theta)^{-\lambda^2}\sin\theta,\quad \Omega_2=0,\ \omega_3(\theta)=C(\cos\theta)^{1-\lambda^2},\\&\Omega_3(\theta)=C(\cos\theta)^{-\lambda^2},\ \xi+1=-\frac{(A+J_0)J+(A-J)J_0\cos^2\theta}{(A-J)(J+J_0)\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

Компоненты ω_1, Ω_1 находим из интеграла, выражающего постоянство момента количества движения системы, а потенциальную энергию упругого элемента определяем из интеграла энергии.

Литература.

1. *Лесина М.Е. К построению полного решения задачи об относительном движении двух связанных твердых тел. // Механика твердого тела. – 1987.–Вып.19. – С. 58-68.*
2. *Лесина М.Е., Харламов А.П. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром. // Там же. – 1995.–Вып.27. – С. 15-21.*
3. *Лесина М.Е., Харламов А.П. Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром. // Там же. – 2004.–Вып.34. – С. 80-86.*
4. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф. Новое решение задачи о движение двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром. // Там же. – 2006.–Вып.36. – С.51-58.*